

クォーク自由度と結合したハドロン間ポテンシャル
によるエキゾチックハドロンの解析

Analysis of exotic hadrons with hadron-hadron
potentials coupled to quark degrees of freedom

東京都立大学理学研究科 物理学専攻

寺島 伊吹

2023年1月10日

概要

クォークとはそれ以上わけることができない素粒子の 1 つであり、強い相互作用により複数結合することでハドロンと呼ばれる状態を構成する。クォーク間ポテンシャルはクォーク間距離が無限大で発散するような閉じ込めのポテンシャルであることが予想される。一方、ハドロン間ポテンシャルは、ハドロン間距離が無限大で消えるような散乱のポテンシャルであることが期待される。クォーク間ポテンシャルとハドロン間ポテンシャルの研究は、それぞれが独立に発展してきた。

ところが、同じ量子数を持つ状態の混合が制限されることはないため、2 つの自由度が混合したポテンシャルの研究なしでは強い相互作用を正しく理解できない。実際、2003 年にエキゾチックハドロン $X(3872)$ と呼ばれるクォーク 4 つを含むと考えられる粒子が発見された。 $X(3872)$ の内部構造は、クォーク自由度の状態と、ハドロン自由度の状態とが混合された状態であると期待される。

そこで本研究ではフェッシュバッハの方法に従い、クォーク自由度とハドロン自由度のチャンネル結合問題を含むハミルトニアンを定式化し、2 つの自由度が混合した有効ポテンシャルを導出する。その後、各有効ポテンシャルがエネルギー依存であり、相互作用前後の位置関係が変化する非局所型ポテンシャルであることを示す。

しかし、非局所型ポテンシャルは物理系への応用や相互作用の性質解明が難しいので、局所型ポテンシャルへと近似変換する。本研究では formal 微分展開と呼ばれるテイラー展開を用いた直接的な近似手法と、HAL QCD 法と呼ばれる波動関数からポテンシャルを求める近似手法の 2 つの定式化する。更に、変換するポテンシャルとして、分離・湯川型ハドロン間有効ポテンシャルを用いて解析的な表式を導出する。

最後にエキゾチックハドロン解析として、得られた有効ポテンシャルをエキゾチックハドロンのひとつである $X(3872)$ へ応用する。その結果、各有効ポテンシャルのエネルギー依存性が弱いことを示す。更に、局所近似された 2 つのポテンシャルを比較した結果、ポテンシャルやそこから計算される物理量である位相差が異なることを示す。

目次

第 1 章	導入	5
1.1	研究背景	5
1.1.1	原子核ハドロン物理の研究	5
1.1.2	ハドロン間ポテンシャルの研究	6
1.1.3	カラーの閉じ込めとクォーク間ポテンシャルの研究	8
1.1.4	エキゾチックハドロン	10
1.1.5	チャンネル結合問題	12
1.2	本研究の目的と方法	13
1.2.1	チャンネル結合	14
1.2.2	局所近似	14
1.2.3	$X(3872)$ の構造研究	15
1.3	本論文の流れ	16
第 2 章	クォーク間ポテンシャル	17
2.1	現象論的クォーク間ポテンシャル	17
2.2	強結合展開によるカラーの閉じ込め	18
2.2.1	概要	18
2.2.2	格子 QCD	18
2.2.3	ウィルソンループ	21
2.2.4	強結合展開による評価	24
2.2.5	強結合展開の定式化	24
2.2.6	プラケットによる打ち消し	27
2.2.7	結論	30
2.3	格子 QCD によるクォーク間ポテンシャル	31
2.3.1	格子 QCD 数値計算によるカラーの閉じ込め	31

2.3.2	格子 QCD 数値計算による無限に重いクォークのポテンシャル . . .	33
第 3 章	ハドロン間ポテンシャル	36
3.1	ハドロン間ポテンシャル研究の歴史	36
3.1.1	核子間ポテンシャル	36
3.1.2	格子 QCD によるハドロン間ポテンシャル	38
3.2	X(3872) に関する研究の現状	40
第 4 章	ポテンシャルのチャンネル結合	45
4.1	導入	45
4.2	チャンネル結合の定式化	46
4.3	ハドロン間有効ポテンシャルの性質	48
4.4	クォーク間有効ポテンシャルの性質	50
4.5	結論	53
第 5 章	ポテンシャルの局所近似	55
5.1	局所ポテンシャルと非局所ポテンシャル	55
5.2	分離・湯川型を用いた非局所型ポテンシャルの解析解	57
5.2.1	シュレーディンガー方程式	57
5.2.2	散乱波動関数の計算	58
5.2.3	位相差の計算	62
5.3	formal 微分展開	64
5.4	HAL QCD 法	65
5.4.1	定式化	65
5.4.2	湯川型ポテンシャルの場合	67
5.4.3	ゼロエネルギー極限のポテンシャル	68
5.5	ハドロン間ポテンシャルへの応用	69
5.5.1	位相差の計算	70
5.5.2	局所近似	71
第 6 章	数値計算	73
6.1	X(3872) を扱うモデルの定式化	73
6.1.1	ポテンシャルの定式化	73
6.1.2	位相差 δ の定式化	77

