学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名　西野　明穂

論文題名：　Stably tame exponential automorphisms of a polynomial ring

邦　　題：　多項式環の安定的順指数自己同型写像（英文）

R を $\mathbf{Q}$ 上の整域, $R[\boldsymbol{x}] := R[x_1, \ldots, x_n]$ を R 上の n 変数多項式環とする. $R[\boldsymbol{x}]$ の R 上の自己同型群 $\mathrm{Aut}_R\, R[\boldsymbol{x}]$ を考える. 自己同型は, 各変数の像によって決定される. 例えば, $1 \leq j \leq n$, x_j に依らない $p \in R[\boldsymbol{x}]$ に対し, $x_i \mapsto x_i \quad (i \neq j), x_i \mapsto x_i + p \quad (i = j)$ で定義される自己同型を基本自己同型と呼ぶ. また, $R[\boldsymbol{x}]$ の R 上の局所巾零微分, すなわち, 任意の $f \in R[\boldsymbol{x}]$ に対して $D^l(f) = 0$ を満たす $l \geq 0$ が存在するような $R[\boldsymbol{x}]$ の R 上の微分作用素に対し, 指数自己同型と呼ばれる $\mathrm{Aut}_R\, R[\boldsymbol{x}]$ の元 $\exp D$ が

$$(\exp D)(f) = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} D^l(f) \quad (f \in R[\boldsymbol{x}])$$

で定義される. R 上の可逆な線型変換から定まる自己同型全体と, 基本自己同型全体で生成される $\mathrm{Aut}_R\, R[\boldsymbol{x}]$ の部分群 $\mathrm{T}_R(R[\boldsymbol{x}])$ を順部分群といい, その元を順自己同型と呼ぶ.

Jung-van der Kulk の定理より, R が体ならば, $\mathrm{Aut}_R\, R[x_1, x_2]$ は順部分群に等しい. しかし, R が体でないとき, $\mathrm{Aut}_R\, R[x_1, x_2]$ は順でない自己同型を含む. 例えば, R の 0 でない非単元 t に対し, $\nu(x_1) = x_1 - 2x_2(tx_1 + x_2^2) + t(tx_1 + x_2^2)^2, \nu(x_2) = x_2 - t(tx_1 + x_2^2)$ により定義される自己同型 ν は順ではないことが知られている. $n = 2$ の場合, 自己同型が順かどうかを判定する方法は知られているが, $n \geq 3$ の場合はほとんど明らかになっていない.

$\varphi \in \mathrm{Aut}_R\, R[\boldsymbol{x}]$ と $m \geq 0$, 変数 $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ に対し, $\varphi^{[m]} \in \mathrm{Aut}_R\, R[x_1, \ldots, x_{n+m}]$ を $\varphi^{[m]}(x_i) = \varphi(x_i) \quad (1 \leq i \leq n)$, $\varphi^{[m]}(x_i) = x_i \quad (n+1 \leq i \leq n+m)$ で定義する. ある $m \geq 0$ に対し, $\varphi^{[m]}$ が順であるとき, φ は安定的順であるという. また, $R[\boldsymbol{x}]$ の R 上の局所巾零微分 D に対し, $R[x_1, \ldots, x_{n+m}]$ の R 上の局所巾零微分 $D^{[m]}$ が $D^{[m]}(x_i) = D(x_i) \quad (1 \leq i \leq n)$, $D^{[m]}(x_i) = 0 \quad (n+1 \leq i \leq n+m)$ より定まり, $\exp D^{[m]} = (\exp D)^{[m]}$ が成り立つ.

Smith [2] は, 三角と呼ばれる特殊な形の局所巾零微分 D と, $f \in \ker D$ に対し, $(\exp fD)^{[1]}$ が順であることを示した. これより, $\nu^{[1]}$ が順であることが従う. また, Berson-van den Essen-Wright [1] は, R が正則な場合, 任意の $R[x_1, x_2]$ の R 上の自己同型 φ に対し, ある $m \geq \max\{2 + \dim R, 3\}$ が存在して $\varphi^{[m]}$ が順であることを示した.

本論文では, 三角を含むより一般の種類の局所巾零微分 D に対し, $(\exp D)^{[1]}$ が順であることを証明した.

一般に, $(f_1,\ldots,f_{n-1})\in R[\boldsymbol{x}]^{n-1}$ に対し, $R[\boldsymbol{x}]$ の R 上の微分作用素 $D_{(f_1,\ldots,f_{n-1})}$ が

$$D_{(f_1,\ldots,f_{n-1})}(g)=\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-1},g)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\quad (g\in R[\boldsymbol{x}])$$

より定まる. さて, $1\le i\le n$, $a\in R\backslash\{0\}$, x_j に依らない $p\in R[\boldsymbol{x}]$ に対し, $x_i\mapsto x_i\quad (i\neq j)$, $x_i\mapsto ax_i+p\quad (i=j)$ として定義される $R[\boldsymbol{x}]$ の自己準同型を考える. このような形の $R[\boldsymbol{x}]$ の自己準同型の合成写像全体の集合を $\mathcal{E}(R[\boldsymbol{x}])$ と表す. 任意の $\varphi\in\mathcal{E}(R[\boldsymbol{x}])$ に対し, $\Delta_\varphi:=D_{(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_{n-1}))}$ は $R[\boldsymbol{x}]$ の R 上の局所巾零微分になる. 更に, 各 $f\in\ker\Delta_\varphi^{[1]}$ に対し, $f\Delta_\varphi^{[1]}$ も局所巾零である. このようにして, 様々な三角でない局所巾零微分を構成できる. 例えば, どのような変数変換でも三角にならない局所巾零微分も得られる.

次が本論文の主結果である.

定理　任意の $\varphi\in\mathcal{E}(R[\boldsymbol{x}])$ と $f\in\ker\Delta_\varphi^{[1]}$ に対し, $\exp f\Delta_\varphi^{[1]}$ は順である. 特に, $f\in\ker\Delta_\varphi$ に対し, $(\exp f\Delta_\varphi)^{[1]}$ は順となる.

Rentschler の定理より,$R[x_1,x_2]$ の R 上の任意の局所巾零微分 D に対し, $aD=f\Delta_\varphi$ となるような $\varphi\in\mathcal{E}(R[x_1,x_2])$, $f\in\ker\Delta_\varphi$, $a\in R\setminus\{0\}$ が存在する. よって, 主結果より次の系を得る.

系　$R[x_1,x_2]$ の R 上の任意の局所巾零微分 D に対し, $(\exp aD)^{[1]}$ が順となるような $a\in R\setminus\{0\}$ が存在する.

参考文献

[1] J. Berson, A. van den Essen, and D. Wright, *Stable tameness of two-dimensional polynomial automorphisms over a regular ring*, arXiv:math.AC/0707.3151v9.

[2] M. K. Smith, *Stably tame automorphisms*, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), no. 2, 209–212.