講義の概要

次の定理は，アビヤンカー (S. S. Abhyankar) とモー (T. T. Moh) によって 1975 年に与えられた．

定理 1 (アビヤンカー・モー [1]) f, g を変数 x の 0 でない多項式とする．f, g を用いて x を表せるならば，$\deg f$ が $\deg g$ を割り切るか，$\deg g$ が $\deg f$ を割り切る．

例えば，多項式

$$f = x^3 + x, \quad g = x^6 + 2x^4 - x^3 + x^2$$

を使うと，$x = g - f^2 + f$ のように x を表せる．このとき，確かに $\deg f = 3$ は $\deg g = 6$ を割り切る．

この講義では，多項式環論における諸問題を概観しつつ，定理 1（より正確には定理 1.1）を仮定し，いくつかの古典的な定理を証明する．

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

1　多項式自己同型

k を標数 0 の体，n を自然数とする．k として，例えば $\mathbf{Q}$ や $\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ などを念頭におけばよい．k 上の n 変数多項式環を

$$k[\mathbf{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$$

で表す．可換環 R が**可換 k 代数**であるとは，k が R の部分環であるときにいう．このとき，R は k ベクトル空間の構造を持つ．例えば，$k[\mathbf{x}]$ は可換 k 代数である．本稿では可換な環しか扱わないので，以下では可換 k 代数を単に k 代数と呼ぶ．

R を k 代数とする．R の元の n 項組

$$F = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$$

に対し，代入写像

$$k[\mathbf{x}] \ni p(x_1, \ldots, x_n) \mapsto p(a_1, \ldots, a_n) \in R$$

を考える．この写像を同じ記号 F で表し, R の元の組と同一視する．例えば, $F = (a_1, a_2)$ に対し $F(x_1 + x_2^2) = a_1 + a_2^2$ である．代入写像 F の像は，$a_1, \ldots, a_n$ で生成される R の k 部分代数

$$k[a_1, \ldots, a_n] = \{p(a_1, \ldots, a_n) \mid p \in k[\mathbf{x}]\}$$

と等しい．

始めに述べたアビヤンカー・モーの定理は，より正確に次のように定式化される．この定理は**全射定理** (Epimorphism Theorem) と呼ばれる．

定理 1.1 (全射定理) $k[x]$ を k 上の 1 変数多項式環とする．$f, g \in k[x] \setminus \{0\}$ が $k[f,g] = k[x]$ を満たすとき，$\deg f$ が $\deg g$ を割り切るか，$\deg g$ が $\deg f$ を割り切る．

$f, g \in k[x]$ が $k[f,g] = k[x]$ を満たすという条件は，代入写像

$$(f,g) : k[x_1, x_2] \to k[x]$$

が全射であるという条件と同値である．

なお，体 k の標数が正のとき，定理 1.1 と同様の主張は一般に成り立たない．例えば，k の標数が 2 のとき，$f = x^6 + x$, $g = x^4$ に対し

$$(f^2 + g^3)g + f = \big((x^{12} + x^2) + (x^4)^3\big)x^4 + (x^6 + x) = x$$

が成り立つ．この場合，$k[f,g] = k[x]$ は満たされるが，$\deg f = 6$ は $\deg g = 4$ を割り切らず，$\deg g = 4$ も $\deg f = 6$ を割り切らない．

$R = k[\mathbf{x}]$ の場合を考える．$k[\mathbf{x}]$ の元の n 項組

$$F = (f_1, \ldots, f_n), \qquad G = (g_1, \ldots, g_n)$$

に対し，合成写像

$$F \circ G : k[\mathbf{x}] \xrightarrow{G} k[\mathbf{x}] \xrightarrow{F} k[\mathbf{x}]$$

が定義される．このとき，

$$F \circ G = (F(g_1), \ldots, F(g_n)) = (g_1(f_1, \ldots, f_n), \ldots, g_n(f_1, \ldots, f_n)) \tag{1.1}$$

となる．

定義 1.2 $F = (f_1, \ldots, f_n)$ が $k[\mathbf{x}]$ の k 上の**自己同型** (automorphism) であるとは，

$$k[f_1, \ldots, f_n] = k[\mathbf{x}]$$

が成り立つときにいう．これは，$F : k[\mathbf{x}] \to k[\mathbf{x}]$ が全射であることと同値である．

以下，k 上の自己同型を単に自己同型と呼ぶ．二つの全射の合成写像は全射なので，F_1, F_2 が $k[\mathbf{x}]$ の自己同型ならば，$F_1 \circ F_2$ も $k[\mathbf{x}]$ の自己同型である．よって，

$$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] := \{k[\mathbf{x}] \text{ の自己同型 }\}$$

に演算 $(F,G)\mapsto F\circ G$ が定義される．写像の合成なので，この演算は結合法則を満たす．

$$\mathrm{id}_{k[\mathbf{x}]}=(x_1,\ldots,x_n)$$

が $\mathrm{Aut}_k\,k[\mathbf{x}]$ の単位元である．よって，$\mathrm{Aut}_k\,k[\mathbf{x}]$ はモノイドである．

F を $k[\mathbf{x}]$ の自己同型とする．$F:k[\mathbf{x}]\to k[\mathbf{x}]$ が全射なので，$i=1,\ldots,n$ に対し，ある $g_i\in k[\mathbf{x}]$ が存在し，$F(g_i)=x_i$ を満たす．$G=(g_1,\ldots,g_n)$ とおくと，(1.1) より

$$F\circ G=(x_1,\ldots,x_n)=\mathrm{id}_{k[\mathbf{x}]}$$

が成り立つ．

定理 1.3 F を $k[\mathbf{x}]$ の自己同型とする．このとき，$F:k[\mathbf{x}]\to k[\mathbf{x}]$ は全単射である．F の逆写像は，上で構成した G で与えられる．

