学位論文要旨 (修士 (理学))

論文著者名　石井　嵩人

論文題名：空間野生直線の構成

k を標数 0 の体，$k[x_1,\dots,x_n], k[y_1,\dots,y_m]$ $(n<m)$ を多項式環とする．k 代数の準同型 $F : k[y_1,\dots,y_m] \to k[x_1,\dots,x_n]$ が rectifiable であるとは，

$$(F\circ G)(y_i) = x_i \quad (i=1,\dots,n), \qquad (F\circ G)(y_i)=0 \quad (i=n+1,\dots,m)$$

を満たす $G \in \mathrm{Aut}_k\, k[y_1,\dots,y_m]$ が存在するときにいう．このとき，F は全射である．

本修士論文では次の問題を研究する．

問題 1　F は全射ならば，常に rectifiable か？

$(m,n)=(2,1)$ のときは YES である (Abhyankar-Moh, 鈴木)．$m \geq 2n+2$ の場合も YES である (Srinivas)．$(m,n)=(3,1)$ のとき，全射であるような F を**空間直線**と呼び，$(f(y_1), f(y_2), f(y_3))$ と同一視する．Shastri は問題 1 の最初の反例となる non-rectifiable な空間直線を，$k=\mathbf{R}$ の場合に構成した．$k=\mathbf{C}$ の場合の反例は見つかっていない．

1 次の項を持つ多項式 $p\in k[x]$ と，互いに素な $a,b\in\mathbf{N}$ に対し，$F=(p,x^a,x^b)$ は空間直線になる．こうした簡単な形の空間直線でさえ，いつ rectifiable かよく分かっていない．Abhyankar は non-rectifiable な空間直線の候補として，

$$F_l = (x+x^l, x^{l-1}, x^{l-2})\ (l \geq 5)$$

を挙げた．しかし，Craighero [1] は $l=5,6$ の場合に F_l が rectifiable であることを証明した．$l\geq 7$ の場合は未解決である．

この修士論文では，rectifiable な空間直線を具体的に構成するという方法で，問題 1 の研究を行う．$G\in \mathrm{Aut}_k\, k[y_1,\dots,y_m]$ が**基本自己同型**であるとは，ある $1\leq l\leq n, c\in k^{\times}, p\in k[y_1,\dots,y_{l-1},y_{l+1},\dots,y_m]$ が存在し，$G(y_l)=cy_l+p, G(y_i)=y_i$ $(i\neq l)$ を満たすときにいう．空間直線 F の**次数**を

$$\deg F = \deg F(y_1)+\deg F(y_2)+\deg F(y_3) \quad (\deg 0 := 0 \text{ とする})$$

で定義する．F が**基本簡約**を許容するとは，ある基本自己同型 $G\in\mathrm{Aut}_k\, k[y_1,y_2,y_3]$ に対し $\deg F\circ G < \deg F$ となるときにいう．空間直線が**野生**であるとは，2 次以上で，基本簡約を許容しないときにいう．$G\in \mathrm{Aut}_k\, k[y_1,\dots,y_m]$ が**野生**であるとは，G が基本自己同型の合成写像でないときにいう．永田は野生自己同型の存在を予想し，$n=3$ の場合

に候補を挙げた．2004 年に Shestakov-Umirbaev は永田の自己同型が野生であることを示した．N が永田の自己同型のとき，$a, b, c \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$(少なくとも一つは 1) に対し，

$$\begin{aligned} F_{a,b,c} &:= (x^a, x^b, x^c) \circ N \\ &= (x^a - 2x^{a+b+c} - 2x^{3b} - x^{2a+3c} - 2x^{a+2b+2c} - x^{4b+c}, x^b + x^{a+2c} + x^{2b+c}, x^c) \end{aligned}$$

となる．$F_{a,b,c}$ は rectifiable な空間直線である．以下が主結果である．

定理 2 $c \geq 3$ とする．

(1) 以下の場合，$F_{a,b,c}$ は野生である．

- $a = 1$, $2b \leq c + 1$, c が奇数.
- $a = 1$, $2b > c + 1$, $c \nmid 4b$, $\gcd(2b, c) = 1$.
- $b = 1$, $c \nmid 2a$, $\gcd(2a, c) = 1$.

(2) 以下の場合，基本簡約を繰り返すことで $F_{a,b,c}$ を野生な空間直線 $F'_{a,b,c}$ に変形できる．

- $a = 1$, $2b > c + 1$, $c \mid b$, c が奇数.

$F'_{a,b,c} = (x - x^{3c+2}, x^{2c+1}, x^c)$

- $b = 1$, $c \mid a$, $c \neq 4$, c が奇数.

$F'_{a,b,c} = (2x^3 + x^{c+4}, x + x^{c+2}, x^c)$

- $b = 1$, $c \mid 2a$, $c \nmid a$, a が奇数であるか $c \neq 4$, $\gcd(a, c) = 1$, $\gcd(a + 2, c) = 1$.

$F'_{a,b,c} = (x^a - 2x^{a+c+1} - 2x^3 - 2x^{a+2c+2} - x^{c+4}, x + x^{a+2c} + x^{c+2}, x^c)$

空間直線 $(-x, x^l, x^l) \circ N$ $(l \in \mathbf{N})$ についての考察により，次の定理を得た．

定理 3 各 $l \in \mathbf{N}$ に対し，空間直線 $(x + x^{3l+2}, x^{2l+1}, x^l)$ は rectifiable である．

定理 2 の空間直線は Abhyankar の例とは異なるが，似たような空間直線が rectifiable であることが分かったのは興味深い．

参考文献

[1] P. C. Craighero, A remark on Abhyankar's space lines, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **80** (1988), 87–93 (1989).