# 概念系の数学的構造について

## ——FCA とその周辺の研究から——

浅野将秀（首都大学東京）

首都大学東京論理学・数学の哲学研究会

@首都大学東京　2018 年 12 月 19 日

※ 2019 年 1 月　発表時の質問・コメント等に基づいて一部加筆・修正

# はじめに

- 本発表は [Zhang2004] で与えられる結果の大枠の紹介である.
- 発表中の定理等の番号は特に断りのないかぎり [Zhang2004] のもの.
- 話題：情報科学における重要分野である
  - Chu 空間
  - 形式概念分析（FCA）／概念束
  - ドメイン理論（とくに，情報系 information system の概念）

  の基本的な関係.

# アウトライン

1. 登場人物
   - Chu 空間
   - 形式概念分析（FCA）
   - 情報系と情報状態（from ドメイン理論）
2. 三者の関係
   - Chu 空間と FCA
   - Chu 空間と情報系
   - 情報状態と概念

1. 登場人物
   - Chu 空間
   - 形式概念分析（FCA）
   - 情報系と情報状態（from ドメイン理論）
2. 三者の関係
   - Chu 空間と FCA
   - Chu 空間と情報系
   - 情報状態と概念

# Chu 空間

- Chu 空間：次のような三つ組 $P = (P_o, \models_P, P_a)$ のこと.
  - $P_o$：「対象」の集合
  - $P_a$：「属性」の集合
  - $\models_P \subseteq P_o \times P_a$
- 色々な呼び名：
  - 「分類 classifiction」（チャンネル理論）
  - 「（形式的）コンテクスト」（FCA）

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ✓ | | | |
| 2 | | ✓ | | ✓ |
| 3 | ✓ | ✓ | ✓ | |
| 4 | ✓ | ✓ | | ✓ |

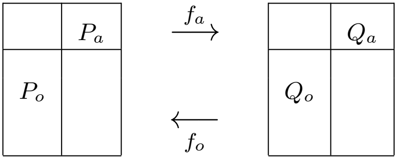
# Chu 写像

- 2 つの Chu 空間 $P = (P_a, \models_P, P_a), Q = (Q_o, \models_Q, Q_a)$ を考え,

$$\begin{aligned} f_a &: P_a \to Q_a \\ f_o &: Q_o \to P_o \end{aligned}$$

  とする.
- このとき，(*) が成り立つ $(f_a, f_o)$ を $P$ から $Q$ への Chu 写像と言う.

$$(*) \quad \forall x_{\in P_a} \forall y_{\in Q_o} (f_o(y) \models_P x \Leftrightarrow y \models_Q f_a(x))$$




- チャンネル理論の「情報同型写像 infomorphism」は Chu 写像のこと.

1. 登場人物
   - Chu 空間
   - 形式概念分析（FCA）
   - 情報系と情報状態（from ドメイン理論）
2. 三者の関係
   - Chu 空間と FCA
   - Chu 空間と情報系
   - 情報状態と概念

# 形式概念分析（FCA）

- Chu 空間の形で与えられたデータを順序論的に分析する手法のひとつ.
- 基本となる操作：

  内包操作 $\alpha(B) = \{a \mid \forall x_{\in B}(x \models_P a)\} \quad (B \subseteq P_o)$
  外延操作 $\omega(A) = \{o \mid \forall x_{\in A}(o \models_P x)\} \quad (A \subseteq P_a)$

- （形式的）概念の定義：「外延と内包の統一」

$$A \subseteq P_a \text{は（属性）概念である} \Leftrightarrow \alpha \circ \omega(A) = A$$
$$B \subseteq P_o \text{は（対象）概念である} \Leftrightarrow \omega \circ \alpha(B) = B$$

# 概念束の基本性質

- $\mathcal{A}$ と $\mathcal{O}$ を次のように定める：

$$\mathcal{A} = \{\alpha \circ \omega(A) \mid A \subseteq P_a\} \quad \text{（属性概念の集合）}$$

$$\mathcal{O} = \{\omega \circ \alpha(B) \mid B \subseteq P_o\} \quad \text{（対象概念の集合）}$$

- このとき，概念束 concept lattice $(\mathcal{A}, \subseteq)$ ／ $(\mathcal{O}, \subseteq)$ について以下の定理が成り立つ.
  - ふつうは以下の定理に基づいて，概念を属性概念と対応する対象概念の組とし，二つの概念束を「重ね合わせる」(詳細は次ページの例を参照).