定理 1.3 は ‘ 超越次数 ’ に関する議論によって証明される．この定理より，モノイド $\mathrm{Aut}_k\,k[\mathbf{x}]$ が群であることが分かる．$\mathrm{Aut}_k\,k[\mathbf{x}]$ を $k[\mathbf{x}]$ の**自己同型群** (automorphism group) と呼ぶ．

$k[\mathbf{x}]$ の自己同型の例を挙げる．

例 1.4 (基本自己同型) $1\le l\le n$, $a\in k^\times$, $p\in k[x_1,\ldots,x_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_n]$ に対し，

$$E=(x_1,\ldots,x_{l-1},ax_l+p,x_{l+1},\ldots,x_n)$$

は $k[\mathbf{x}]$ の自己同型である．この形の自己同型を**基本自己同型** (elementary automorphism) と呼ぶ．$E(p)=p$ に注意し，E の逆写像が

$$E^{-1}=(x_1,\ldots,x_{l-1},a^{-1}(x_l-p),x_{l+1},\ldots,x_n)$$

であることが確かめられる．よって，基本自己同型の逆写像は基本自己同型である．

なお，$a=1$ の場合を基本自己同型と呼ぶこともある．

例 1.5 (アフィン自己同型) $A\in GL(n,k)$ と $b_1,\ldots,b_n\in k$ に対し，

$$F=(x_1,\ldots,x_n)A+(b_1,\ldots,b_n)$$

は $k[\mathbf{x}]$ の自己同型である．この形の自己同型を**アフィン自己同型** (affine automorphism) と呼ぶ．F の逆写像は

$$F^{-1}=(x_1-b_1,\ldots,x_n-b_n)A^{-1}=(x_1,\ldots,x_n)A^{-1}-(b_1,\ldots,b_n)A^{-1}$$

で与えられる．よって，アフィン自己同型の逆写像はアフィン自己同型である．

定義 1.6 $k[\mathbf{x}]$ の自己同型 F が**順** (tame) であるとは，F が $k[\mathbf{x}]$ の基本自己同型の合成写像であるときにいう．$k[\mathbf{x}]$ の自己同型は，順でないとき**野生** (wild) であるという．

$k[\mathbf{x}]$ の順自己同型全体の集合を $\mathrm{T}(n,k)$ で表す．次の命題が成り立つので，$\mathrm{T}(n,k)$ を $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の**順部分群** (tame subgroup) と呼ぶ.

命題 1.7 $\mathrm{T}(n,k)$ は $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の部分群である.

（証明）恒等写像 $(x_1,\ldots,x_n)$ が $\mathrm{T}(n,k)$ に属するので，$\mathrm{T}(n,k)$ は空でない．任意の $F, F' \in \mathrm{T}(n,k)$ に対し，$F = E_1 \circ \cdots \circ E_r$, $F' = E'_1 \circ \cdots \circ E'_{r'}$ を満たす $k[\mathbf{x}]$ の基本自己同型 $E_1,\ldots,E_r$, $E'_1,\ldots,E'_{r'}$ が存在する．このとき，

$$F^{-1} \circ F = (E_1 \circ \cdots \circ E_r)^{-1} \circ (E'_1 \circ \cdots \circ E'_{r'}) = E_r^{-1} \circ \cdots \circ E_1^{-1} \circ E'_1 \circ \cdots \circ E'_{r'}$$

となる．$E_1^{-1},\ldots,E_r^{-1}$ は $k[\mathbf{x}]$ の基本自己同型なので，$F^{-1} \circ F$ は $\mathrm{T}(n,k)$ に属する．□

ところで，$F = (f_1,\ldots,f_n)$ に例 1.4 の E を右から掛けると，

$$F \circ E = (f_1,\ldots,f_{l-1}, af_l + p(f_1,\ldots,f_{l-1},f_{l+1},\ldots,f_n), f_{l+1},\ldots,f_n)$$

のようになる．$k[\mathbf{x}]$ の自己同型が順であるとは，$(x_1,\ldots,x_n)$ から出発し，

$$(f_1,\ldots,f_n) \rightsquigarrow (f_1,\ldots,f_{l-1}, af_l + p(f_1,\ldots,f_{l-1},f_{l+1},\ldots,f_n), f_{l+1},\ldots,f_n)$$

の形の変形を有限回繰り返して構成できることに他ならない．もちろん，このような変形を繰り返して，$(x_1,\ldots,x_n)$ にたどり着けることとも同じである．

例えば，$n=2$ のとき (x_2,x_1) は順である．実際，

$$\begin{aligned}(x_1,x_2) &\rightsquigarrow (x_1-x_2,x_2) \rightsquigarrow (x_1-x_2, x_2+(x_1-x_2)) = (x_1-x_2,x_1)\\ &\rightsquigarrow (-(x_1-x_2)+x_1, x_1) = (x_2,x_1)\end{aligned}$$

である.

命題 1.8 アフィン自己同型は順である.

