# 学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名　小鳥　圭介

論文題名：$A_3$ 不変多項式のなす部分空間の
イニシャルベクトル空間の個数とオイラー関数

$k$ を任意標数の体，$k[\mathbf{x}] := k[x_1, \ldots, x_n]$ を $k$ 上の $n$ 変数多項式環とする．$\mathbb{Z}^n$ 上の全順序 $\preceq$ が任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$$\mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{c} \preceq \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

を満たすとき $\preceq$ は**加法的全順序**であるという．非負整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で表す．$(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ の最小元が $\mathbf{0}$ であるような加法的全順序を**単項式順序**という．

$\mathbb{Z}^n$ 上の加法的全順序全体の集合を $\Omega$ で表す．$\mathbb{Z}^n$ 上の単項式順序全体の集合を $\Omega_0$ で表す．

以下，$\preceq$ を加法的全順序とする．$(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ と単項式 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ を同一視する．

$0$ でない $f \in k[\mathbf{x}]$ に対して，$f$ に現れる単項式で $\preceq$ に関して最大のものを $f$ の**イニシャル単項式**といい，$\mathrm{in}_{\preceq}(f)$ で表す．また，$k[\mathbf{x}]$ の $k$ 部分ベクトル空間 $V$ に対して，単項式の集合 $\{\mathrm{in}_{\preceq}(f) \mid 0 \neq f \in V\}$ によって生成される $k$ ベクトル空間を $V$ の**イニシャルベクトル空間**といい，$\mathrm{in}_{\preceq}(V)$ で表す．特に $V = I$ が $k[\mathbf{x}]$ のイデアルの場合，$\mathrm{in}_{\preceq}(I)$ は $k[\mathbf{x}]$ のイデアルとなり $I$ の**イニシャルイデアル**と呼ばれる．イニシャルイデアルはグレブナ基底の理論に用いられ，よく研究されている．任意のイデアル $I$ に対して，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(I) \mid \preceq \in \Omega_0\}$ は有限集合であることが知られている (cf. [3])．

$k[\mathbf{x}] = \bigoplus_{l \geq 0} k[\mathbf{x}]_l$ を $k[\mathbf{x}]$ の標準的次数付けとする．ただし，各 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$k[\mathbf{x}]_l$ は $l$ 次斉次多項式により生成される $k$ ベクトル空間とする．$k[\mathbf{x}]$ のイデアル $I$ が $I = \bigoplus_{l \geq 0} (k[\mathbf{x}]_l \cap I)$ を満たすとき，$I$ は**斉次イデアル**であるという．$I$ が斉次イデアルならば，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(I) \mid \preceq \in \Omega\}$ は有限集合である (cf. [3])．

$A$ を $k[\mathbf{x}]$ の $k$ 部分代数とする．$A$ は $k[\mathbf{x}]$ の $k$ 部分ベクトル空間であるから，$\mathrm{in}_{\preceq}(A)$ が定義される．この場合は $\mathrm{in}_{\preceq}(A)$ は $k[\mathbf{x}]$ の $k$ 部分代数となる．イニシャルイデアルの類似として，$\mathrm{in}_{\preceq}(A)$ は $A$ の**イニシャル代数**と呼ばれる．

ヒルベルトの基底定理により任意のイデアル $I$ に対して，イデアル $\mathrm{in}_{\preceq}(I)$ は有限生成である．しかし，$k[\mathbf{x}]$ の $k$ 部分代数 $A$ に対して，$k$ 代数 $\mathrm{in}_{\preceq}(A)$ が有限生成であるとは限らない．

$G$ を $n$ 次対称群 $S_n$ の部分群とする．$G$ の $k[\mathbf{x}]$ への作用を

$$\sigma \cdot f := f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \ (\forall \sigma \in G, \forall f \in k[\mathbf{x}])$$