**Theorem 3.5 (Wille)**

1. $(\mathcal{A}, \subseteq)$ は $P_a$ を最大元とする完備束
2. $(\mathcal{O}, \subseteq)$ は $P_o$ を最大元とする完備束
3. $(\mathcal{A}, \subseteq)$ と $(\mathcal{O}, \subseteq)$ は反同型.

- 1 と 2 の証明は，$(\alpha, \omega)$ がガロア接続であり，それゆえ $\alpha \circ \omega / \omega \circ \alpha$ が閉包作用素であることにより与えられる.
- 伝統的な概念論における「内包と外延の反比例」をよく体現している.

# 例（[SM2007], p. 104）

表 1.1　コンテクスト表

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | × | | | |
| 2 | | × | × | | × |
| 3 | × | × | × | | × |
| 4 | × | | × | × | |
| 5 | | × | × | × | × |

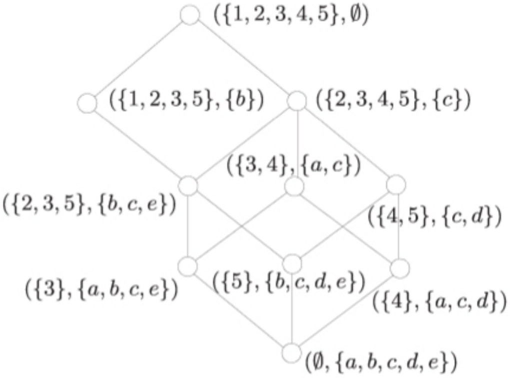



図 1.3　コンセプトラティス

1 登場人物
- Chu 空間
- 形式概念分析（FCA）
- 情報系と情報状態（from ドメイン理論）

2 三者の関係
- Chu 空間と FCA
- Chu 空間と情報系
- 情報状態と概念

# 情報系 information system

- ドメイン理論における基本概念のひとつ.

- 情報系：次のような三つ組 $\underline{A} = (A, Con, \vdash)$ のこと.
  - $A$：トークンの集合
  - $Con$：無矛盾性述語（ただし $Con \subseteq \mathrm{Fin}(A)$）
  - $\vdash \subseteq Con \times A$：帰結関係

- $Con$ と $\vdash$ の公理：

1. $X \subseteq Y \ \& \ Y \in Con \Rightarrow X \in Con$
2. $a \in A \Rightarrow \{a\} \in Con$
3. $X \vdash a \ \& \ X \in Con \Rightarrow X \cup \{a\} \in Con$
4. $a \in X \ \& \ X \in Con \Rightarrow X \vdash a$
5. $\forall b_{\in Y}(X \vdash b) \ \& \ Y \vdash c \Rightarrow X \vdash c$

- $Con$ は下のような具合で無限集合を含むように拡張できる：

$$X \in Con \Leftrightarrow \forall Y (Y \subseteq_{\mathrm{fin}} X \Rightarrow Y \in Con)$$

# 情報状態 information state

- $F : Con \to Con$ を次のように定める（ここでの $Con$ は拡張されたもの）：

$$F(X) = \{a \mid \exists Y (Y \subseteq_{\text{fin}} X \;\&\; Y \vdash a)\}$$

- $F(X)$ なる形の集合を「$\underline{A}$ における情報状態」と言う.
- 基本的性質：
  - $F(X) \in Con$
  - $\forall a_{\in A}(F(X) \vdash a \Rightarrow a \in F(X))$

**Theorem 4.3 (Scott)**

$\underline{A}$ を情報系とし，$\mathcal{S}$ を $\underline{A}$ の情報状態からなる集合とする．このとき，

1. $(\mathcal{S}, \subseteq)$ はスコットドメイン（有界完備かつ代数的な cpo）である.
2. 任意のをスコットドメイン $(D, \sqsubseteq)$ について，適当な $(\mathcal{S}, \subseteq)$ が存在し $(D, \sqsubseteq) \cong (\mathcal{S}, \subseteq)$ である.