（証明）例 1.5 のように表された F を考える．このとき，

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_n) &\rightsquigarrow (x_1-b_1,x_2,\ldots,x_n) \rightsquigarrow (x_1-b_1,x_2-b_2,x_3,\ldots,x_n)\\ &\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (x_1-b_1,\ldots,x_n-b_n)\end{aligned}$$

だから，$G := (x_1-b_1,\ldots,x_n-b_n)$ は順である．よって，F を $F \circ G$ に替えることで，$b_1 = \cdots = b_n = 0$ であると仮定してよい．A は正則行列なので，‘ ある列の定数倍を別の

行に加える ’ という操作や, ‘ ある列を 0 でない定数倍する ’ という操作を繰り返して，単位行列 I_n に変形できる．このような変形の列を

$$A = A_1 \rightsquigarrow A_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow A_r = I_n$$

とし，1 次式の n 項組の変形の列

$$F = (x_1, \ldots, x_n)A_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (x_1, \ldots, x_n)A_r = \mathrm{id}_{k[\mathbf{x}]}$$

を考える．これは, ‘ ある成分の定数倍を別の成分に加える ’ という操作や ‘ ある成分を 0 でない定数倍する ’ という操作による変形の列なので，F は順である． □

次は，多項式環に関する著名な問題の一つである．

問題 1.9 (Tame Generators Problem) $k[\mathbf{x}]$ の全ての自己同型は順であるか？

言い換えれば，これは $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \mathrm{T}(n, k)$ が成り立つかどうかを問う問題である．

$n = 1$ の場合，次の定理から $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \mathrm{T}(1, k)$ であることが従う．

定理 1.10 $R[x]$ を整域 R 上の 1 変数多項式環とする．$f \in R[x]$ に対し，次の 2 条件は同値である：

(i) $R[f] = R[x]$ が成り立つ．

(ii) $f = ax + b$ を満たす $a \in R^{\times}$ と $b \in R$ が存在する．

（証明）(ii) が満たされるとき，$x = a^{-1}(f - b)$ が $R[f]$ に属するので，$R[x]$ は $R[f]$ に含まれる．明らかに，$R[f]$ は $R[x]$ に含まれる．よって，$R[f] = R[x]$ が成り立つ．

(i) が満たされるとき，x は $R[f]$ に属するので，

$$x = b_0 + b_1 f + b_2 f^2 + \cdots + b_r f^r \qquad (r \geq 0,\ b_0, \ldots, b_r \in R,\ b_r \neq 0) \tag{1.2}$$

と書ける．左辺は R に属さないので，$r \geq 1$, $\deg f \geq 1$ である．従って，

$$0 < \deg f < 2 \deg f < \cdots < r \deg f$$

となる．R は整域なので，$i = 0, \ldots, r$ に対して $\deg f^i = i \deg f$ が成り立つ．よって，$\deg f^0 < \deg f < \deg f^2 < \cdots < \deg f^r$ である．$b_r \neq 0$ なので，(1.2) の右辺の次数は $r \deg f$ である．(1.2) の左辺の次数は 1 だから，$r = \deg f = 1$ であることが分かる．よって，$f = a_0 + a_1 x$ ($a_0, a_1 \in R$, $a_1 \neq 0$) と表される．$r = 1$ なので，(1.2) より $x = b_0 + b_1(a_0 + a_1 x)$ が従う．この等式の両辺の x の係数を比べ，$b_1 a_1 = 1$ を得る．よって，a_1 は R の可逆元である． □

問 1.11 $a \in k^\times$, $b \in k$, $f \in k[x_1, x_2]$ は $k[f, ax_2 + b] = k[x_1, x_2]$ を満たすとする．このとき，$f = cx_1 + p$ を満たす $c \in k^\times$, $p \in k[x_2]$ が存在することを示しなさい．

（解答）$R = k[x_2]$ とすると，

$$R[f] = k[f, x_2] = k[f, ax_2 + b] = k[x_1, x_2] = R[x_1]$$

が成り立つ．よって，定理 1.10 より $f = cx_1 + p$ を満たす $c \in R^\times = k^\times$, $p \in R = k[x_2]$ が存在する． □

次の定理は，ユング (H. W. E. Jung) によって 1942 年に与えられた．

定理 1.12 (ユング [5]) $n = 2$ のとき $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \mathrm{T}(2, k)$ である．

$n = 3$ のとき，$F = (f_1, f_2, f_3)$ を

$$f_1 = x_1 - 2(x_1x_3 + x_2^2)x_2 - (x_1x_3 + x_2^2)^2x_3, \quad f_2 = x_2 + (x_1x_3 + x_2^2)x_3, \quad f_3 = x_3$$

で定義する．このとき，F が $k[\mathbf{x}]$ の自己同型であることを確かめる．

$$\begin{aligned} f_1f_3 + f_2^2 &= \underline{x_1x_3} - 2(x_1x_3 + x_2^2)x_2x_3 - (x_1x_3 + x_2^2)^2x_3^2 \\ &\quad + \Big(\underline{x_2} + (x_1x_3 + x_2^2)x_3\Big)^2 \\ &= x_1x_3 + x_2^2 \end{aligned}$$

だから，$x_1x_3 + x_2^2$ は $k[f_1, f_2, f_3]$ に属する．よって，

$$x_2 = f_2 - (x_1x_3 + x_2^2)x_3 = f_2 - (x_1x_3 + x_2^2)f_3$$

も $k[f_1, f_2, f_3]$ に属する．すると，

$$x_1 = f_1 + 2(x_1x_3 + x_2^2)x_2 + (x_1x_3 + x_2^2)^2f_3$$

も $k[f_1, f_2, f_3]$ に属する．従って，$k[f_1, f_2, f_3] = k[x_1, x_2, x_3]$ が成り立つ．

1972 年に出版された著書 [10] の中で，永田雅宜は $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] \neq \mathrm{T}(3, k)$ であると予想し，反例の候補としてこの自己同型を与えた．この予想は広く知られていたが，長い間進展がなかった．しかし，2004 年にシェスタコフ (I. P. Shestakov) とウミルバエフ (U. U. Umirbaev) は，F の野生性の証明についに成功した ([13])．こうして，永田予想は 30 年の歳月を経て肯定的に決着した．

