学位論文要旨 (修士 (理学))

論文著者名　黒田　基紀

論文題名：正標数の体上の多項式環の安定ダークセン自己同型

本修士論文では多項式環の自己同型について考える．k を体，$k[x_1,\dots,x_n]$ を n 変数多項式環とする．そして $k[x_1,\dots,x_n]$ の k 自己同型全体を $\mathrm{GA}_n(k)$ とおく．$\mathrm{GA}_n(k)$ の任意の元 F を $(F(x_1),\dots,F(x_n))$ と同一視して考える．そして $(x_1,\dots,ax_i+f,\dots,x_n)$ の形の自己同型を基本自己同型という．ただし i は 1 以上 n 以下の整数，a は k の可逆元，f は $k[x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n]$ の元とする．そして各成分が一次式の自己同型をアフィン自己同型といい，アフィン自己同型全体のなす群をアフィン部分群とよび $\mathrm{Aff}_n(k)$ とおく．またアフィン自己同型と基本自己同型全体で生成される $\mathrm{GA}_n(k)$ の部分群を順部分群といい $\mathrm{T}_n(k)$ とおく．$\mathrm{Aff}_n(k)$ は $\mathrm{T}_n(k)$ に含まれる．

順部分群の生成系に関する以下の Derksen [1] の定理がある．

定理 1（Derksen）　体 k の標数が 0 のとき $\mathrm{T}_n(k)=\langle \mathrm{Aff}_n(k),(x_1+x_2^2,x_2,\dots,x_n)\rangle$．

しかし一方で Maubach-Willems [2] は $k=\mathbb{F}_2$ のとき Derksen の定理が成り立たないことを証明し，さらに q を素数べきとしたとき $\mathrm{T}_n(\mathbb{F}_q)=\langle \mathrm{Aff}_n(\mathbb{F}_q),\mathcal{E}\rangle$ となる $\mathrm{GA}_n(k)$ の有限部分集合 $\mathcal{E}$ は存在していないと予想している．このように Derksen の定理を体 k の標数が正の場合に考えるのは難しい．そこで安定ダークセン自己同型というものを定義する．その前にまずダークセン自己同型というものを定義する．

定義 2　$\mathrm{T}_n(k)$ の元 F がダークセン自己同型であるとは $\mathrm{T}_n(k)=\langle \mathrm{Aff}_n(k),F\rangle$ が成り立つときいう．

$\mathrm{T}_n(k)$ の元 F を $\mathrm{T}_{n+1}(k)$ の元 (F,x_{n+1}) と同一視することで $\mathrm{T}_n(k)\subset \mathrm{T}_{n+1}(k)$ とみなす．

定義 3　$\mathrm{T}_n(k)$ の元 F が安定ダークセン自己同型であるとは $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k),(F,x_{n+1})\rangle$ が $\mathrm{T}_n(k)$ を含むときいう．

体 k の標数が正のときはダークセン自己同型が存在するか不明なので本修士論文ではどのような基本自己同型が安定ダークセン自己同型となるかについて調べた．その結果以下の定理が分かった．

定理 4　$n \geq 3$ で任意の体 k，任意の整数 $3 \leq l \leq n$ に対して基本自己同型

$$(x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \ldots, x_n)$$

は安定ダークセン自己同型である．

定理 5　$n \geq 3$ で体 k の標数が 2 でないとき基本自己同型 $(x_1 + x_2^2, x_2, \ldots, x_n)$ は安定ダークセン自己同型である．

そして最後に首都大学東京の黒田茂氏から定理 4，定理 5 を次のように一般化できることを指摘された．以下 k の標数を正とし p とおく．

定義 6　非負整数 $t_2, \ldots, t_n$ に対して単項式 $x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}$ が good monomial であるとは次の条件 (1), (2) のうちいずれかを満たすときいう．
(1) ある i が存在して $t_i \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$ を満たす．
(2) ある異なる i, j が存在して $t_i, t_j \equiv 1 \pmod{p}$ を満たす．

定理 7　$k[x_2. \ldots, x_n]$ の元 f が任意の i に対して $\deg_{x_i} f \leq \#k - 2$ を満たすとする．そのとき $(x_1 + f, x_2, \ldots, x_n)$ が安定ダークセン自己同型であることは f に少なくとも一つの good monomial が現れることの必要十分条件である．

参考文献

[1] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics, Vol. 190, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2000.

[2] S. Maubach and R. Willems, Polynomial automorphisms over finite fields: mimicking tame maps by the Derksen group, Serdica Math. J. **37** (2011), no. 4, 305-322 (2012).