学位論文要旨 (修士 (理学))

論文著者名 冨田璃希

論文題名：ある $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 不変体の変形

本文

k を体，$k[\mathbf{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環，$k(\mathbf{x}) = k(x_1, \ldots, x_n)$ を k 上の n 変数有理関数体とする．L を $k(\mathbf{x})$ の部分体で，k を含むものとする．次の問題はヒルベルトの第 14 問題と呼ばれている．

問題 1 k 代数 $L \cap k[\mathbf{x}]$ は有限生成か？

L の k 上の超越次数が 2 以下のとき，$L \cap k[\mathbf{x}]$ は有限生成であることをザリスキ [5] は示した．一方，問題 1 の反例は永田 [3] が 1958 年に初めて与えた．ロバーツ [4] は問題 1 の新しい反例を与えた．これらの反例 L に対し，$k(\mathbf{x})/L$ は超越拡大である．$k(\mathbf{x})/L$ が代数拡大の場合については，ロバーツの理論を一般化し，全ての $r \geq 3$ に対し，$[k(\mathbf{x}) : L] = r$ を満たす反例 L が構成された [2].

最近，次の結果によって，$[k(\mathbf{x}) : L] = 2$ を満たす反例も与えられた [1]．以下，k の標数は 0 とする．z を変数とし，

$$k[\mathbf{x}, z] = k[x_1, \ldots, x_n, z], \quad k(\mathbf{x}, z) = k(x_1, \ldots, x_n, z)$$

をそれぞれ $n+1$ 変数の多項式環，有理関数体とする．

$$\epsilon : k[\mathbf{x}] \ni p(x_1, \ldots, x_n) \mapsto p(x_1, 0, \ldots, 0) \in k[x_1]$$

と定義する．$\mathrm{Aut}_k\, k(\mathbf{x}, z)$ を体 $k(\mathbf{x}, z)$ の k 上の自己同型群とする．

M を $k(\mathbf{x})$ の部分体で，k を含むものとし，以下の条件 (A) と (B) を考える．

(A) $M \cap k[\mathbf{x}] = M \cap k[\mathbf{x}][x_1^{-1}]$ である．

(B) $\epsilon(M \cap k[\mathbf{x}]) = k[p]$ を満たす $p \in k[x_1]$ は存在しない．

このとき，次の定理が成り立つ．

定理 2（[1, §2.2.1]） M が (A) と (B) を満たすとき，k 代数 $\theta(M(z)) \cap k[\mathbf{x}, z]$ が有限生成でないような $\theta \in \mathrm{Aut}_k\, k(\mathbf{x}, z)$ が存在する．

なお，[1, §2.2.1] では定理 2 の θ の構成の手順も与えられている．

本修士論文では，有限行列群の不変体として (A), (B) を満たす M を作ることを試み，

以下の結果を得た．$n=2$ とし，$x := x_1$, $y := x_2$ とおく．位数 3 の行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL(2,k)$$

に対し，$k[x,y]$ の自己同型

$$\phi : k[x,y] \ni p(x,y) \mapsto p(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = p(-y, x-y) \in k[x,y]$$

の $k(x,y)$ への拡張を $\widetilde{\phi}$ とおく．このとき，$\widetilde{G} := \langle \widetilde{\phi} \rangle$ は $\operatorname{Aut}_k k(x,y)$ の位数 3 の部分群である．$\widetilde{G}$ の不変体 $k(x,y)^{\widetilde{G}}$ を考える．

次が本修士論文の主結果である．

定理 3 $M = k(x,y)^{\widetilde{G}}$ は条件 (A) と (B) を満たす．

本修士論文では，k 代数 $\theta(k(x,y)^{\widetilde{G}}(z)) \cap k[x,y,z]$ が有限生成でないような $\theta \in \operatorname{Aut}_k k(x,y,z)$ も構成した．

参考文献

[1] A. van den Essen, S. Kuroda and A. J. Crachiola, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture—new results from the beginning of the 21st century*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser/Springer, Cham, 2021.

[2] S. Kuroda, Hilbert's fourteenth problem and algebraic extensions, J. Algebra **309** (2007), no. 1, 282–291.

[3] M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1960, 459–462.

[4] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, J. Algebra **132** (1990), no. 2, 461–473.

[5] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math. (2) **78** (1954), 155–168.