$n \geq 4$ のとき，問題 1.9 は未解決である．一般に，$f_1, \ldots, f_n \in k[\mathbf{x}]$ と $m \in \mathbf{N}$ に対し

$$\begin{aligned} &k[f_1, \ldots, f_n] = k[x_1, \ldots, x_n] \\ &\qquad \Longrightarrow k[f_1, \ldots, f_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}] = k[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}] \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$F = (f_1, \ldots, f_n)$ が $k[\mathbf{x}]$ の自己同型ならば，

$$\tilde{F} = (f_1, \ldots, f_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \tag{1.3}$$

は $k[x_1, \ldots, x_{m+n}]$ の自己同型である．このとき，F が野生でも，$\tilde{F}$ は野生であるとは限らない．実は，上述の永田の自己同型 $F = (f_1, f_2, f_3)$ に対し，$\tilde{F} = (f_1, f_2, f_3, x_4)$ は順である ([14])．次の予想は広く信じられている．

予想 1.13 (Stable Tameness Conjecture) 任意の $F \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に対し，$m \in \mathbf{N}$ を十分大きくとれば，(1.3) のように定めた自己同型は順である．

次に，$m \leq n$ とし，$k[\mathbf{x}]$ とは別に k 上の m 変数多項式環

$$k[\mathbf{y}] = k[y_1, \ldots, y_m]$$

を用意する．n 項組

$$G = (g_1, \ldots, g_n) \in (k[\mathbf{y}])^n$$

で，代入写像 $G : k[\mathbf{x}] \to k[\mathbf{y}]$ が全射であるものを考える．すなわち，G は

$$k[g_1, \ldots, g_n] = k[\mathbf{y}]$$

を満たすとする．例えば，

$$Y := (y_1, \ldots, y_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m})$$

は全射である．$F = (f_1, \ldots, f_n) \in (k[\mathbf{x}])^n$ に対し，合成写像

$$G \circ F : k[\mathbf{x}] \xrightarrow{F} k[\mathbf{x}] \xrightarrow{G} k[\mathbf{y}]$$

を考える．この代入写像は，多項式の組としては

$$G \circ F = (G(f_1), \ldots, G(f_n)) \in (k[\mathbf{y}])^n$$

である．

定義 1.14 G が **rectifiable**（「矯正可能」の意味）であるとは，$G \circ F = Y$ を満たす $F \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ が存在するときにいう．

なお，G は rectifiable ならば常に全射である．実際，Y は全射で，F^{-1} は全単射なので，$G = Y \circ F^{-1}$ は全射である．

次の問題も，多項式環に関する著名な問題の一つである．

問題 1.15 全射代入写像 $G : k[\mathbf{x}] \to k[\mathbf{y}]$ はいつ rectifiable であるか？

次の定理は，1970 年代に，アビヤンカー・モーと鈴木昌和により独立に証明された．

定理 1.16 (アビヤンカー・モー [1]，鈴木 [15]) $(m, n) = (1, 2)$ のとき，任意の全射代入写像 $k[\mathbf{x}] \to k[\mathbf{y}]$ は rectifiable である．

それ以外に，$n \geq 2m + 2$ ならば肯定的であることが知られている．$k = \mathbf{C}$ の場合に反例は見つかっていない．$(m, n) = (1, 3)$ のとき，

$$G = (y^3 - 3y, y^4 - 4y^2, y^5 - 10y) : k[x_1, x_2, x_3] \to k[y]$$

に対し

$$G(x_2x_3 - x_1^3 - 5x_1x_2 + 2x_3 - 7x_1) = y$$

が成り立つ．よって，G は全射である．$k = \mathbf{R}$ のとき，G は rectifiable でないことがシャストリ (A. R. Shastri) [12] により示された．$k = \mathbf{C}$ のとき，この G が rectifiable であるかどうか知られていない．

さて，R, S を k 代数，$\phi : R \to S$ を環の準同型とする．ϕ が k 線形写像であるとき，ϕ を k **準同型**と呼ぶ．さらに，ϕ が全単射であるとき，ϕ を k **同型**と呼ぶ．このとき，逆写像 $\phi^{-1} : S \to R$ も k 同型になる．k 同型 $R \to S$ が存在するとき，R と S は k **同型**であるといい，$R \simeq S$ と表す．

$\phi : R \to S$ が k 準同型であるとき，任意の $a \in k$ に対し

$$\phi(a) = \phi(a \cdot 1) = a\phi(1) = a \cdot 1 = a$$

が成り立つ．各 $F \in R^n$ に対し，代入写像 $F : k[\mathbf{x}] \to R$ は k 準同型である．逆に，k 準同型 $\phi : k[\mathbf{x}] \to R$ は

$$\phi\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} \phi(x_1)^{i_1} \cdots \phi(x_n)^{i_n} \qquad (a_{i_1,\ldots,i_n} \in k)$$

を満たすので，n 項組 $(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) \in R^n$ から定まる代入写像と等しい．

