学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名　佐藤　達輝

論文題名：$SL_2(\mathbf{C})$ の余順自己同型

$\mathbf{C}[\mathbf{x}] := \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を $\mathbf{C}$ 上の n 変数多項式環とする．$\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ を $\mathbf{C}$ 代数 $\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の自己同型群とする．各 $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ は，$\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)$ により一意的に定まるので，$\phi = (\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))$ と表す．

$\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ がアフィン自己同型であるとは，$\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)$ が全て一次式のときに言う．アフィン自己同型全体の集合を $\mathrm{Aff}_n(\mathbf{C})$ と書く．$\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ が基本自己同型であるとは，ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ と $p \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ が存在して，$\phi = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + p, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ が成り立つときにいう．基本自己同型全体の集合を $\mathcal{E}_n(\mathbf{C})$ と書く．$T_n(\mathbf{C}) := \langle \mathrm{Aff}_n(\mathbf{C}) \cup \mathcal{E}_n(\mathbf{C}) \rangle$ を $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の順部分群という．

基本自己同型 $\sigma = (x_1 + x_2^2, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ に対して，次が成り立つことが知られている ([3], Theorem 5.2.1 を参照).

定理 1（Derksen） $n \geq 2$ のとき，$\langle \{\sigma\} \cup \mathrm{Aff}_n(\mathbf{C}) \rangle = T_n(\mathbf{C})$ が成り立つ．

定理 1 の一般化として，Edo によって次の定義が与えられた．

定義 2（Edo [2]） $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ とする．$\langle \{\phi\} \cup \mathrm{Aff}_n(\mathbf{C}) \rangle \supset T_n(\mathbf{C})$ が成り立つとき，ϕ を余順自己同型という．

以下，$n = 4$ とし，

$$q := x_1x_4 - x_2x_3,\ \mathbf{C}[SL_2] := \mathbf{C}[\mathbf{x}]/(q-1)\mathbf{C}[\mathbf{x}]$$

と定義する．$\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[SL_2]$ を $SL_2(\mathbf{C})$ の座標環 $\mathbf{C}[SL_2]$ の自己同型群とする．各 $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[SL_2]$ は，$\phi(\overline{x_1}), \ldots, \phi(\overline{x_4})$ により一意的に定まるので，$\phi = \begin{pmatrix} \phi(\overline{x_1}) & \phi(\overline{x_2}) \\ \phi(\overline{x_3}) & \phi(\overline{x_4}) \end{pmatrix}$ と表す．以下では，$\overline{f} \in \mathbf{C}[SL_2]$ を単に f と書く．

$\mathcal{A}$ を，$\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\mathbf{C}[SL_2]$ の元で，各成分の代表元として，一次斉次式をとることができるもの全体の集合とする．各 $P(x_2, x_4) \in \mathbf{C}[x_2, x_4]$ に対し，

$$E_3^1(P(x_2, x_4)) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2P(x_2, x_4) & x_2 \\ x_3 + x_4P(x_2, x_4) & x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[SL_2]$$

と定義し，

$$\mathcal{E}_3^1 := \left\{ E_3^1(P(x_2,x_4)) \,\middle|\, P(x_2,x_4) \in \mathbf{C}[x_2,x_4] \right\}$$

とおく．同様に $\mathcal{E}_4^2, \mathcal{E}^{12}, \mathcal{E}_{34}$ を定め，$\mathcal{E} := \mathcal{E}_3^1 \cup \mathcal{E}_4^2 \cup \mathcal{E}^{12} \cup \mathcal{E}_{34}$ とする．Arzhantsev-Gaĭfullin [1], Lamy-Vénéreau [4] は，$\mathbf{C}[SL_2]$ の順自己同型の定義を与えた．

定義 3（Arzhantsev-Gaĭfullin [1], Lamy-Vénéreau [4]） $T := \langle \mathcal{E} \cup \mathcal{A} \rangle$ を $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[SL_2]$ の順部分群といい，T の元を $\mathbf{C}[SL_2]$ の順自己同型という．

Arzhantsev-Gaĭfullin [1], Lamy-Vénéreau [4] は，順自己同型でない $\mathbf{C}[SL_2]$ の自己同型が存在することを示した．

本修士論文の主結果は，$\mathbf{C}[SL_2]$ の余順自己同型を定義し，その存在を示したことである．

定義 4 $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[SL_2]$ とする．$\langle \{\sigma\} \cup \mathcal{A} \rangle \supset T$ が成り立つとき，σ を $\mathbf{C}[SL_2]$ の余順自己同型という．

定理 5 $E_3^1(x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 & x_2 \\ x_3 + x_2 x_4 & x_4 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{C}[SL_2]$ の余順自己同型である．

参考文献

[1] I. V. Arzhantsev and S. A. Gaĭfullin, Cox rings, semigroups, and automorphisms of affine varieties. (Russian) ; Sb. Math. **201** (2010), no. 1-2, 1–21; translated from Mat. Sb. **201** (2010), no. 1, 3–24.

[2] E. Edo, Coordinates of $R[x,y]$: constructions and classifications, Comm. Algebra **41** (2013), no. 12, 4694–4710.

[3] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, 190, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[4] S. Lamy and S. Vénéreau, The tame and the wild automorphisms of an affine quadric threefold, J. Math. Soc. Japan **65** (2013), no. 1, 299–320.