学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名　依田　浩彰

ある三角微分の核の生成系の計算

k を体，$k[\mathbf{x}] := k[x_1, \ldots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環，$k(\mathbf{x})$ を $k[\mathbf{x}]$ の商体とする．ヒルベルトの第 14 問題とは，中間体 $k \subset L \subset k(\mathbf{x})$ に対して，$k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数 $L \cap k[\mathbf{x}]$ が常に有限生成であるかを問う問題である．1958 年に永田 [4] は $n = 32$ の場合の反例を挙げ，ヒルベルトの第 14 問題は否定的に解決された．現在は，有限生成になる場合，もしくはならない場合を特定する問題として研究されている．

以下，k の標数は 0 であるとする．k 線形写像 $D : k[\mathbf{x}] \to k[\mathbf{x}]$ は，任意の $f, g \in k[\mathbf{x}]$ に対して $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ を満たすとき，$k[\mathbf{x}]$ の k 上の微分と呼ばれる．微分 D の核

$$k[\mathbf{x}]^D := \{f \in k[\mathbf{x}] \mid D(f) = 0\}$$

は $k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数である．$k[\mathbf{x}]^D$ の有限生成性の問題は，ヒルベルトの第 14 問題の特別な場合である．D が三角であるとは，任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $D(x_i) \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ を満たすときにいう．ヒルベルトの第 14 問題に対するいくつかの反例が，三角微分の核として与えられた．

非負整数 t_1, t_2, t_3, t_4 に対し，k 上の 5 変数多項式環 $k[x, \mathbf{y}] := k[x, y_1, \ldots, y_4]$ の k 上の微分 Δ を

$$\Delta = x^{t_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + x^{t_2} y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + x^{t_3} y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + x^{t_4} \frac{\partial}{\partial y_4}$$

で定義する．この微分は，$x = x_1$, $y_i = x_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ とすれば三角である．デイグル・フロイデンバーグ [1] は，$t \geq 2$ のとき，$(t_1, t_2, t_3, t_4) = (t + 1, 0, 0, t)$ に対し，$k[x, \mathbf{y}]^\Delta$ が k 上有限生成でないことを示した．より一般に，黒田 [3, Theorem 4.11] は

$$t_4 < t_1, \quad 4t_1 + t_2 + \max\{t_2, t_3\} \leq 6t_4$$

ならば，$k[x, \mathbf{y}]^\Delta$ は k 上有限生成でないことを示した．一方，黒田 [3, Conjecture 4.12] は

$$t_4 < t_1, \quad 4t_1 + t_2 + \max\{t_2, t_3\} > 6t_4$$

ならば，$k[x, \mathbf{y}]^\Delta$ は有限生成であると予想した．

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) = (2, 0, 0, 1),\ (3, 0, 0, 1)$$

のとき，この不等式が成り立つ．本論文の目的は，これらの場合に，$k[x, \mathbf{y}]^\Delta$ が k 上有限生成であることを示すことである．次が本論文の主結果である．

定理　(1) $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (2, 0, 0, 1)$ のとき $k[x, \mathbf{y}]^{\Delta}$ は 6 個の多項式で $k[x]$ 上生成される.
(2) $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (3, 0, 0, 1)$ のとき $k[x, \mathbf{y}]^{\Delta}$ は 4 個の多項式で $k[x]$ 上生成される.

さらに，(1) の場合の 6 個の多項式，(2) の場合の 4 個の多項式をそれぞれ具体的に求めた.
定理の証明に，微分の核の生成系を計算するためのファンデンエッセン [2, Section 1.4] の理論を用いた.

参考文献

[1] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimention 5, J. Algebra **221** (1999), 528–535.

[2] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics, Vol. 190, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2000.

[3] S. Kuroda, Hilbert's fourteenth problem and algebraic extensions with an appendix on Roberts type counterexamples, Acta Math. Vietnam **32** (2007), 247–257.

[4] M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1960, 459–462.