学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名　金平　拓郎

論文題名：3 変数多項式環の順自己同型写像の重み付き多重次数

k を標数 0 の体，$k[\mathbf{x}] := k[x_1, \dots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環とし，$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ を k 代数 $k[\mathbf{x}]$ の自己同型群とする．$(a_{i,j}) \in GL(n, k)$ と $b_1, \dots, b_n \in k$ に対して

$$x_l \mapsto \sum_{m=1}^{n} a_{m,l} x_m + b_l \quad (l = 1, \dots, n)$$

で定義される $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元を，**アフィン自己同型写像**と呼ぶ．また，$i \in \{1, \dots, n\}$ と $p \in k[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ に対して

$$x_j \mapsto x_j \quad (j \neq i), \quad x_i \mapsto x_i + p$$

で定義される $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元を，**基本自己同型写像**と呼ぶ．アフィン自己同型写像全体の集合と基本自己同型写像全体の集合で生成される $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の部分群 $\mathrm{T}(n, k)$ を**順部分群**と呼び，順部分群の元を**順自己同型写像**と呼ぶ．

一般に，与えられた $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元が順であるか否かを判定することは難しい問題である．$n = 1$ の場合に $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の任意の元が順であることは，簡単な考察から分かる．$n = 2$ の場合に $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の任意の元が順であることは，Jung の定理として知られている．$n = 3$ の場合に，順でない $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元が存在するか否かは長い間未解決であったが，2004 年に存在することが Shestakov-Umirbaev [3] によって示された．

本論文では，$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元が順であるための，重み付き多重次数に関する条件について考察する．そこで，$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbf{N}^n$ を任意に 1 つ取る．$k[\mathbf{x}]$ の 0 でない元

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} \lambda_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \quad (\lambda_{i_1, \dots, i_n} \in k)$$

に対して，$\mathbf{w}$ を重みとする f の次数 $\deg_{\mathbf{w}} f$ を

$$\deg_{\mathbf{w}} f := \max\{w_1 i_1 + \dots + w_n i_n \mid \lambda_{i_1, \dots, i_n} \neq 0\}$$

で定義する．また，$\mathbf{w}$ を重みとする $F \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の多重次数 $\mathrm{mdeg}_{\mathbf{w}} F$ を

$$\mathrm{mdeg}_{\mathbf{w}} F := (\deg_{\mathbf{w}} F(x_1), \dots, \deg_{\mathbf{w}} F(x_n))$$

で定義する．なお，$\mathbf{w} = (1, \dots, 1)$ のときには $\mathrm{mdeg}_{\mathbf{w}} F$ を $\mathrm{mdeg}\, F$ と表す．

以下では，$n = 3$ とする．Karaś-Zygadło [1, Theorem 2.1] は，Shestakov-Umirbaev [3] の順性判定法を用いて次の定理を示した．

定理 1（Karaś-Zygadło） 奇数 d_1, d_2 と自然数 d_3 は $3 \leq d_1 < d_2 \leq d_3$, $\gcd(d_1, d_2) = 1$ を満たすとする．このとき，$\mathrm{mdeg} F = (d_1, d_2, d_3)$ を満たす $F \in \mathrm{T}(3, k)$ が存在するための必要十分条件は，d_3 が $d_1\mathbf{Z}_{\geq 0} + d_2\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に属することである．

本論文では，定理 1 の必要性の部分の類似の結果を，$\mathbf{w}$ が一般の場合に与えた．一般に，任意の $F \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に対して

$$\deg_{\mathbf{w}} F := \deg_{\mathbf{w}} F(x_1) + \deg_{\mathbf{w}} F(x_2) + \deg_{\mathbf{w}} F(x_3) \geq w_1 + w_2 + w_3$$

となることが知られている．さらに，等号が成り立つとき，F は $\mathrm{T}(3, k)$ に属し，$\{1, 2, 3\}$ のある置換 σ に対して $\mathrm{mdeg}_{\mathbf{w}} F = (w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, w_{\sigma(3)})$ が成り立つことも知られている．よって，$\deg F > w_1 + w_2 + w_3$ の場合を考えればよい．

また，任意の $l \in \mathbf{N}$, $f \in k[\mathbf{x}]$ に対して，$l\mathbf{w}$ を重みとする f の次数と $l \deg_{\mathbf{w}} f$ は等しいから，$\gcd(w_1, w_2, w_3) = 1$ と仮定する．

次の定理が，本論文の主結果である．これは，黒田 [2] の順性判定法を用いて示される．

定理 2 奇数 d_1, d_2 と自然数 d_3 が $3 \leq d_1 < d_2 \leq d_3$, $\gcd(d_1, d_2) = 1$ を満たすとする．このとき，$\mathrm{mdeg}_{\mathbf{w}} F = (d_1, d_2, d_3)$, $\deg_{\mathbf{w}} F > w_1 + w_2 + w_3$ を満たす $F \in \mathrm{T}(3, k)$ が存在するならば，d_3 は $d_1\mathbf{Z}_{\geq 0} + d_2\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に属する．

なお，$i = 1, 2, 3$ に対して，$\deg_{\mathbf{w}} F(x_i)$ は常に $S_{\mathbf{w}} := \bigcup_{1 \leq i < j \leq 3} (w_i\mathbf{Z}_{\geq 0} + w_j\mathbf{Z}_{\geq 0})$ に属することが知られている．定理 2 の主張の逆は，d_1, d_2, d_3 が全て $S_{\mathbf{w}}$ に属する場合でも一般に成立しない．実際，次の命題が成り立つ．

命題 3 $\mathbf{w} = (5, 6, 7)$ に対して，$\mathrm{mdeg}_{\mathbf{w}} F = (11, 13, d)$ を満たす $F \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$, $d \geq 13$ は存在しない．

参考文献

[1] M. Karaś, J. Zygadło, *On multidegree of tame and wild automorphisms of* $\mathbb{C}^3$, J. Pure Appl. Algebra, to appear.

[2] S. Kuroda, *Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism*, Tohoku Math. J. 62 (2010), 75–115.

[3] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, *The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables*, J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), 197–227.