学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名　二宮　尚人

論文題名：2 次元のヤコビアン予想について

k を標数 0 の体, $k[x_1, \ldots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環とする.

予想. 多項式写像 $F \in k[x_1, \ldots, x_n]^n$ に対し, ヤコビアン $\det JF$ が k の単元ならば, $F \in \mathrm{Aut}_k k[x_1, \ldots, x_n]$ である.

この予想は, ヤコビアン予想と呼ばれ, $n = 1$ のとき予想は正しいが, $n \geq 2$ のときは未解決である.
本修士論文はヤコビアン予想に関するサーベイであり, 予想に関する先行研究について調べた.
$F = (f, g) \in k[x, y]^2$ が予想の仮定を満たすとき, 組 (f, g) をヤコビアンペアという. $k[x, y]$ の自己同型は, すべて順であることが知られており, 順でないヤコビアンペアが存在すれば, ヤコビアン予想の反例となる.
次数がそれぞれ i, j である斉次多項式のヤコビアンは, 0 または次数 $i + j - 2$ の斉次多項式となる. したがって, $\deg f \geq 2$ であるヤコビアンペア (f, g) に対し, f と g における次数が最大である斉次成分をそれぞれ f_i, g_j としたとき, (f_i, g_j) のヤコビアンは 0 でなければならない.
ここで, 任意の $h \in k[x, y]$ に対し, $d_f(h) = \det J(f, h)$ と定義すれば, d_f は $k[x, y]$ 上の導分である.
Nowicki は 2 変数多項式環上の導分について, 次を示した [1].

(1) d を, $k[x, y]$ 上の 0 でない k 導分とする. このとき, ある多項式 $p \in k[x, y]$ が存在して, $\ker(d) = k[p]$ である.

(2) 斉次多項式 $f \in k[x, y] \backslash k$ に対し, $f = ah^n$ となる斉次多項式 $h \in k[x, y]$ と $a \in k \backslash \{0\}$ が $n \geq 2$ において存在しないとする. このとき, $\ker(d_f) = k[f]$ である.

これらにより, ヤコビアンペア (f, g) に対し, ある斉次多項式 p が存在し, $\ker(d_{f_i}) = k[p]$ となり, f_i, g_j は, k の元と p の冪との積で表される. したがって任意のヤコビアンペアは, $a, b \in k$ と $i, j \geq 1$ を用いて $(ap^i + f_0, bp^j + g_0)$ と表される. ただし, $\deg p^i > \deg f_0, \deg p^j > \deg g_0$ である.
以上をふまえたヤコビアンペアの考察も行った.

参考文献

[1] Nowicki A., Polynomial derivations and their rings of constants, UMK, Torun, 1994.