学位論文要旨 (修士 (理学))

論文著者名　菅井　健汰

論文題名：ある非可換不変式環のイニシャル代数と乗法的順序

$\mathbb{K}$ を可換体, n を 2 以上の自然数とし, $P_{\boldsymbol{x}} := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $P_{\boldsymbol{x}^{\pm 1}} := \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ をそれぞれ多項式環, ローラン多項式環とする．また, $P_{\boldsymbol{y}} := \mathbb{K}\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$, $P_{\boldsymbol{y}^{\pm 1}} := \mathbb{K}\langle y_1^{\pm 1}, \ldots, y_n^{\pm 1} \rangle$ をそれぞれ非可換多項式環, 非可換ローラン多項式環とする．$P_{\boldsymbol{x}}$ (resp. $P_{\boldsymbol{x}^{\pm 1}}$, $P_{\boldsymbol{y}}$, $P_{\boldsymbol{y}^{\pm 1}}$) の単項式全体の集合を $M_{\boldsymbol{x}}$ (resp. $M_{\boldsymbol{x}^{\pm 1}}$, $M_{\boldsymbol{y}}$, $M_{\boldsymbol{y}^{\pm 1}}$) で表す．

$\lambda \in \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\pm 1}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}^{\pm 1}\}$ とする．M_λ 上の全順序 $\preceq$ で

$$t_1 \preceq t_2 \;\Rightarrow\; ut_1v \preceq ut_2v \quad (\forall t_1, t_2, u, v \in M_\lambda)$$

を満たすもの全体の集合を Ω_λ と表し, Ω_λ の元を M_λ 上の**乗法的順序**と呼ぶ．整列順序であるような $\Omega_{\boldsymbol{x}}$ の元は**単項式順序**と呼ばれ, グレブナ基底の理論等で用いられる．$\lambda \in \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\pm 1}\}$ の場合とは違い, $\lambda \in \{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}^{\pm 1}\}$ の場合の Ω_λ に関する詳細はあまり知られていない．可換な多項式環の研究で乗法的順序が有用であるように, 非可換多項式環の研究でも乗法的順序が役立つと期待できる．本修士論文では, 非可換乗法的順序の研究の手掛かりを得ることを一つの目的として, ある種の非可換不変式環のイニシャル代数を調べた．また, 興味深い性質を持つ非可換乗法的順序の集合を幾つか構成した．

$\lambda \in \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\pm 1}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}^{\pm 1}\}$ と $\preceq \in \Omega_\lambda$ を任意に固定する．$0 \neq f \in P_\lambda$ に対し, f に現れる単項式たちの中で $\preceq$ に関して最大のものを $\mathrm{in}_\preceq(f)$ と表す．すると, P_λ の $\mathbb{K}$ 部分代数 A に対し, $\{\mathrm{in}_\preceq(f) \mid f \in A \setminus \{0\}\}$ で生成される $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathrm{in}_\preceq(A)$ は P_λ の $\mathbb{K}$ 部分代数になる．$\mathrm{in}_\preceq(A)$ を $\preceq$ に関する A の**イニシャル代数**と呼ぶ．これはグレブナ基底の理論で中核を担うイニシャルイデアルの類似の概念である．一般に $\mathrm{in}_\preceq(A)$ の構造を調べるのは難しく, $\mathbb{K}$ 代数として A が有限生成でも, $\mathrm{in}_\preceq(A)$ は有限生成とは限らない．

