学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名　陳　豪

論文題名：有限素体上の多項式環の永田型自己同型に収束する順自己同型の列

K を体，$K[\mathbf{x}]=K[x_1,\ldots,x_n]$ を K 上の n 変数多項式環とする．$K[\mathbf{x}]$ の任意の K 自己準同型 $\boldsymbol{h}\colon K[\mathbf{x}]\to K[\mathbf{x}]$($\forall a\in K$ に対し $\boldsymbol{h}(a)=a$ である環準同型) は $x_i\mapsto \boldsymbol{h}(x_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ で定義される代入写像であり，$(\boldsymbol{h}(x_1),\ldots,\boldsymbol{h}(x_n))$ と同一視して $K[\mathbf{x}]^n$ の元と見なす．一方，任意の $(g_1,\ldots,g_n)\in K[\mathbf{x}]^n$ に対し，$x_i\mapsto g_i$ $(i=1,\ldots,n)$ で定義される代入写像 $K[\mathbf{x}]\to K[\mathbf{x}]$ は $K[\mathbf{x}]$ の K 自己準同型である．よって，$K[\mathbf{x}]^n$ を $K[\mathbf{x}]$ の K 自己準同型全体の集合と同一視できる．$K[\mathbf{x}]$ の K 自己準同型の合成写像は $K[\mathbf{x}]$ の K 自己準同型なので，任意の $\boldsymbol{h},\boldsymbol{g}\in K[\mathbf{x}]^n$ に対し，$\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{g}\in K[\mathbf{x}]^n$ が定まる．この演算に関し $K[\mathbf{x}]^n$ はモノイドである．$K[\mathbf{x}]^n$ の単元全体のなす群 $\mathrm{Aut}_K K[\mathbf{x}]$ は $K[\mathbf{x}]$ の K 自己同型群である．例えば，各 $1\le i\le n$, $a\in K^\times$, $p\in K[x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n]$ に対し，

$$E=(x_1,\ldots,x_{i-1},ax_i+p,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

は $K[\mathbf{x}]$ の K 自己同型である．この形の K 自己同型を**基本自己同型**と呼ぶ．基本自己同型全体で生成される $\mathrm{Aut}_K K[\mathbf{x}]$ の部分群を $\mathrm{T}(n,K)$ で表し，$\mathrm{Aut}_K K[\mathbf{x}]$ の**順部分群**という．$\boldsymbol{h}\in\mathrm{Aut}_K K[\mathbf{x}]$ は $\mathrm{T}(n,K)$ に属するとき**順**であるという．$\boldsymbol{h}\in\mathrm{Aut}_K K[\mathbf{x}]$ のヤコビアン $\det J\boldsymbol{h}$ は常に $K^\times$ に属する．よって，

$$\mathrm{T}(n,K)\overset{(あ)}{\subset}\mathrm{Aut}_K K[\mathbf{x}]\overset{(い)}{\subset}\{\boldsymbol{h}\in K[\mathbf{x}]^n\mid \det J\boldsymbol{h}\in K^\times\}=:\mathcal{J}$$

が成り立つ．$n\ge 2$ のとき，(あ) や (い) が等号か否か大問題である．Jung [2] と van der Kulk [3] は $n=2$ のとき (あ) が等号であることを示した．$n=3$ のとき，永田 [4] は

$$\begin{aligned} x_1&\mapsto x_1-2(x_1x_3+{x_2}^2)x_2-(x_1x_3+{x_2}^2)^2x_3\\ x_2&\mapsto x_2+(x_1x_3+{x_2}^2)x_3,\\ x_3&\mapsto x_3\end{aligned}\tag{1}$$

で定まる $K[\mathbf{x}]$ の自己同型が順でないと予想した．2004 年に Shestakov–Umirbaev [5] は $\mathrm{char}\,K=0$ の場合にこの予想が正しいことを証明し，(あ) が等号でないことが判明した．$\mathrm{char}\,K>0$ の場合の永田予想は未解決であり，上記の以外の場合に (あ) が等号かどうかも不明である．$\mathrm{char}\,K>0$ のとき (い) が等号でないことは容易にわかる．ヤコビアン予想は $\mathrm{char}\,K=0$, $n\ge 2$ のとき (い) が等号であると主張する．

上記問題の研究で Anick [1] は以下の結果を得た．$h \in K[\mathbf{x}]$ に現れる単項式の次数の最小値を $\mathrm{ord}(h)$ とおく．ただし，$\mathrm{ord}(0) = \infty$ とする．各 $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in K[\mathbf{x}]^n$ に対し，$\mathrm{ht}\,(\boldsymbol{h}) := \min\{\mathrm{ord}(h_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ とする．$K[\mathbf{x}]^n$ を環 $K[\mathbf{x}]$ の直積だと考えると，

$$I := \{\boldsymbol{h} \in K[\mathbf{x}]^n \mid \mathrm{ht}\,(\boldsymbol{h}) > 0\}$$

は $K[\mathbf{x}]^n$ のイデアルである．$K[\mathbf{x}]^n$ の I 進位相に関する $\mathrm{T}(n, K)$ の閉包を $\overline{\mathrm{T}(n, K)}$ で表す．

定理 (Anick)**.** $\mathrm{char}\, K = 0$ のとき，$\overline{\mathrm{T}(n, K)} = \mathcal{J}$ である．

この定理と同様の主張が $\mathrm{char}\, K > 0$ の場合に成り立つかどうか知られていない．本修士論文では $\mathrm{char}\, K > 0$ の場合の状況を探るための研究を行った．次が主結果である．

定理. $\mathrm{char}\, K = 2$ のとき (1) で定義される永田の自己同型は $\overline{\mathrm{T}(3, \mathbf{F}_2)}$ に属する．

参考文献

[1] Anick, David J. Limits of tame automorphisms of $k[x_1, \cdots, x_N]$. J. Algebra 82 (1983), no. 2, 459–468. MR0704764

[2] H. W. E. Jung, Über ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. **184** (1942), 161–174. MR0008915

[3] W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables, Nieuw Arch. Wisk. (3) **1** (1953), 33–41. MR0054574

[4] Nagata, Masayoshi. On automorphism group of $k[x, y]$. Department of Mathematics, Kyoto University, Lectures in Mathematics, No. 5. Kinokuniya Book Store Co., Ltd., Tokyo, 1972. v+53 pp. MR0337962

[5] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 1, 197–227. MR2015334