学位論文要旨（修士（理学））

理工学研究科数理情報科学専攻　小林 永

ヒルベルト第14問題に対する 3次元における有理数係数のガロア的反例

k を体，$k[\overline{x}] := k[x_1, \ldots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環，$k(\overline{x})$ を $k[\overline{x}]$ の商体とする．$k \subset L \subset k(\overline{x})$ を中間体とするとき，$L \cap k[\overline{x}]$ は $k[\overline{x}]$ の k 部分代数となる．

ヒルベルトの第14問題とは，この k 代数 $L \cap k[\overline{x}]$ が常に有限生成かどうかを問う問題である．この問題は1958年に永田 [1] が反例を与え，否定的に解決された．現在では，様々な反例が知られている．しかし，次は未解決であった．

問題 ([**2, Problem 1.5**]) $n = 3$, $k = \mathbf{Q}$ とする．$k(\overline{x})/L$ がガロア拡大であるような中間体 $k \subset L \subset k(\overline{x})$ に対し，k 代数 $L \cap k[\overline{x}]$ は常に有限生成か？

本論文の目的は，この未解決問題を解決することである．

以下，$n = 3$ とし，k を標数0の任意の体とする．整数 $\epsilon \geq 4$ に対し，$\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}_k k(\overline{x})$ を

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1) &= -x_2^{-\epsilon}(x_1 x_2^{\epsilon} - 1)^{\epsilon-1} \\
\sigma(x_2) &= x_2(x_1 x_2^{\epsilon} - 1)^{-1} \\
\sigma(x_3) &= -x_2^{-1}(x_1 x_2^{\epsilon} - 1) + x_2^{-1} + x_3
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\tau(x_1) &= x_1^{\epsilon-1} x_2^{\epsilon(\epsilon-2)} \\
\tau(x_2) &= (x_1 x_2^{\epsilon-1})^{-1} \\
\tau(x_3) &= -x_1 x_2^{\epsilon-1} + x_2^{-1} + x_3
\end{aligned}$$

で定義する．σ と τ で生成される $\mathrm{Aut}_k k(\overline{x})$ の部分群を Γ とする．このとき，Γ は3次対称群と同型になる。また，$k(\overline{x})$ は不変体 $k(\overline{x})^{\Gamma}$ のガロア拡大である．

次が本論文の主定理である．

定理　$n=3$ とし，k を標数 0 の任意の体とする．このとき，上で定義した Γ に対し，k 代数 $k(\overline{x})^{\Gamma} \cap k[\overline{x}]$ は有限生成でない．

この定理により，上述の未解決問題が否定的に決着した．

反例の構成の概略は以下の通りである．一般に，ある条件を満たす多項式の組に対し，ヒルベルトの第 14 問題に対する反例が得られることが黒田 [2] より知られている．我々は，

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される $GL(2, \mathbf{Q})$ の有限部分群の，$k[x_1, x_2]$ への線形な作用による不変式環を研究することにより，反例の構成に必要な多項式の組を見つけることに成功した．そして，それを利用して上の定理を得た．

本論文では別の行列群を用い，同様の方法でヒルベルトの第 14 問題に対する反例を構成する．

参考文献

[1] M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, in: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1958, Cambridge Univ. Press, London, 1960, pp. 459–462.

[2] S. Kuroda, Hilbert's Fourteenth Problem and algebraic extensions, J. Algebra **309** (2007) 282–291.