以下, G を n 次対称群の部分群とする．G の P_λ への作用を変数の置換で定義し, G 不変式環 P_λ^G のイニシャル代数について考える．Göbel [2], 黒田 [3] らにより, $\lambda \in \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\pm 1}\}$ のとき "$\mathbb{K}$ 代数 $\mathrm{in}_\preceq(P_\lambda^G)$ は有限生成 $\Longleftrightarrow$ G は互換のみで生成される" という主張が示された．更に, 黒田 [3] は G が互換のみで生成されない場合に $\{\mathrm{in}_\preceq(P_\lambda^G) \mid \preceq \in \Omega_\lambda\}$ が非可算集合であることを位相的な議論により示した．最近, $\lambda = \boldsymbol{x}^{\pm 1}$ のときに, この集合がカントール集合と位相同型であることが判明した [1]．一方, G が互換のみで生成される場合は $\#\{\mathrm{in}_\preceq(P_\lambda^G) \mid \preceq \in \Omega_\lambda\} = \#G$ であることが簡単に示せる．

本修士論文では $\lambda \in \{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}^{\pm 1}\}$ の場合について研究を行い, 以下の結果を得た．

主結果 1. $G \neq \{e\}$ のとき, 任意の $\lambda \in \{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}^{\pm 1}\}$ に対し, $\#\{\mathrm{in}_\preceq(P_\lambda^G) \mid \preceq \in \Omega_\lambda\} = \#\mathbb{R}$ が成立する．ただし, e は恒等置換とする．

G が互換のみで生成される場合の主結果 1 の証明に, Magnus 順序と呼ばれる $\Omega_{\boldsymbol{y}^{\pm 1}}$ の元と, Thue-Morse 列と呼ばれる概念を用いた. Thue-Morse 列を Magnus 順序の研究に利用するのは今回が初めてである.

ところで, $\lambda \in \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ に対し, 各 $\preceq \in \Omega_{\lambda^{\pm 1}}$ の M_λ への制限 $\preceq\upharpoonright_{M_\lambda}$ は Ω_λ に属する. 更に, $\Omega_{\boldsymbol{x}}$ の各元は, $\Omega_{\boldsymbol{x}^{\pm 1}}$ の元に一意的に拡張できる. しかし, $\Omega_{\boldsymbol{y}}$ の元を $\Omega_{\boldsymbol{y}^{\pm 1}}$ の元に常に拡張できるか, また拡張が存在する場合に一意的であるか, いずれも明らかでない. これに関し, 本修士論文では Magnus 順序, Thue-Morse 列, Richard-Thompson 群における幾つかの性質等を用いて, 次の主結果 2 で述べる $O \subset \Omega_{\boldsymbol{y}^{\pm 1}}$ を構成した.

主結果 2. 次を満たす $O \subset \Omega_{\boldsymbol{y}^{\pm 1}}$ が存在する:
(i) $\#O = \#\mathbb{R}$, (ii) 任意の $\preceq, \preceq' \in O$ に対し, $\preceq\upharpoonright_{M_{\boldsymbol{y}}} = \preceq'\upharpoonright_{M_{\boldsymbol{y}}}$.

本修士論文では次の結果も得た: [4] において “strongly compatible” という条件を満たさない $\Omega_{\boldsymbol{y}}$ の元の集合 $\mathcal{T}$ で, $\#\mathcal{T} = \#\mathbb{R}$ であるものが与えられた. 本修士論文では, 同じ性質を満たす $\mathcal{V} \subset \Omega_{\boldsymbol{y}}$ で, $\mathcal{T} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ となるものを独自に構成した.

参考文献

[1] S. Anderson, A. Smith, P. Stewart, M. Tesemma and J. Usatine, *A topological structure on certain initial algebras*, Topology and its Applications. **180** (2015), 199–208.

[2] M. Göbel, *A Constructive Description of SAGBI Bases for Polynomial Invariants of Permutation Groups*, J. Symb. Comput. **26** (1998), 261–272.

[3] S. Kuroda, *The infiniteness of the SAGBI bases for certain invariant rings*, Osaka J. Math. **39** (2002), no. 3, 665–680.

[4] T. Saito, M. Katsura, Y. Kobayashi and K. Kajitori, *On totally ordered free monoids*, In: Masami Ito (ed) “Words, Languages and Combinatorics”, World Scientific, (1992), 454–479.