学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名　谷部　雅季

論文題目：ロバーツ型局所冪零導分の一例についての考察：核の有限生成性を巡って

k を標数 0 の体とし，$k[\boldsymbol{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環とする．k 線形写像 $D : k[\boldsymbol{x}] \to k[\boldsymbol{x}]$ は任意の $f, g \in k[\boldsymbol{x}]$ に対し，$D(fg) = fD(g) + gD(f)$ を満たすとき，$k[\boldsymbol{x}]$ における k **導分** という．任意の $f \in k[\boldsymbol{x}]$ に対し，ある $l \geq 1$ が存在して，$D^l(f) = 0$ となるとき，D は **局所冪零** であるという．ただし，D^l は D を l 回合成した写像とする．D を $k[\boldsymbol{x}]$ における k 導分とする．このとき，$k[\boldsymbol{x}]^D := \{f \in k[\boldsymbol{x}] \mid D(f) = 0\}$ は $k[\boldsymbol{x}]$ の k 部分代数である．$k[\boldsymbol{x}]^D$ の有限生成性の問題は，ヒルベルトの第 14 問題の特別な場合である．ヒルベルトの第 14 問題は永田 [4] が否定的に解決したが，1990 年にロバーツ [5] は新たな反例を与えた．その後，ロバーツの結果を利用し，局所冪零導分を用いた色々な反例が構成されてきた．

以下，$k[\boldsymbol{x}] = k[x_1, x_2, x_3]$ とし，$k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z] = k[\boldsymbol{x}][y_1, y_2, y_3, z]$ を 7 変数多項式環とする．整数 $u_i > t_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ に対し，

$$D = x_1^{u_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2^{u_2} \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3^{u_3} \frac{\partial}{\partial y_3} + x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} \frac{\partial}{\partial z}$$

は $k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]$ における局所冪零 k 導分である．ロバーツの反例は，$t_i = t$, $u_i = t + 1$ $(i = 1, 2, 3)$ の場合の $k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D$ として与えられる．ただし，$t \geq 2$ とする．より一般に，

$$\frac{t_1}{u_1} + \frac{t_2}{u_2} + \frac{t_3}{u_3} \geq 2 \tag{1}$$

ならば，$k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D$ は k 上有限生成でないことが知られている [3]．一方，蔵野 [2] より，$t_i = 1$, $u_i = 2$ $(i = 1, 2, 3)$ のとき $k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D$ は k 上 12 個の元で生成される．より一般に，不等式 (1) を満たさないとき $k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D$ は有限生成であると予想されている [3]．しかし，具体的な場合も含めてほとんど解明されていない．

本修士論文では以下の研究を行った．

主結果 1　まず，局所冪零導分の核の生成系を計算するための「エッセンのアルゴリズム [1]」を用いて，蔵野の結果の別証明を与えた．同様の方法で，(1) を満たさない幾つかの場合について，$k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D$ の核の生成系の決定を試みた．しかし，いずれの場合も計算機による計算が終了しなかった．

主結果 2　次に，以下の方法を用いて，(1) を満たさない幾つかの場合に対して $k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D$ の低次の元を直接計算により求め，$k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D$ の生成の様子を調べる研究を行った．

代入写像 $\pi : k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z] \to k[\boldsymbol{x}, z]$ を $\pi(y_i) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ で定義するとき，次の命題が成り立つ．

命題 1 k 代数 $\pi(k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D)$ は単項式で生成される．

(1) が成り立つとき，$k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D$ だけでなく $\pi(k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D)$ も有限生成でない [3]．そのため，$k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D$ の有限生成性と $\pi(k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D)$ の有限生成性の間に深い関係があると考えられる．そこで，本修士論文では $\pi(k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D)$ の生成について調べた．

係数が 1 の単項式からなる $\pi(k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D)$ の生成系の中で，包含関係に関して最小なものを $\mathcal{U}$ とおき，$\mathcal{U}_i := \{x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} z^l \in \mathcal{U} \mid l = i\}$ $(i \geq 0)$ と定義する．以下，$t := t_1 = t_2 = t_3$, $u := u_1 = u_2 = u_3$ と仮定する．$k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z]^D$ の $\mathbf{Z}^4$ 次数付き環の構造などを利用し，一部で計算機も活用しながら計算を行い，$(t, u) = (1, 3), (51, 100), (33, 50)$ の場合に $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_6$ をそれぞれ求めた．それにより，以下の定理を得た．

定理 2 $\#\mathcal{U}_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ は以下のとおりである．

(t,u)	$3t/u$	$\#\mathcal{U}_1$	$\#\mathcal{U}_2$	$\#\mathcal{U}_3$	$\#\mathcal{U}_4$	$\#\mathcal{U}_5$	$\#\mathcal{U}_6$
(1,3)	1	3	3	3	1	0	0
(51,100)	1.53	3	3	6	9	21	21
(33,50)	1.98	3	3	6	9	15	15

なお，$i \geq 7$ に対して，$\#\mathcal{U}_i$ は現時点では不明である．

参考文献

[1] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, vol. 190, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[2] K. Kurano, *Positive characteristic finite generation of symbolic Rees algebras and Roberts' counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert*, Tokyo J. Math. **16** (1993), no. 2, 473–496.

[3] S. Kuroda, *A generalization of Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert*, Tohoku Math. J. (2) **56** (2004), no. 4, 501–522.

[4] M. Nagata, *On the fourteenth problem of Hilbert*, Proc. Internat. Congress Math. 1958, Cambridge Univ. Press, New York, 1960, pp. 459–462.

[5] P. Roberts, *An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem*, J. Algebra **132** (1990), no. 2, 461–473.