ところで，k 上の $n+1$ 変数多項式環 $k[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ は，$k[\mathbf{x}]$ 上の 1 変数多項式環 $k[\mathbf{x}][x_{n+1}]$ として定義される．よって，k 代数 R と $k[\mathbf{x}]$ が k 同型ならば，R 上の 1 変数多項式環 $R[z]$ と $k[\mathbf{x}][x_{n+1}]=k[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ は k 同型である．

次の問題は，この明白な事実の逆を問うている．この問題も，多項式環に関する著名な問題の一つである．

問題 1.17 (消去問題) k 代数 R に対し，$R[z]$ と $k[\mathbf{x}][x_{n+1}]$ が k 同型であるとき，R と $k[\mathbf{x}]$ は常に k 同型か？

なお，$R[z]$ と $k[\mathbf{x}][x_{n+1}]$ が k 同型であることと，

$$(b_1,\ldots,b_{n+1}) : k[x_1,\ldots,x_{n+1}] \to R[z]$$

が全単射であるような $b_1,\ldots,b_{n+1}\in R[z]$ が存在することは同値である．同様に，R と $k[\mathbf{x}]$ が k 同型であることと，$(a_1,\ldots,a_n) : k[x_1,\ldots,x_n] \to R$ が全単射であるような $a_1,\ldots,a_n\in R$ が存在することは同値である．

実は，問題 1.17 は次の問題と同値である．

問題 1.18 k 代数 R に対し，$R[z]$ と $k[\mathbf{x}][x_{n+1}]$ が k 同型であるとき，$R=k[a_1,\ldots,a_n]$ を満たす $a_1,\ldots,a_n\in R$ は常に存在するか？

次の命題は ‘ 局所冪零導分 ’ の概念を用いて証明される．

命題 1.19 k 代数 R に対し，$R[z]$ と $k[\mathbf{x}][x_{n+1}]$ が k 同型ならば，$R=k[a_1,\ldots,a_{n+1}]$ を満たす $a_1,\ldots,a_{n+1}\in R$ が存在する．

次の定理は，後で述べる定理 3.11 から従う．

定理 1.20 $n=1$ のとき，消去問題の解は肯定的である．

$n=2$ の場合は，日本人数学者の努力により 1980 年頃に解決した．

定理 1.21 (宮西・杉江 [9]，藤田 [4]) $n=2$ のとき，消去問題の解は肯定的である．

消去問題に対する反例は見つかっておらず，$n\geq 3$ の場合は未解決である．

2　座標

定義 2.1 $f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[\mathbf{x}]$ の k 上の**座標** (coordinate) であるとは,

$$k[f, f_2, \ldots, f_n] = k[\mathbf{x}] \tag{2.1}$$

を満たす $f_2, \ldots, f_n \in k[\mathbf{x}]$ が存在するときにいう.

$f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[\mathbf{x}]$ の k 上の座標であることと, $F(x_1) = f$ を満たす $F \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ が存在することは同値である.

定義 2.2 $f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[\mathbf{x}]$ の k 上の**安定座標** (stable coordinate) であるとは, f が $k[\mathbf{x}][x_{n+1}]$ の k 上の座標であるときにいう.

以下では簡単のため, k 上の座標や k 上の安定座標を, それぞれ単に座標, 安定座標と呼ぶ.

f が $k[\mathbf{x}]$ の座標ならば, (2.1) を満たす $f_2, \ldots, f_n \in k[\mathbf{x}]$ が存在する. このとき,

$$k[f, f_2, \ldots, f_n, x_{n+1}] = k[\mathbf{x}][x_{n+1}]$$

が成り立つ. よって, f は $k[\mathbf{x}]$ の安定座標である. しかし, $k[\mathbf{x}]$ の安定座標が, 常に $k[\mathbf{x}]$ の座標であるかどうか一般に分からない. これに関し, 次の予想がある.

予想 2.3 (Stable Coordinate Conjecture) $k[\mathbf{x}]$ の安定座標は, $k[\mathbf{x}]$ の座標である.

$n \leq 3$ のとき, 予想は正しいことが知られている ([8, Section 6], $n = 1$, $n = 2$ の場合は講義で扱う).

3　導分

上で論じてきたような問題を扱う際, 導分の概念が重要な役割を果たす.

定義 3.1 k 線形写像 $D : R \to R$ は, 任意の $a, b \in R$ に対し

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \tag{3.1}$$

が成り立つとき, R における k 上の**導分** (微分作用素, derivation) であるという.

以下, k 上の導分を単に導分と呼ぶ. 次の補題は容易に示せる.

補題 3.2 D, D' を R の導分とする．
(1) $D + D' : R \ni a \mapsto D(a) + D'(a) \in R$ は R の導分である．
(2) 各 $b \in R$ に対し，$bD : R \ni a \mapsto bD(a) \in R$ は R の導分である．

$A \subset R$ が R の k **部分代数**であるとは，次が成り立つときにいう．
(1) A は R の k 部分ベクトル空間である．
(2) 各 $a, b \in A$ に対し，ab は A に属する．
(3) 1 は A に属する．

このとき，A は R の部分環である．(3) より 1 が A に属するので，各 $a \in k$ に対し，(1) より $a = a \cdot 1$ は A に属する．よって，k は A に含まれる．

命題 3.3 D が R の導分ならば，$\ker D$ は R の k 部分代数である．

（証明）D は k 線形写像なので，$\ker D$ は R の k 部分ベクトル空間である．

各 $a, b \in \ker D$ に対し，

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) = 0 \cdot b + a \cdot 0 = 0$$