1. 登場人物
   - Chu 空間
   - 形式概念分析（FCA）
   - 情報系と情報状態（from ドメイン理論）

2. 三者の関係
   - Chu 空間と FCA
   - Chu 空間と情報系
   - 情報状態と概念

# Chu 空間と FCA

- FCA と Chu 理論は（ほぼ）同じ研究対象から始まったが，関心の相違から別々の方向に進んでいる：
  - FCA：「表」の内側にある構造（概念系）
  - Chu 理論：複数の「表」のあいだの関係
    - Chu 理論は圏論に起源をもつ．
- より正確には，Chu 理論の研究対象はより一般的な行列構造であり，FCA と合流するのはその一部（2 値 Chu 空間）．
- Example 3.6：Chu 写像は概念を保存しない（Chu 写像はそのままの形では「情報保存的な」写像としてかなり不十分なところがある）．

# Example 3.6

| $P$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | |

| $Q$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | $\times$ |

- 反例：上のような Chu 空間 $P, Q$ を考え $f : P_a \to Q_a$ と $g : Q_o \to P_o$ を

$$f(x) = x \quad (x \in P_a)$$

$$g(y) = 1 \quad (y \in Q_o)$$

  と定義する.

- このとき，$(f, g)$ は $P$ から $Q$ への Chu 写像ではあるが，概念を保存しない.

# Example 3.6（続）

| $P$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | |

| $Q$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | $\times$ |

- Chu 写像性：$\forall x_{\in P_a} \forall y_{\in Q_o} (g(y) \models_P x \Leftrightarrow y \models_Q f(x))$

  ($\Rightarrow$) $y \models_Q f(x)$ すなわち $y \models_Q x$ であることを示せばよいが，$Q$ の表をみればどの対象もすべての属性もつので OK.

  ($\Leftarrow$) $g(y) \models_P x$ すなわち $1 \models_P x$ であることを示せばよいが，$P$ の表をみれば対象 1 はすべての属性をもつので OK.

# Example 3.6（続）

| $P$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | |

| $Q$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | $\times$ |

- 概念の非保存性：

$$
\begin{aligned}
\alpha_P(\omega_P(\{a\})) &= \alpha_P(\{o \mid \forall y_{\in\{a\}}(o \models_P y)\}) \\
&= \alpha_P(\{o \mid o \models_P a\}) \\
&= \alpha_P(\{1,2\}) \\
&= \{a \mid \forall x_{\in\{1,2\}}(x \models_P a)\} \\
&= \{a\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_Q(\omega_Q(\{a\})) &= \alpha_Q(\{o \mid \forall y_{\in\{a\}}(o \models_Q y)\}) \\
&= \alpha_Q(\{o \mid o \models_Q a\}) \\
&= \alpha_Q(\{1,2\}) \\
&= \{a \mid \forall x_{\in\{1,2\}}(x \models_Q a)\} \\
&= \{a,b\}
\end{aligned}
$$

# Chu 空間と情報系

- Chu 空間 $P = (P_o, \models_P, P_a)$ をもとに，$(A_P, Con_P, \vdash_P)$ をつくる：

$$\begin{array}{rcl} A_P & = & P_a \\ Con_P & = & \wp(P_a) \\ X \vdash_P a & \Leftrightarrow & \forall x_{\in P_o}(x \models_P X \Rightarrow x \models_P a) \end{array}$$

※ $x \models_P X \Leftrightarrow \forall b_{\in X}(x \models_P b)$

- このとき，$(A_P, Con_P, \vdash_P)$ は情報系である．（Theorem 4.6）
  - 公理を満たすことを順次確認していけばよい．

1 登場人物
- Chu 空間
- 形式概念分析（FCA）
- 情報系と情報状態（from ドメイン理論）

2 三者の関係
- Chu 空間と FCA
- Chu 空間と情報系
- 情報状態と概念

# 情報状態と概念

**Theorem 4.7**

$P = (P_o, \models_P, P_a)$ を $P_a$ が有限集合であるような Chu 空間とする．このとき，

$$X \subseteq P_a \text{ は概念} \iff X \text{ は } (A_P, Con_P, \vdash_P) \text{ の情報状態}$$

