猫 ねえ博士，多項式自己同型の「永田予想」って何ですか？

博士 やあ猫君，数学の勉強をしているのかい？感心だね．教えてあげよう．

猫 僕は猫だけど，大丈夫かな？

博士 もちろん！まず，多項式

$$f = x - 2(xz + y^2)y - (xz + y^2)^2 z, \qquad g = y + (xz + y^2)z$$

を見てみよう．変数 x, y, z についての多項式だね．

猫 $xz + y^2$ という式が，3 か所にでてきていますね．

博士 そう，特徴的な式だね．実は，f, g と z を使って，x と y を表せるんだけど，分かるかな？ $xz + y^2$ という式をうまく使うのが鍵だよ．

猫 ええと $\cdots$

博士 それじゃ，ヒントを出そう．

$$fz + g^2 = xz + y^2 \tag{1}$$

が成り立つことを，確認できるかな？

猫 まず，$f = x - 2(xz + y^2)y - (xz + y^2)^2 z$ に z を掛けて

$$fz = xz - 2(xz + y^2)yz - (xz + y^2)^2 z^2.$$

博士 そうだね．次に，$g = y + (xz + y^2)z$ を 2 乗すると

$$g^2 = y^2 + 2y(xz + y^2)z + (xz + y^2)^2 z^2.$$

これは，中学校で習う

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

という公式を利用すればいいね．$A = y, B = (xz + y^2)z$ だよ．

猫 fz と g^2 を足すと，確かに $xz + y^2$ しか残らない！

博士 だから (1) が成立するんだ．

猫 不思議な感じがするけれど，$xz+y^2$ は f, g と z を使って表せてしまうんですね．

博士 だから，f, g と z を使って表せる式を作るとき，$xz+y^2$ も使えるんだ．

猫 さらに，$g=y+(xz+y^2)z$ と z も使えるから，

$$g-(xz+y^2)z=y.$$

あ，できた！

博士 すると今度は，f, g, z, $xz+y^2$, y が使えるようになる．

猫 $f=x-2(xz+y^2)y-(xz+y^2)^2z$ の形をよく観察し，

$$f+2(xz+y^2)y+(xz+y^2)^2z=x$$

ですね．

博士 そう，よくできたね．このようにして，f, g と z を使い x と y を表せる．

猫 なるほどー．

博士 一般に，x, y, z についての 3 つの多項式の組

$$\bigl(f_1,\ f_2,\ f_3\bigr)$$

が**多項式自己同型**であるとは，f_1, f_2, f_3 を使って x, y, z を全て表せるときに言うんだよ．

猫 先ほどの例では，(f,g,z) は多項式自己同型ということになるんですね．z は使っていい式の中にもともとあるから．

博士 その通り．これは，数学者の永田雅宜氏が考えたので，「永田自己同型」と呼ばれているんだよ．

猫 でも，このような多項式自己同型をどうやって思いついたのか，僕には見当もつきません．多項式自己同型を作るのは，なんだか難しそうです．

博士 実は猫君，多項式自己同型にはとても簡単な作り方があるんだよ．まず，(f_1, f_2, f_3) が多項式自己同型なら，

$$\bigl(af_1 + p(f_2, f_3),\ f_2,\ f_3\bigr) \tag{2}$$

も多項式自己同型になるんだけど，分かるかな．ただし，a は 0 でない定数で，$p(f_2, f_3)$ は f_2 と f_3 で表せる多項式だよ．

猫 どうしてですか？

博士 f_2 と f_3 を使えば $p(f_2, f_3)$ を作れる．これを $af_1 + p(f_2, f_3)$ から引けば af_1 が残る．a は 0 でない定数だから，それを a^{-1} 倍して f_1 が得られる．

猫 $af_1 + p(f_2, f_3)$，f_2，f_3 を使って，f_1 を表せるということですね．

博士 そう．だから，$af_1 + p(f_2, f_3)$，f_2，f_3 から f_1，f_2，f_3 ができるわけだ．

猫 (f_1, f_2, f_3) はもともと多項式自己同型だったから，f_1，f_2，f_3 を使えば x, y, z を表せますね．

博士 だから結局，$af_1 + p(f_2, f_3)$，f_2，f_3 を使い，x, y, z を表せる．そういうわけで，(2) は多項式自己同型になるんだ．

猫 なるほどー．それなら博士，同様に

$$\bigl(f_1,\ bf_2 + q(f_1, f_3),\ f_3\bigr), \qquad \bigl(f_1,\ f_2,\ cf_3 + r(f_1, f_2)\bigr) \tag{3}$$

も多項式自己同型になりますね．もちろん，b や c は 0 でない定数で，$q(f_1, f_3)$ は f_1 と f_3 で表せる多項式，$r(f_1, f_2)$ は f_1 と f_2 で表せる多項式です．