により定義したとき，$G$ に関する $k[\mathbf{x}]$ の不変式環

$$k[\mathbf{x}]^G := \{f \in k[\mathbf{x}] \mid \sigma \cdot f = f \ (\forall \sigma \in G)\}$$

は $k[\mathbf{x}]$ の**次数付き** $k$ **部分代数**である．すなわち，各 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$k[\mathbf{x}]_l^G := k[\mathbf{x}]^G \cap k[\mathbf{x}]_l$ とおくとき，$k[\mathbf{x}]^G = \bigoplus_{l \geq 0} k[\mathbf{x}]_l^G$ が成り立つ．例えば $k[\mathbf{x}]^{S_n}$ は $k$ 上の $x_1, \ldots, x_n$ の対称式全体の集合である．黒田により次が示された．

**定理 1 ([2], Proposition 3.3.)** $G$ が互換だけで生成される場合，任意の $\preceq \in \Omega$ に対して，$\preceq$ に関する $k[\mathbf{x}]^G$ のイニシャル代数は有限生成である．また，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(k[\mathbf{x}]^G) \mid \preceq \in \Omega\}$ の元の個数は $G$ の位数に等しい．

例えば，$\preceq$ が辞書式順序の場合は $\mathrm{in}_{\preceq}(k[\mathbf{x}]^{S_n}) = k[x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_2\ldots x_n]$ が成り立つ．

**定理 2 ([2], Theorem 2.2.)** $G$ が互換だけで生成されない場合，任意の $\preceq \in \Omega$ に対して，$\preceq$ に関する $k[\mathbf{x}]^G$ のイニシャル代数は有限生成でない．また，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(k[\mathbf{x}]^G) \mid \preceq \in \Omega\}$ は非可算集合である．

ただし，$\preceq$ が辞書式順序の場合の $\mathrm{in}_{\preceq}(k[\mathbf{x}]^G)$ の有限生成性に関する主張は Göbel[1] による．

任意の $N \geq 0$ に対して，$k$ ベクトル空間 $k[\mathbf{x}]^G_{\leq N} := \bigoplus_{l=0}^N k[\mathbf{x}]^G_l$ は有限次元であり，

$$\bigcup_{N\geq 0} k[\mathbf{x}]^G_{\leq N} = k[\mathbf{x}]^G$$

が成り立つ．一般に $k[\mathbf{x}]$ の $k$ 部分ベクトル空間 $V$ の次元が有限ならば $\{\mathrm{in}_{\preceq}(V) \mid \preceq \in \Omega\}$ は有限集合である．よって $\{\mathrm{in}_{\preceq}(k[\mathbf{x}]^G_{\leq N}) \mid \preceq \in \Omega\}$ は有限集合である．そこで，$G$ が互換だけで生成されない場合，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(k[\mathbf{x}]^G_{\leq N}) \mid \preceq \in \Omega\}$ の元の個数が $N$ を用いてどのように記述できるか考えた．特別な場合として $n = 3$，$G = A_3$ が 3 次交代群の場合に以下の結果を得た．

**主結果**　任意の $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\#\{\mathrm{in}_{\preceq}(k[\mathbf{x}]^{A_3}_{\leq N}) \mid \preceq \in \Omega\} = \begin{cases} 1 & (N = 0) \\ 3\sum_{l=1}^N \varphi(l) & (N \geq 1) \end{cases}$$

が成り立つ．ただし，$\varphi$ はオイラー関数とする．

# 参考文献


[1] M. Göbel, A constructive description of SAGBI bases for polynomial invariants of permutation groups, J. Symbolic Comput. **26** (1998), no. 3, 261–272. MR1633927

[2] S. Kuroda, The infiniteness of the SAGBI bases for certain invariant rings, Osaka J. Math. **39** (2002), no. 3, 665–680.

[3] N. Schwartz, Stability of Gröbner bases, J. Pure Appl. Algebra **53** (1988), no. 1-2, 171–186. MR0955616