が成り立つ．よって，ab は $\ker D$ に属する．

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2D(1)$$

より，$D(1) = 0$ が従う．よって，1 は $\ker D$ に属する． □

$k[\mathbf{x}]$ の導分 D に対し，次の問題は**ヒルベルトの第 14 問題**の特別な場合にあたる．

問題 3.4 $\ker D = k[f_1, \ldots, f_r]$ を満たす有限個の $f_1, \ldots, f_r \in \ker D$ は常に存在するか？

$n \leq 3$ の場合は肯定的であることが，ザリスキ (O. Zariski) [16] の結果から従う．一方，$n \geq 4$ では反例が構成されている．

命題 3.3 より，$\ker D$ は R の部分環である．従って，R は $\ker D$ 加群である．このとき，D は $\ker D$ 線形写像である．実際，(3.1) より，任意の $a \in \ker D$ と $b \in R$ に対し，

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) = 0 \cdot b + aD(b) = aD(b)$$

が成り立つ．

補題 3.5 任意の $a \in \ker D$, $b \in R$ と $i \geq 0$ に対し

$$(aD)^i(b) = a^i D^i(b) \tag{3.2}$$

が成り立つ．

（証明）i に関する帰納法で示す．$i=0$ のときは明らかである．$i \geq 1$ のとき，帰納法の仮定より $(aD)^{i-1}(b)=a^{i-1}D^{i-1}(b)$ が成り立つ．両辺を aD で写し，

$$(aD)^i(b)=aD\bigl(a^{i-1}D^{i-1}(b)\bigr) \tag{3.3}$$

を得る．a は $\ker D$ の元なので，命題 3.3 より a^{i-1} も $\ker D$ に属する．よって，D の $\ker D$ 線形性より

$$aD\bigl(a^{i-1}D^{i-1}(b)\bigr)=a\bigl(a^{i-1}D\bigl(D^{i-1}(b)\bigr)\bigr)=a^iD^i(b) \tag{3.4}$$

を得る．(3.3), (3.4) より，$(aD)^i(b)=a^iD^i(b)$ が成り立つ． □

$f=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_rz^r \in R[z]$ ($r \geq 0$, $a_0,\ldots,a_r \in R$) に対し，

$$\frac{df}{dz}=a_1+2a_2z+\cdots+ra_rz^{r-1}$$

を f の**導関数** (derivative) と呼ぶ．写像

$$\frac{d}{dz}: R[z] \ni f \mapsto \frac{df}{dz} \in R[z] \tag{3.5}$$

は k 線形であり，

$$\frac{d(fg)}{dz}=\frac{df}{dz}g+f\frac{dg}{dz} \qquad (f,g \in R[z]) \tag{3.6}$$

を満たす．よって，d/dz は $R[z]$ の導分である．

$R=k[x_2,\ldots,n]$, $z=x_1$ のとき，$k[\mathbf{x}]=R[z]$ の導分 d/dz を $\partial/\partial x_1$ で表し，x_1 に関する $k[\mathbf{x}]$ の**偏微分作用素** (partial derivation) と呼ぶ．各 $f \in k[\mathbf{x}]$ に対し，$\partial f/\partial x_1$ を x_1 に関する f の**偏導関数** (partial derivative) と呼ぶ．同様に，$i=2,\ldots,n$ に対し，x_i に関する偏導関数 $\partial f/\partial x_i$ や偏微分作用素

$$\frac{\partial}{\partial x_i}: k[\mathbf{x}] \to k[\mathbf{x}]$$

を定義できる．例えば，$f=x_1x_2^5+2x_2x_3^3$ に対し，

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_2^5, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=5x_1x_2^4+2x_3^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=6x_2x_3^2$$

である．補題 3.2 より，各 $f_1,\ldots,f_n \in k[\mathbf{x}]$ に対して $k[\mathbf{x}]$ の導分

$$D=f_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+f_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

が定義される．

命題 3.6 D を $k[\mathbf{x}]$ の導分とする．このとき，

$$D = D(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + D(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

が成り立つ．

（証明）補題 3.2 より，

$$D' := D - \left(D(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + D(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

は $k[\mathbf{x}]$ の導分である．さらに，

$$D'(x_i) = D(x_i) - D(x_i)\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

を満たす．よって，$x_1, \ldots, x_n$ は $\ker D'$ に属する．命題 3.3 より $\ker D'$ は $k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数なので，$\ker D' = k[x_1, \ldots, x_n]$ が成り立つ．従って，$D' = 0$ であり，補題の等式を得る． $\square$

定義 3.7 R の導分 D が**局所冪零** (locally nilpotent) であるとは，任意の $a \in R$ に対し，$D^l(a) = 0$ を満たす $l \geq 1$ が存在するときにいう．

$R[z]$ の導分

$$D = \frac{d}{dz}$$

は局所冪零である．実際，任意の $f \in R[z]$ と自然数 $l \geq \deg f$ に対し，$D^l(f) = 0$ が成り立つ．一方，

$$D = z\frac{d}{dz}$$

は局所冪零でない．実際，任意の $l \geq 1$ に対し $D^l(z) = z$ である．

補題 3.5 から次の補題が従う．

補題 3.8 D を R の局所冪零導分とする．このとき，各 $a \in \ker D$ に対し，R の導分 aD は局所冪零である．

次の問題も，多項式環に関する重要な問題の一つである．

問題 3.9 (局所冪零導分の分類問題) $k[\mathbf{x}]$ の局所冪零導分にどのようなものがあるか，全て調べ上げよ．

$k[\mathbf{x}]$ の自己同型を用いて，$k[\mathbf{x}]$ の導分の「変数変換」が行える．

命題 3.10 D を $k[\mathbf{x}]$ の導分とする．このとき，各 $F \in \operatorname{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に対し，$F^{-1} \circ D \circ F$ は $k[\mathbf{x}]$ の導分である．さらに，D が局所冪零ならば，$F^{-1} \circ D \circ F$ も局所冪零である．