6.2	$X(3872)$ を用いた数値計算の結果	77
6.2.1	formal 微分展開によるポテンシャル $V^{\text{formal}}(r, E)$	77
6.2.2	HAL QCD 法によるポテンシャル $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$	78
	$V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ のエネルギー依存性	78
	$V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ の発散	79
6.2.3	formal 微分展開と HAL QCD 法の比較	83
	$V^{\text{formal}}(r, E)$ と $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ の比較	83
	位相差の比較	85
第 7 章 まとめと展望		87
Appendix A		90
A.1	2 章の計算	90
A.1.1	I の計算	90
A.1.2	$\langle W \rangle$ の計算	91
A.2	5 章の計算	92
A.2.1	$\langle V \mathbf{k} \rangle$ の計算	92
A.2.2	$\langle \mathbf{r} G_k V \rangle$ の計算	93
A.2.3	$\langle V G_k V \rangle$ の計算	95
A.3	6 章の計算	96
Appendix B		97
B.1	6 章における数値計算手法	97
参考文献		101

第 1 章

導入

1.1 研究背景

本節では、原子核物理とハドロン物理に関する歴史や最近の研究を紹介することで、本研究の背景を説明する。また本研究の動機となる、カラーの閉じ込めとエキゾチックハドロンとチャンネル結合という 3 つの問題を紹介する。なお、本研究においては、ディラック定数 \hbar と光速 c を $\hbar = c = 1$ とした自然単位系をとる。自然単位系では長さと同時間単位で表される。同様に、質量とエネルギーと運動量も同じ単位で表される。

1.1.1 原子核ハドロン物理の研究

強い相互作用は、陽子と中性子が非常に小さな原子核を構成することを説明するために導入された。当時知られていた力である重力では小さな原子核を構成するには弱すぎるうえ、電磁気力は正の電荷を持つ陽子どうしを反発させてしまう。また、中性子は電荷を持たないので電磁気力は働かない。そこで当時の研究者は陽子や中性子の間に新しい力が働き、原子核を作ると考え、その新しい力に「核力」という名前を付けた。問題は、その核力が何によって生じるのか、つまりその起源は何なのか、ということであった。それに解答を与えたのが、日本の湯川秀樹であった。彼は 1935 年の論文 [1] で、電磁気力が仮想的な光子の交換で生じるという機構を核力に適応し、仮想的な未知の粒子の交換により核力が生じるという理論を提唱した。更に核力の到達距離から未知の粒子は電子の質量と陽子の質量の間であると予想したため、湯川の理論は「中間子論」と呼ばれた。仮想的な粒子であった中間子が実際に π 中間子として見つかったことで、湯川の間子論の正しさが証明され、1949 年に日本人として初めてノーベル賞 (物理学) を受賞した。核力の基本的

な性質は知られていたものの、湯川はその本質が π 中間子交換にあるという物理的な描像を与えた。このように、相互作用に注目することで中間子論は核力の構造を解明した。最近の研究において、例えばニホニウムに代表される超重元素の構造解析や中性子星の状態方程式の導出なども核力の理解が深まるにつれ発展していくと期待される。

その後、物質の最小構成単位である素粒子のひとつが、クォークであることがわかった。クォークは強い相互作用に支配されており、そのふるまいは QCD (Quantum Chromodynamics) によって記述される。QCD のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{q}(iD_\mu\gamma^\mu - m)q - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

