学位論文要旨 (修士 (理学))

論文著者名　原田　詩穂

正標数の体上の平面直線に関する Moh 予想

k を体, $k[x]$ を k 上の 1 変数多項式環とする. $f, g \in k[x]$ に対して $(f,g) \rightsquigarrow (\alpha f + \lambda(g), g)$　や　$(f,g) \rightsquigarrow (f, \alpha g + \lambda(f))$ (ただし, $\alpha \in k^\times$, $\lambda(x) \in k[x]$) の形の変形を**基本変形**とよぶ. また, k の標数 p が正でさらに k が完全体のとき，$f \in k[x]$, $g \in k[x^p]$ に対して, $(f,g) \rightsquigarrow (f, \sqrt[p]{g})$　や　$(g,f) \rightsquigarrow (\sqrt[p]{g}, f)$ の形の変形を **Moh 変形**とよぶ. 次の定理はアフィン代数幾何学における重要な定理である.

定理 0.1 (Abhyankar-Moh [1]) *k の標数が 0 のとき, f, $g \in k[x] \setminus \{0\}$ が $k[f,g] = k[x]$ をみたすならば, $\deg f \mid \deg g$ または $\deg g \mid \deg f$ が成り立つ.*

標数が正のとき, $k[f,g] = k[x]$ かつ $\deg f \nmid \deg g$ かつ $\deg g \nmid \deg f$ となる f, $g \in k[x]$ が存在する（[3] を参照）．ゆえに，k の標数が正のとき，Abhyankar-Moh の定理は成り立たない．そうではあるが，Moh [2] により次が予想されている．

予想 0.2 (Moh [2]) *k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする. f, $g \in k[x] \setminus \{0\}$ が $k[f,g] = k[x]$ をみたすとき, 以下の条件をみたす f^*, $g^* \in k[x]$ が存在する:*

(i) $g^* \in k[x^p]$.

(ii) (f,g) を，基本変形の繰り返しにより (f^*, g^*) に変形できる.

(iii) $\min(\deg f^*, p^{-1} \deg g^*) < \min(\deg f, \deg g)$ または
$$\begin{cases} \min(\deg f^*, p^{-1} \deg g^*) = \min(\deg f, \deg g) \text{ かつ} \\ \max(\deg f^*, p^{-1} \deg g^*) < \max(\deg f, \deg g). \end{cases}$$

本修士論文では, k の標数が 2 の場合に, $k[f,g] = k[x]$ をみたすいくつかの f, $g \in k[x] \setminus \{0\}$ について, Moh 予想が正しいことを確かめた. また，それらの (f,g) に対して, 基本変形, Moh 変形からなる列 $(f,g) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (0,x)$ を具体的に与えた.

例えば以下の f, g は, $k[f,g] = k[x]$ をみたす:

- $f = x^6 + x$, $g = x^4$
- $f = x^6 + x^2 + x$, $g = x^4$
- $f = x^6 + x^4 + x$, $g = x^4$
- $f = x^6 + x^4 + x^2 + x$, $g = x^4$

恒等的な基本変形 $(f,g) \rightsquigarrow (f,g) =: (f^*, g^*)$ に対して, 以下が成り立つ:

- $f = x^6 + x$, $g = x^4$ のとき
  (a) $g^* = x^4 \in k[x^2]$.
  (b) $\min(\deg f^*, p^{-1} \deg g^*) = \min(6, 2) = 2 < 4 = \min(\deg f, \deg g)$.

- $f = x^6 + x^2 + x$, $g = x^4$ のとき
  (a) $g^* = x^4 \in k[x^2]$.
  (b) $\min(\deg f^*, p^{-1} \deg g^*) = \min(6, 2) = 2 < 4 = \min(\deg f, \deg g)$.

- $f = x^6 + x^4 + x$, $g = x^4$ のとき
  (a) $g^* = x^4 \in k[x^2]$.
  (b) $\min(\deg f^*, p^{-1} \deg g^*) = \min(6, 2) = 2 < 4 = \min(\deg f, \deg g)$.

- $f = x^6 + x^4 + x^2 + x$, $g = x^4$ のとき
  (a) $g^* = x^4 \in k[x^2]$.
  (b) $\min(\deg f^*, p^{-1} \deg g^*) = \min(6, 2) = 2 < 4 = \min(\deg f, \deg g)$.

よって, これらの場合に Moh 予想は正しい.

参考文献

[1] S. S. Abhyankar and T. T. Moh, Embeddings of the line in the plane, J. Reine Angew. Math. **276** (1975), 148–166.

[2] T. T. Moh, On the classification problem of embedded lines in characteristic p, in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I*, 1988, 267–279, Kinokuniya, Tokyo.

[3] M. Nagata, On automorphism group of $k[x, y]$, Department of Mathematics, Kyoto University, Lectures in Mathematics, No. 5, 1972, Kinokuniya Book-Store Co., Ltd., Tokyo

[4] W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables, Nieuw Arch. Wisk. (3) **1** (1953), 33–41.