学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名 今村 優斗

論文題名：被約でない可換環上の多項式環における
ある指数写像の不変式環について

$A[T]$ を可換環 A 上の 1 変数多項式環とする．環の準同型 $\sigma : A \to A[T]$ が**指数写像**であるとは，任意の $a \in A$ に対し，次の条件 (E1)，(E2) を満たすときにいう (cf. [2])．但し，$\sigma(a) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_m T^m$ $(a_i \in A)$ と書く．
(E1) $a_0 = a$.
(E2) 2 変数多項式環 $A[T, U]$ において，次の等式が成り立つ：

$$\sigma(a_0) + \sigma(a_1)U + \cdots + \sigma(a_m)U^m = a_0 + a_1(T+U) + \cdots + a_m(T+U)^m.$$

上の条件は，$\sigma\colon A \to A[T]$ が加法群スキーム $\mathbf{G}_a = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T])$ の $\mathrm{Spec}(A)$ への作用を定めるための条件と同値である (cf. [4, §3.4, 定義 3.47])．

σ が A における指数写像のとき，σ **の不変式環**

$$A^\sigma := \{a \in A \mid \sigma(a) = a\}$$

は A の部分環である．A の部分環 R が $R \subset A^\sigma$ を満たすとき，σ を R **上の指数写像**という．このとき，A^σ は A の R 部分代数である．一般に，A が R 代数として有限生成でも R 部分代数 A^σ は有限生成とは限らない．R が体で A が R 上の多項式環のとき，A^σ の有限生成性の問題は，Hilbert の第 14 問題の特別な場合である．R が標数 0 の体で A が R 上の 5 変数多項式環のとき，Daigle-Freudenburg [1] は A^σ が有限生成でないような σ を与えた．本修士論文では，1 変数多項式環 $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})[x]$ $(n \geq 2)$ における $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 上の指数写像の不変式環の有限生成性について考察する．

一般に $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ が被約なとき，$(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})[x]$ の $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 部分代数は常に有限生成であることが知られている．一方，$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ が被約でないとき，$(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})[x]$ の有限生成でない $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 部分代数が存在する．以下では p を素数，$e \geq 2$ を整数とし，$A = (\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})[x]$ とする．このとき，

$$\sigma\colon A \ni f(x) \mapsto f(x + pT) \in A[T] \tag{1}$$

は A における $\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z}$ 上の指数写像である．各整数 $i \geq 1$ に対し

$$v(i) := \max\{\alpha \in \mathbf{Z} \mid i \in p^\alpha \mathbf{Z}\}$$

と定義する．

次の定理が本修士論文の主結果である．

定理　(1) で定義した指数写像 σ に対し，

$$A^\sigma = (\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})\left[\left\{p^{e-v(i)-1}x^i \;\middle|\; i = 1, \ldots, p^{e-1}\right\}\right] \tag{2}$$

が成り立つ．従って，$\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z}$ 代数 A^σ は有限生成である．

$i = p^{e-1}$ のとき $p^{e-v(i)-1}x^i = x^{p^{e-1}}$ なので，$(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})[x^{p^{e-1}}] \subset A^\sigma$ が成り立つことに注意する．

例えば，(2) において，$p = 2$, $e = 3$ とすると

$$A^\sigma = (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})[4x, 2x^2, 4x^3, x^4]$$

である．また，$p = 3$, $e = 3$ とすると

$$A^\sigma = (\mathbf{Z}/27\mathbf{Z})[9x, 9x^2, 3x^3, 9x^4, 9x^5, 3x^6, 9x^7, 9x^8, x^9]$$

である．

参考文献

[1] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5, J. Algebra **221** (1999), 528–535.

[2] S. Kuroda, A generalization of Nakai's theorem on locally finite iterative higher derivations, Osaka J. Math. **54** (2017), no. 2, 335–341.

[3] 藤崎源二郎，森田康夫，山本芳彦，数論への出発，日本評論社，1980.

[4] 向井茂，モジュライ理論 1，岩波講座 現代数学の展開 2，岩波書店，1998.