博士 その通り．なかなか鋭いね．

猫 でも博士，(f_1, f_2, f_3) と，(2) や (3) の多項式自己同型の間に，大差はないですよね．このようなことを考えて，意味があるんですか？

博士 いい質問だね．「塵も積もれば山となる」という諺を知っているかい？

猫 はい．ごくわずかなものでも，数多く積み重なれば高大なものになるということのたとえですよね．

博士 その通り．(f_1, f_2, f_3) と (2) や (3) の形の多項式自己同型の間には，確かにあまり差がないかも知れない．けれど，このような小さな差も，積み重なればとても大きな差になり得るんだ．

猫 ふーん．

博士 試しに，最も簡単な多項式自己同型 (x, y, z) から出発して，ずいぶんと分かりにくい多項式自己同型を構成して見せよう．まず，

$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x + yz^3, y, z)$$

により，多項式自己同型 $(x + yz^3, y, z)$ を作る．今度は，この多項式自己同型から出発して，

$$(x + yz^3, y, z) \rightsquigarrow (x + yz^3, 2y + \underline{(x + yz^3)^3z^2 + z}, z)$$

としてみよう．下線部は，$x + yz^3$ と z で表せる多項式だ．同様に，

$$(x + yz^3, 2y + (x + yz^3)^3z^2 + z, z)$$
$$\rightsquigarrow \Big(x+yz^3,\ 2y+(x+yz^3)^3z^2+z, z-(x+yz^3)^2(2y+(x+yz^3)^3z^2+z)\Big)$$

のようにすることもできる．このようにして，次々に多項式自己同型を作っていくことができるんだ．

猫 手順は簡単だけど，作られる多項式自己同型はとても複雑になってしまいますね．

博士 (x, y, z) から出発して，このような手順で構成できる多項式自己同型は，**順**であるというんだ．英語では **tame**（テイム）だよ．

猫 “tame”というのは「飼いならされている」という意味ですね．“tame cat”は「飼い猫」ですから．

博士 猫君が質問した，多項式自己同型の**永田予想**というのは，「永田自己同型 (f, g, z) は順でない」という予想なんだよ．

猫 (x, y, z) から出発して，上の手順で (f, g, z) にたどり着けないだろうということですね．

博士 逆に，(f, g, z) から出発して，(x, y, z) にたどり着けないといってもいい．

猫 難しいんですか？

博士 非常に！どのようにしても，絶対にできないことを言わなければならないから，数学では不可能性の証明は難しいことが多いんだよ．

猫 5 次方程式が代数的に解けないことの話は有名ですね．

博士 永田予想は 1970 年頃に公表され，広く知られていたけれど，なかなか解決しなかった．しかし，2003 年に I. Shestakov 氏と U. Umirbaev 氏の共同研究によって，ついに永田自己同型が順でないことが証明されたんだ．

猫 解決まで 30 年もかかったんですね．

博士 順でない自己同型の存在が証明されたのも，これが初めてだったんだ．そういう意味でも，とても画期的な進展だったんだよ．この業績で，2 人はアメリカ数学界から受賞したし，Umirbaev 氏は祖国のカザフスタンからも受賞したんだ．

猫 どうやって解いたんですか？

博士 証明は，長くて複雑で難しい．僕も論文を読み終えた時，よく最後まで理論を完成させたものだと脱帽したよ．

猫 確かに，f と g の式をいくら眺めてみても，どうしたらいい

のか全然わかりません.

博士 猫君，まさにその通りなんだよ！永田予想が解けたのは，永田自己同型を詳しく調べたからじゃないんだ.

猫 へえ？

博士 実は，Shestakov 氏と Umirbaev 氏は，順な多項式自己同型を徹底的に分析して，順な多項式自己同型が必ず持つ特徴を見つけることに成功したんだ.

猫 その特徴を，永田自己同型が持っていなかったというわけですか？

博士 その通り．でも，それを確かめること自体は全然難しくないんだよ．難しいのは，彼らの理論の証明の方なんだ.

猫 ふーん.

博士 最近，僕がShestakov-Umirbaev 理論の改良版を作ったんだけど，とても丁寧に書いてあるから，少し準備をすれば猫君でも読破できると思うよ.

猫 本当ですか？とても興味があります．ぜひ，また教えてください！

参考文献

[1] S. Kuroda, A generalization of the Shestakov-Umirbaev inequality, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), 495–510.

[2] S. Kuroda, Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism, Tohoku Math. J. **62** (2010), 75–115.

[3] I. Shestakov and U. Umirbaev, Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 181–196.

[4] I. Shestakov and U. Umirbaev, The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 197–227.