学位論文要旨 (修士 (理学))

論文著者名　岡村 亮佑

論文題名　　　3 変数多項式環のあるパラメータ付き座標

本文

R を可換環とする. R 上の n 変数多項式環 $R[x_1, \ldots, x_n]$ を $R[\mathbf{x}]$ と表す. $n \leq 3$ のとき x_1, x_2, x_3 の代わりに x, y, z を用いる.

定義 1　$f \in R[\mathbf{x}]$ が $R[\mathbf{x}]$ の **座標** であるとは, $R[f, f_2, \ldots, f_n] = R[\mathbf{x}]$ を満たす $f_2, \ldots, f_n \in R[\mathbf{x}]$ が存在するときにいう. $R[\mathbf{x}]$ の座標全体の集合を $\mathrm{VA}_n(R)$ で表す.

座標は多項式環の研究において重要な概念である. 例えば Craighero [2] は以下の定理 2 を用いて Abhyankar 予想 [1] の否定的解決をした.
$I \neq R$ を R のイデアルとする. 自然な準同型 $R \to R/I$ の拡張 $R[\mathbf{x}] \to (R/I)[\mathbf{x}]$ を ϕ_I とかく. このとき $f \in \mathrm{VA}_n(R) \Rightarrow \phi_I(f) \in \mathrm{VA}_n(R/I)$ が成り立つ. $I = pR$ $(p \in R)$ のとき ϕ_I を ϕ_p とかく.

定理 2（Russell [4], Sathaye [5]）　R の非零因子 p と $Q \in R[y]$ に対し $F := px + Q(y)$ とする. このとき $F \in \mathrm{VA}_2(R) \iff \phi_p(F) \in \mathrm{VA}_2(R/pR)$ が成り立つ.

ところで K を R の全商環とすると

$$K[F, y] = K[px + Q(y), y] = K[x, y]$$

が成り立つ. ゆえに $F \in \mathrm{VA}_2(K)$ である. ただし, $R[F, y] = R[x, y]$ であるとは限らない. 一般に, $F \in \mathrm{VA}_n(K) \cap R[\mathbf{x}]$ が, いつ $F \in \mathrm{VA}_n(R)$ を満たすのかという問題を考えられる.　R の非零因子 p_1, p_2 と $Q_1 \in R[y]$, $Q_2 \in R[x]$ に対し $F := p_2 y + Q_2(p_1 x + Q_1(y))$ とする. このとき

$$K[F, p_1 x + Q_1(y)] = K[p_2 y, p_1 x + Q_1(y)] = K[x, y]$$

が成り立つ. ゆえに $F \in \mathrm{VA}_2(K)$ である.

定理 3（Edo [3]）　上の記号において次が成り立つ.
$F \in \mathrm{VA}_2(R) \iff \phi_{p_1}(F) \in \mathrm{VA}_2(R/p_1 R)$ かつ $\phi_{p_2}(F) \in \mathrm{VA}_2(R/p_2 R)$.

以下で本修士論文の主結果を述べる. k を標数 0 の体とし, $k[t]$ を k 上の 1 変数多項式環, $k[t^{\pm 1}]$ を k 上の 1 変数ローラン多項式環とする. $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ に対し, $k[t^{\pm 1}][x,y,z]$ の元 F, F_2, F_3 を

$$F_2 := y + t^c x^2,\ F_3 := z + t^b F_2^3,\ F := x + t^a F_3^2 = x + t^a(z + t^b(y + t^c x^2)^3)^2$$

で定義する. このとき,

$$k[t^{\pm 1}][F, F_2, F_3] = k[t^{\pm 1}][x, F_2, F_3] = k[t^{\pm 1}][x, F_2, z] = k[t^{\pm 1}][x, y, z]$$

が成り立つ. よって, $F \in \mathrm{VA}_3(k[t^{\pm 1}])$ である. 以下が本修士論文の主定理である.

定理 4 $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ は

$$F = x + t^a(z + t^b(y + t^c x^2)^3)^2 \in k[t][x,y,z]$$

を満たすとする. このとき以下は同値である.

(I) $F \notin \mathrm{VA}_3(k[t])$.
(II) $F|_{t=0} \notin \mathrm{VA}_3(k)$.
(III) $F|_{t=0} = x + x^{12}$.
(IV) $a > 0,\ a + 2b > 0,\ a + 2b + 6c = 0$.

なお, (IV) $\Rightarrow$ (III) $\Rightarrow$ (II) $\Rightarrow$ (I) は容易に示される. 本修士論文では微分形式の技法を用いて (I) $\Rightarrow$ (IV) を示した.

参考文献

[1] S. S. Abhyankar, On the semigroup of a meromorphic curve. I, in *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)*, 249–414, Kinokuniya Book Store, Tokyo. MR0578864

[2] P. C. Craighero, About Abhyankar's conjectures on space lines, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **74** (1985), 115–122.

[3] E. Edo, Coordinates of $R[x,y]$: constructions and classifications, Comm. Algebra **41** (2013), no. 12, 4694–4710.

[4] P. Russell, Simple birational extensions of two dimensional affine rational domains, Compositio Math. **33** (1976), no. 2, 197–208.

[5] A. Sathaye, On linear planes, Proc. Amer. Math. Soc. **56** (1976), 1–7.