（証明）k 線形写像の合成写像なので，$D' := F^{-1} \circ D \circ F$ は k 線形写像である．さらに，各 $f, g \in k[\mathbf{x}]$ に対し

$$\begin{aligned} D'(fg) &= (F^{-1} \circ D \circ F)(fg) = F^{-1}\Big(D\big(F(f)F(g)\big)\Big) \\ &= F^{-1}\Big(D(F(f))F(g) + F(f)D(F(g))\Big) \\ &= F^{-1}(D(F(f)))g + fF^{-1}(D(F(g))) = D'(f)g + fD'(g) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，D' は $k[\mathbf{x}]$ の導分である．

次に，D は局所冪零であると仮定する．すると，各 $f \in k[\mathbf{x}]$ に対し，$D^l(F(f)) = 0$ を満たす $l \in \mathbf{N}$ が存在する．このとき，

$$(D')^l(f) = (F^{-1} \circ D \circ F)^l(f) = (F^{-1} \circ D^l \circ F)(f) = F^{-1}\big(D^l(F(f))\big) = 0$$

が成り立つ．よって，D' は局所冪零である．$\square$

次の定理は，レンチュラー (R. Rentschler) によって 1968 年に与えられた．

定理 3.11 (レンチュラー [11]) $n = 2$ のとき，$k[\mathbf{x}]$ の任意の局所冪零導分 $D \neq 0$ に対し，

$$F^{-1} \circ D \circ F = p(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

を満たす $F \in \operatorname{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ と $p(x_1) \in k[x_1] \setminus \{0\}$ が存在する．

$k[\mathbf{x}]$ の局所冪零導分の分類問題は，$n \geq 3$ の場合は未解決である．

4 指数自己同型

D を R の局所冪零導分とする．このとき，各 $a \in R$ に対し，十分大きな $l \geq 1$ をとれば，任意の $i \geq l$ に対して $D^i(a) = 0$ となる．よって，写像

$$\exp D : R \ni a \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^i(a)}{i!} \in R$$

が定義される．ただし，$D^0 := \mathrm{id}_R$ とする．定義より，$\exp 0 = \mathrm{id}_R$ である．各 $i \geq 0$ に対し D^i は k 線形写像なので，$\exp D$ は k 線形写像である．

補題 3.2 (1) で述べたように，導分の和は導分である．しかし，局所冪零導分の和が，常に局所冪零であるとは限らない．例えば，$k[x_1, x_2]$ の導分

$$D_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad D_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

を考える．$\partial/\partial x_1$ は局所冪零であり，$\partial x_2/\partial x_1 = 0$ を満たすので，補題 3.8 より D_1 は局所冪零である．同様に，D_2 も局所冪零である．しかし，

$$(D_1 + D_2)^l(x_1) = \begin{cases} x_1 & (l \text{ が偶数のとき}) \\ x_2 & (l \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

だから，$D_1 + D_2$ は局所冪零でない．

命題 4.1 (指数法則) R の局所冪零導分 D_1 と D_2 は，$D_1 \circ D_2 = D_2 \circ D_1$ を満たすとする．このとき，次が成り立つ．
(1) R の導分 $D_1 + D_2$ は局所冪零である．
(2) $\exp(D_1 + D_2) = (\exp D_1) \circ (\exp D_2)$ である．

（証明）(1) 仮定より $D_1 \circ D_2 = D_2 \circ D_1$ なので，各 $l \in \mathbf{N}$ に対し，2 項展開の公式

$$(D_1 + D_2)^l = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} D_1^i \circ D_2^{l-i} \tag{4.1}$$

が成り立つ．$a \in R$ を任意にとる．仮定より D_1, D_2 は局所冪零なので，$D_1^{l_1}(a) = D_2^{l_2}(a) = 0$ を満たす $l_1, l_2 \in \mathbf{N}$ が存在する．このとき，各 $0 \leq i \leq l_1$ に対し

$$(D_1^i \circ D_2^{l_1+l_2-i})(a) = D_1^i(D_2^{l_1+l_2-i}(a)) = D_1^i(0) = 0$$

である．D_1, D_2 は交換可能なので，各 $l_1 \leq i \leq l_1 + l_2$ に対し

$$(D_1^i \circ D_2^{l_1+l_2-i})(a) = D_2^{l_1+l_2-i}(D_1^i(a)) = D_2^{l_1+l_2-i}(0) = 0$$

である．よって，$i = 0, \ldots, l_1 + l_2$ に対し $(D_1^i \circ D_2^{l_1+l_2-i})(a) = 0$ である．従って，

$$(D_1 + D_2)^{l_1+l_2}(a) = \sum_{i=0}^{l} \binom{l_1 + l_2}{i} (D_1^i \circ D_2^{l_1+l_2-i})(a) = 0$$

が成り立つ．ゆえに，$D_1 + D_2$ は局所冪零である．

(2) 各 $a \in R$ に対し,

$$
\begin{aligned}
(\exp{(D_1+D_2)})(a) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(D_1+D_2)^l(a)}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} (D_1^i \circ D_2^{l-i})(a) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{l} \frac{D_1^i(D_2^{l-i}(a))}{i!(l-i)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_1^l(D_2^m(a))}{l!m!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} D_1^l \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_2^m(a)}{m!} \right) \\
&= (\exp D_1)\left((\exp D_2)(a)\right) = \left((\exp D_1) \circ (\exp D_2)\right)(a)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，$\exp(D_1+D_2) = (\exp D_1) \circ (\exp D_2)$ である． □

