学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名　小林雅之

論文題名： ある対合によるモジュラー不変式環

k を標数 2 の体, $k[x,y,z]$ を k 上の 3 変数多項式環とする. $f = xz + y^2, g = zf^2 + x^3$ とおき, 環の k 準同型 $\theta : k[x,y,z] \longrightarrow k[x,y,z]$ を

$$\theta(x) = x + f^2 g,\ \ \theta(y) = y + g + f^3 g^2,\ \ \theta(z) = z + x\theta(x)g + f^4 g^3$$

で定義する. このとき, $\theta(f) = f, \theta(g) = g$ が成り立つため, $\theta^2(x) = x, \theta^2(y) = y$ となる. 従って, $\theta^2(z) = z$ であり, $\theta^2 = \mathrm{id}$ が成り立つことが分かる. この θ は, 標数 0 の体上の多項式環の自己同型 (cf. [2]) から, 2 を法とする簡約により得られたものである.

一般に, k が正標数の体のとき, $k[x,y,z]$ の k 自己同型群 $\mathrm{Aut}_k\, k[x,y,z]$ が '基本自己同型' たちで生成されるかという未解決問題がある. 上の θ は '基本自己同型' を合成して構成できないと予想されている自己同型の一つである. 従って, θ の様々な性質を調べることは意味深い問題であると言える. そこで, 本修士論文では θ に関する情報を得るため, 以下の谷本 [1] の理論を用いて不変式環

$$k[x,y,z]^\theta := \{h \in k[x,y,z] \mid \theta(h) = h\}$$

の生成系を調べた.

k を標数 $p > 0$ の体, A を有限生成 k 整域とし, $\psi \in \mathrm{Aut}_k\, A$ は $\psi^p = \mathrm{id}$ かつ $\psi \neq \mathrm{id}$ を満たすと仮定する. このとき, $A^\psi := \{h \in A \mid \psi(h) = h\}$ について考える. k 線形写像 $D_\psi : A \longrightarrow A$ を

$$D_\psi(h) := \psi(h) - h \qquad (\forall h \in A)$$

で定義する. $\alpha \in A$ が D_ψ の**局所スライス**であるとは, $D_\psi(\alpha) \in A^\psi$ かつ $D_\psi(\alpha) \neq 0$ が成り立つときにいう. α を D_ψ の局所スライスとし, $\beta := D_\psi(\alpha)$, $s := \alpha/\beta$ とおく. すると, A^ψ 線形写像 $\pi_\alpha : A \longrightarrow A^\psi[1/\beta]$ が

$$\pi_\alpha(h) := \sum_{i=0}^{p-1} D_\psi^i(h) \binom{-s}{i} \qquad (h \in A)$$

で定義される (cf. [1, 定理 1.3]). ここで,

$$\binom{s}{i} := \begin{cases} 1 & (i=0) \\ \dfrac{s(s-1)\cdots(s-i+1)}{i!} & (1 \le i \le p-1) \end{cases}$$

とする. 今, A^ψ の有限生成 k 部分代数 C と $g_1, \ldots, g_r \in A$ は, $A = Cg_1 + \cdots + Cg_r$ を満たすと仮定する. このとき, $0 \neq b \in A^\psi$ をうまく選ぶと, $i = 1, \ldots, r$ に対し $\pi_\alpha(g_i) = a_i/b$ ($a_i \in A^\psi$) と表せる. $h_1, \ldots, h_s$ をネーター環 $B := C[a_1, \ldots, a_r]$ のイデアル $B \cap bA$ の生成系とする. 次の定理は谷本 [1, 定理 2.1] の一般化である.

定理 1 $A^\psi = B\dfrac{h_1}{b} + \cdots + B\dfrac{h_s}{b}$.

なお, [1, 定理 2.1] では b を $\beta^d (d \ge 0)$ の形の元としている. [1] ではグレブナ基底の理論を用いて $h_1, \ldots, h_s$ を計算する方法も述べられている.

本修士論文では, 定理 1 を $A = k[x, y, z]$, $\psi = \theta$ の場合を用い, 不変式環 $k[x, y, z]^\theta$ の生成系を求めた. $\theta^2 = \mathrm{id}$ なので, $x\theta(x)$, $y\theta(y)$, $z\theta(z)$ は θ 不変である. $\mathcal{C} := k[x\theta(x), y\theta(y), z\theta(z), f, g]$ とおくとき, 次の補題が成り立つ.

補題 2 $k[x, y, z] = \mathcal{C} + \mathcal{C}x + \mathcal{C}y + \mathcal{C}z + \mathcal{C}xy + \mathcal{C}yz + \mathcal{C}zx + \mathcal{C}xyz$.

$D_\theta(x) = f^2 g \in k[x, y, z]^\theta$ より, x は D_θ の局所スライスである. 実際に計算すると,

$$S := \{f^2\pi_x(x), f^2\pi_x(y), f^2\pi_x(z), f^2\pi_x(xy), f^2\pi_x(xz), f^2\pi_x(yz), f^2\pi_x(xyz)\}$$

が $k[x, y, z]^\theta$ に含まれることが分かる. そこで, $\mathcal{B} := \mathcal{C}[S]$ とおき, $\mathcal{B}$ のイデアル $\mathcal{B} \cap f^2 k[x, y, z]$ の生成系を求めた. すると, 25 個の生成元が得られた. さらに整理することで, 次の結果を得た.

定理 3 k 代数 $k[x, y, z]^\theta$ は高々 30 個の元で生成される.

参考文献

[1] 谷本 龍二, Computational invariant theory for cyclic groups, 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2011」報告集, 1–7.

[2] S. Kuroda, How to Prove the Wildness of Polynomial Automorphisms: An Example, in *Automorphisms in Birational and Affine Geometry*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, **79** (2014), 381–386.