**Lemma 4.5**

$X \in Con_P, a \in A_P$ について，

$$\text{任意の } X \vdash_P a \iff a \in \alpha_P \circ \omega_P(X)$$

$$\begin{aligned}
X \vdash_P a \quad & \iff \quad \forall x_{\in P_o}(x \models_P X \Rightarrow x \models_P a) \\
& \iff \quad \omega_P(X) \subseteq \omega_P(\{a\}) \\
& \iff \quad \alpha_P \circ \omega_P(\{a\}) \subseteq \alpha_P \circ \omega_P(X) \\
& \iff \quad a \in \alpha_P \circ \omega_P(X)
\end{aligned}$$

# 情報状態と概念

**Theorem 4.7**

$P = (P_o, \models_P, P_a)$ を $P_a$ が有限集合であるような Chu 空間とする．このとき，

$$X \subseteq P_a \text{ は概念} \iff X \text{ は } (A_P, Con_P, \vdash_P) \text{ の情報状態}$$

[⇒] $X$ の $\vdash_P$ 閉性を確認すればよい．（$X \in Con_P$ は自明．）

$$\begin{aligned} X \vdash_P a \quad &\Rightarrow \quad a \in \alpha_P \circ \omega_P(X) \quad \cdots \text{Lemma 4.5} \\ &\Leftrightarrow \quad a \in X \quad (\because X \text{ は概念}) \end{aligned}$$

[⇐] $\vdash_P$ 閉性より，

$$\begin{aligned} \forall a_{\in P_a}(X \vdash_P a \Rightarrow a \in X) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall a_{\in P_a}(a \in \alpha_P \circ \omega_P(X) \Rightarrow a \in X) \quad \cdots \text{Lemma 4.5} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha_P \circ \omega_P(X) \subseteq X \end{aligned}$$

$(\alpha_P, \omega_P)$ はガロア接続であるから $X \subseteq \alpha_P \circ \omega_P(X)$．よって $X = \alpha_P \circ \omega_P(X)$．

# 情報状態と概念

- 情報系 $\underline{A} = (A, \wp(A), \vdash)$ から Chu 空間を構成する：

$$\begin{array}{rcl} P_o & = & \underline{A}\text{の情報状態の集合} \\ P_a & = & A \\ x \models a & \Leftrightarrow & a \in x \end{array}$$

- 内包操作と外延操作：

$$\begin{array}{rcl} \omega(Y) & = & \{x \mid \forall y(y \in Y \Rightarrow x \models y)\} = \{x \mid Y \subseteq x\} \\ \alpha(X) & = & \{a \mid \forall x_{\in X}(a \in x)\} \end{array}$$

- 概念の要件：$\alpha \circ \omega(Y) = \{a \mid \forall x(Y \subseteq x \Rightarrow a \in x)\} = Y$
  - これは $Y$ が $\underline{A}$ の情報状態であることに等しい.

# 有限性条件について

**Theorem 4.7**

$P = (P_o, \models_P, P_a)$ を $P_a$ が有限集合であるような Chu 空間とする．このとき，

$$X \subseteq P_a \text{ は概念} \Longleftrightarrow X \text{ は } (A_P, Con_P, \vdash_P) \text{ の情報状態}$$

- 無限の場合を考えると，情報状態と概念は必ずしも一致しない．
- 背景：情報状態の束と概念束の違い
  - 情報状態束：スコットドメインを形成し，それゆえ代数的．
    - $a \in D$ がコンパクトである $\Longleftrightarrow \forall X_{\in \mathrm{Dir}(D)}(a \sqsubseteq \bigsqcup X \Rightarrow \exists x(x \in X \ \& \ a \sqsubseteq x))$
    - cpo $(D, \sqsubseteq)$ が代数的である $\Longleftrightarrow$
      $\forall d_{\in D} \exists X (X \in Dir(D) \ \& \ \forall x(x \in X \Rightarrow Compact(x)) \ \& \ d = \bigsqcup X))$
  - 概念束：完備束であるが必ずしも代数的ではない．

# Example 4.8

- 代数的でない完備束（左）を考え，表現定理（Theorem 4.1）に則り，その概念束が同型となるような Chu 空間（右）をつくる（図と表は [Zhang2004] から，$\uparrow x$ は「$x$ の上方集合」という意味）.

