学位論文要旨 （修士 (理学)）

上濃 尊行

論文題名：4 変数多項式環における階数 4 の局所冪零導分の構成と核の生成系の計算

k を標数 0 の体, $k[\mathbf{x}] := k[x_1, \ldots, x_n]$ を n 変数多項式環とする．環 $k[\mathbf{x}]$ の k 自己同型全体の集合を $\mathrm{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ と表す.

定義 1. k 線形写像 $D : k[\mathbf{x}] \to k[\mathbf{x}]$ は $D(fg) = fD(g) + D(f)g$ $(\forall f, g \in k[\mathbf{x}])$ を満たすとき k 導分という.

$$D : 局所冪零 \Leftrightarrow \forall f \in k[\mathbf{x}], \exists N \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\ s.t.\ D^N(f) = 0$$

と定める.

導分 D の核を $k[\mathbf{x}]^D := \{f \in k[\mathbf{x}] \mid D(f) = 0\}$ と表す．導分の核は始域の部分環になる．n 変数多項式環における局所冪零導分の核は 3 変数以下では必ず有限生成であることが Zariski によって示された ([6])．Daigle-Freudenburg は核が有限生成でない 5 変数多項式環における局所冪零導分を構成した ([2])．$k[\mathbf{x}]$ における任意の k 導分 D は

$$D = D(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + D(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

と表すことができる．$k[\mathbf{x}]$ における任意の局所冪零 k 導分 D と任意の $\phi \in \mathrm{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に対し, $D^\phi := \phi^{-1} \circ D \circ \phi$ は局所冪零 k 導分である.

$$\mathrm{rank}\, D := n - \max\{l \mid D^\phi(x_1), \ldots, D^\phi(x_l) = 0,\ \phi \in \mathrm{Aut}_k k[\mathbf{x}]\}$$

を D の階数と呼ぶ．4 変数かつ階数が 3 以下の局所冪零導分の核は有限生成になることが Bhatwadekar-Daigle によって証明された ([1])．Freudenburg は 3 変数多項式環における の階数 3 の局所冪零導分を次のように構成した ([4]).

$F = x_1x_3 - x_2^2$, $r = -(x_1^3 + x_2F)$ とし, $\{H_m\}$ を

$$H_1 = x_1,\ H_2 = F,\ H_{m+1} = \frac{H_m^3 + r^{\deg H_m}}{H_{m-1}}\ (m = 2, 3, \ldots)$$

と定める．すると H_m は斉次多項式となる．この $\{H_m\}$ に対して D_m を

$$D_m : k[x_1, x_2, x_3] \ni f \mapsto \frac{\partial(H_m, H_{m+1}, f)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \in k[x_1, x_2, x_3]$$

と定義すると，$m \geq 2$ で D_m は階数 3 の局所冪零 k 導分であり $k[x_1, x_2, x_3]^{D_m} = k[H_m, H_{m+1}]$ となる．

さらに Freudenburg は D_m を拡張して任意の $n \geq 4$ に対し n 変数多項式環における階数 n の局所冪零導分の例を与えた ([4], [5])．本論文では D_2 の $k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ への拡張 $\tilde{D}_2$ で局所冪零導分かつ階数 4 であり, Freudenburg の例と異なるものを構成した．また, その核 $k[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\tilde{D}_2}$ の生成系を van den Essen のアルゴリズム ([3]) を用いて計算した．

以下が主結果である．

定理 1. $k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ における k 導分 $\tilde{D}_2$ を $\tilde{D}_2(x_i)\,(i = 1, 2, 3), \tilde{D}_2(x_4) = rx_1^2$ で定義すると，$\tilde{D}_2$ は階数 4 の局所冪零導分となり，その核は $k[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\tilde{D}_2} = k[H_2, H_3, P_2, Q_2]$ である．但し

$$P_2 = 6H_2x_4 + {H_1}^3,\ Q_2 = \frac{{P_2}^5 - {H_3}^3}{H_2}$$

とする．

参考文献

[1] S. M. Bhatwadekar and D. Daigle, On finite generation of kernels of locally nilpotent R-derivations of $R[X, Y, Z]$, J. Algebra **322** (2009), no. 9, 2915–2926.

[2] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5, J. Algebra **221** (1999), 528–535.

[3] A. van den Essen, Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture, Progress in mathematics, Vol. 190, Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser, 2000.

[4] G. Freudenburg, Local slice constructions in $k[X, Y, Z]$, Osaka J. Math. **34**, (1997), 757–767.

[5] G. Freudenburg, Actions of $\mathbf{G}_a$ on $\mathbf{A}^3$ defind by homogeneous derivations, J. Pure Appl. Algebra **126** (1998), 169–181.

[6] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math. **78** (1954), 155–168.