各 $a \in R$ に対し,

$$
\big(D \circ (-D)\big)(a) = D(-D(a)) = -D^2(a) = -D(D(a)) = \big((-D) \circ D\big)(a)
$$

が成り立つ．．よって，$D \circ (-D) = -D^2 = (-D) \circ D$ である．命題 4.1 より

$$
\begin{aligned}
(\exp D) \circ (\exp{(-D)}) = \exp{(D+(-D))} = \exp 0 = \mathrm{id}_R \\
(\exp{(-D)}) \circ (\exp D) = \exp{((-D)+D)} = \exp 0 = \mathrm{id}_R
\end{aligned}
$$

を得る．従って，$\exp{(-D)}$ は $\exp D$ の逆写像である．よって，$\exp D$ は全単射である．

定理 4.2 $\exp D$ は k 同型である．

$\exp D$ は k 線形写像であり，全単射であり，なおかつ

$$
(\exp D)(1) = 1 + D(1) + \cdots = 1
$$

を満たす．よって，積を保つことだけ確かめればよい．次の補題は，(3.1) を使い，l に関する帰納法で示せる．

補題 4.3 R の導分 D と $l \in \mathbf{N}$, $a, b \in R$ に対し,

$$
D^l(ab) = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} D^i(a) D^{l-i}(b)
$$

が成り立つ．

この補題を使うと，各 $a,b\in R$ に対し

$$
\begin{aligned}
(\exp D)(ab) &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{D^l(ab)}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}D^i(a)D^{l-i}(b) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{l}\frac{D^i(a)D^{l-i}(b)}{i!(l-i)!}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{D^l(a)}{l!}\right)\left(\frac{D^m(b)}{m!}\right) = \left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D^l(a)}{l!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{D^m(b)}{m!}\right)\\
&= (\exp D)(a)(\exp D)(b)
\end{aligned}
$$

であることが分かる．以上で定理 4.2 が示された．

D を $k[\mathbf{x}]$ の局所冪零導分とするとき，定理 4.2 より $\exp D : k[\mathbf{x}] \to k[\mathbf{x}]$ は k 同型である．よって，$\exp D$ は $k[\mathbf{x}]$ の自己同型である．この形の自己同型を**指数自己同型** (exponential automorphism) と呼ぶ．例えば,

$$
\left(\exp\frac{\partial}{\partial x_1}\right)(x_i) = x_i + \frac{\partial x_i}{\partial x_1} + \cdots = \begin{cases} x_1+1 & (i=1)\\ x_i & (i\geq 2)\end{cases}
$$

である．これは，基本自己同型 $(x_1+1, x_2, \ldots, x_n)$ と等しい．

各 $\alpha\in k$ に対し $D(\alpha)=0$ なので，補題 3.8 より αD は局所冪零である．よって，写像

$$
k \ni \alpha \mapsto \exp \alpha D \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] \tag{4.2}
$$

が定義される．命題 4.1 より次の命題が従う．

命題 4.4 k を加法群と考えるとき，(4.2) は群の準同型である．

（証明）D の k 線形性より，各 $\alpha,\beta\in k$ に対し $(\alpha D)\circ(\beta D) = (\beta D)\circ(\alpha D)$ である．よって，補題 4.1 (2) より

$$
\exp{(\alpha+\beta)D} = \exp{(\alpha D+\beta D)} = (\exp \alpha D)\circ(\exp \beta D)
$$

が成り立つ． □

従って，$k[\mathbf{x}]$ の局所冪零導分は，加法群 k の $k[\mathbf{x}]$ への作用を与える．

参考文献

[1] S. S. Abhyankar and T. T. Moh, Embeddings of the line in the plane, J. Reine Angew. Math. **276** (1975), 148–166.

[2] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics, Vol. 190, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2000.

[3] G. Freudenburg, Algebraic theory of locally nilpotent derivations, Encyclopaedia Math. Sci., 136, Springer, Berlin, 2006.

[4] T. Fujita, On Zariski problem, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55** (1979), 106–110.

[5] H. Jung, Über ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. **184** (1942), 161–174.

[6] W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables, Nieuw Arch. Wisk. (3) **1** (1953), 33–41.

[7] L. Makar-Limanov, P. van Rossum, V. Shpilrain and J.-T. Yu, The stable equivalence and cancellation problems, Comment. Math. Helv. **79** (2004), 341–349.

[8] A. A. Mikhalev, V. Shpilrain and J.-T. Yu, *Combinatorial methods*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 19, Springer, New York, 2004.

[9] M. Miyanishi and T. Sugie, Affine surfaces containing cylinderlike open sets, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), 11–42.

[10] M. Nagata, On Automorphism Group of $k[x, y]$, Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, Vol. 5, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1972.

[11] R. Rentschler, Opérations du groupe additif sur le plan affine, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **267** (1968), 384–387.

[12] A. R. Shastri, Polynomial representations of knots, Tohoku Math. J. (2) **44** (1992), 11–17.

[13] I. Shestakov and U. Umirbaev, The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 197–227.

[14] M. K. Smith, Stably tame automorphisms, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), 209–212.

[15] M. Suzuki, Propriétés topologiques des polynomes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace $\mathbf{C}^2$, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 241–257.

[16] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math. **78** (1954), 155–168.