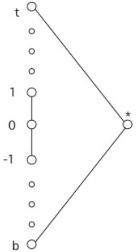



Fig. 1. A complete lattice which is not algebraic

| $P$ | $\uparrow t$ | $\uparrow b$ | $\uparrow *$ | $\uparrow 0$ | $\uparrow 1$ | $\uparrow 2$ | $\cdots$ | $\uparrow -1$ | $\uparrow -2$ | $\uparrow -3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | × | × | × | × | × | × | $\cdots$ | × | × | × | $\cdots$ |
| b | | × | | | | | $\cdots$ | | | | $\cdots$ |
| $*$ | | × | × | | | | $\cdots$ | | | | $\cdots$ |
| 0 | | × | | × | | | $\cdots$ | × | × | × | $\cdots$ |
| 1 | | × | | × | × | | $\cdots$ | × | × | × | $\cdots$ |
| 2 | | × | | × | × | × | | × | × | × | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |
| -1 | | × | | | | | | × | × | × | $\cdots$ |
| -2 | | × | | | | | | | × | × | $\cdots$ |
| -3 | | × | | | | | | | | × | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

# Example 4.8

- どの $X \subseteq_{\mathrm{fin}} \{\uparrow i \mid i \geq 0\}$ についても，$\uparrow * \notin \alpha \circ \omega(X)$．よって $X \not\vdash \uparrow *$ であり（Lemma 4.5），$\uparrow * \notin F(\{\uparrow i \mid i \geq 0\})$
  - 例えば，$X = \{\uparrow 0, \uparrow 1\}$ とすると

$$\begin{aligned} \omega(X) &= \{1, 2, 3, \ldots, t\} \\ \alpha \circ \omega(X) &= \{\uparrow 1\} \end{aligned}$$

- 他方で $\uparrow * \in \alpha \circ \omega(\{\uparrow i \mid i \geq 0\})$

$$\begin{aligned} \omega(\{\uparrow i \mid i \geq 0\}) &= \{t\} \\ \alpha \circ \omega(\{\uparrow i \mid i \geq 0\}) &= P_a \end{aligned}$$

- ある意味でコンパクト性が失われている．

| $P$ | $\uparrow t$ | $\uparrow b$ | $\uparrow *$ | $\uparrow 0$ | $\uparrow 1$ | $\uparrow 2$ | $\cdots$ | $\uparrow -1$ | $\uparrow -2$ | $\uparrow -3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | × | × | × | × | × | × | $\cdots$ | × | × | × | $\cdots$ |
| b | | × | | | | | $\cdots$ | | | | $\cdots$ |
| $*$ | | × | × | | | | $\cdots$ | | | | $\cdots$ |
| 0 | | × | | × | | | $\cdots$ | × | × | × | $\cdots$ |
| 1 | | × | | × | × | | $\cdots$ | × | × | × | $\cdots$ |
| 2 | | × | | × | × | × | | × | × | × | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |
| -1 | | × | | | | | | × | × | × | $\cdots$ |
| -2 | | × | | | | | | | × | × | $\cdots$ |
| -3 | | × | | | | | | | | × | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

# 参考文献


[BS1997] J. Barwise & J. Seligman, *Information Flow: the logic of distributed systems*, Cambridge UP, 1991.

[DP2002] B. A. Davey & H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order* (2nd ed.), Cambridge UP, 2002.

[GW1999] B. Ganter & R. Wille, *Formal Concept Analysis*, Springer, 1999.

[SM2007] 鈴木治&室伏俊明, 「形式概念分析：入門・支援ソフト・応用」, 『知能と情報（日本知能情報ファジィ学会誌）』, 19:2, pp. 103-142, 2007.

[Zhang2004] G-Q. Zhang, ‘Chu Spaces, Concept Lattices, Domains’, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 83, 2004.