と表され第 1 項はクォークを、第 2 項はグルーオンを記述している。グルーオンもまた、素粒子のひとつである。高エネルギー領域における QCD は摂動論的方法により、展開の高次の寄与を無視して記述することができ、実際に解析的な計算が実験を再現できる。例えば、宇宙創成期の状態や、高エネルギー衝突実験により生成されるクォーク・グルーオンプラズマは摂動展開による QCD を直接適用することができる。しかし、自然界のような低エネルギー状態では摂動展開ができないため、QCD から物理量を直接計算することは難しい。更にカラーの閉じ込めと呼ばれる未解明の性質の存在によって、クォークは単離できないため実験的に観測できない。よって、低エネルギーでの強い相互作用を QCD から直接理解することは未だ困難である。

低エネルギーで実際に観測される状態は、クォークが複数結合したハドロンである。ハドロンには π 中間子のような、クォークと反クォークの 2 つで構成されるメソン (中間子) と、陽子や中性子のようなクォーク 3 つで構成されるバリオンが含まれる。核子間に働く核力と同様に、ハドロン間にも強い相互作用がはたらいっている。欧州原子核研究機構 (CERN) の大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) や日本の大強度陽子加速器施設 (J-PARC) などによる高エネルギー加速器の粒子衝突実験により、ハドロン間相互作用の解明が進展している。京や富嶽といったスーパーコンピュータの登場により、離散化された空間上の QCD である、格子 QCD による第一原理計算を低エネルギーハドロン物理に適用することで、ハドロン間相互作用の理論的な研究が、近年ますます進展している [2]。

1.1.2 ハドロン間ポテンシャルの研究

QCD からハドロン間ポテンシャルを定義し、それを計算する方法は近年 (2006 年以降) になって提案され、現在精力的に研究が進められている。この方法は研究グループ (Hadron to Atomic nuclei from Lattice QCD) の名前をとって、HAL QCD 法と呼ばれ

ている。ただし、基礎理論である QCD から直接ポテンシャルを計算することは自明ではない。なぜなら質量や散乱の位相差などは物理量であるのに対し、ハドロン間ポテンシャルは直接実験で測ることができないからである。つまり、ハドロン間ポテンシャルは観測可能な物理量ではないのである。ここでの問題は、QCD という場の量子論から量子力学のポテンシャルに対応する物理量をどのように定義し、どのように計算するかということである。一般にはポテンシャル (ハミルトニアンやラグランジアン) はインプットであり、そこから物理量の計算を行うのに対し、ハドロン間ポテンシャルはインプットではなく、QCD から計算されるアウトプットなのである。

例として散乱が弾性散乱のみの最も単純な場合を考える。つまり、粒子の数や種類が変化しない散乱である。逆に、非弾性散乱が起こらないためには、散乱の全エネルギーが非弾性散乱チャンネルの閾値以下になるようにすればよい。この条件を課すことで、粒子の数や種類が変化するという場の量子論に特徴的な現象が起こらないようにすることができ、場の量子論である QCD を実質的に量子力学的な系として扱えるようになる。また、ハドロン間ポテンシャル $V^h(r)$ は、最も軽い交換粒子の質量 m_H を用いて $V^h(r) = K_h \cdot \exp[-m_H r]/r + \dots$ のように遠方でゼロに収束する散乱ポテンシャルになることが期待される。更に、質量がゼロのハドロンが観測されていないため、短距離力のみでポテンシャルを定義することができる。

以上のような前提や仮定の元で、HAL QCD 法によるポテンシャルの定義をまとめると [3, 4, 5]、以下ようになる。

1. まず、量子力学の波動関数に対応する量として、ハドロン間の南部・ベーク・サルペータ (NBS) 波動関数を QCD でのハドロン 4 点関数から定義する。NBS 波動関数は 2 つのハドロンの距離が大きくなると、量子力学での 2 つの自由粒子の波動関数のように振る舞う。したがって、遠距離では、量子力学の散乱波と同じで位相差が現れるが、その位相差は QCD から計算されるハドロン散乱の位相差と一致する。
2. NBS 波動関数は、2 つの粒子間の距離が近いと自由粒子の振る舞いからずれる。このずれを与えるようなポテンシャルを NBS 波動関数から定義する。HAL QCD 法ではポテンシャルは系のエネルギーには依存しないように定義されるが、その代わりポテンシャルは非局所型となる。逆に、ポテンシャルがエネルギー依存となるような、局所型ポテンシャルを定義することもできる。

従って格子 QCD で NBS 波動関数を数値計算すれば、QCD に基づいたハドロン間ポテンシャルを得ることができる。ただし実際の数値計算においては、非局所型ポテンシャルを

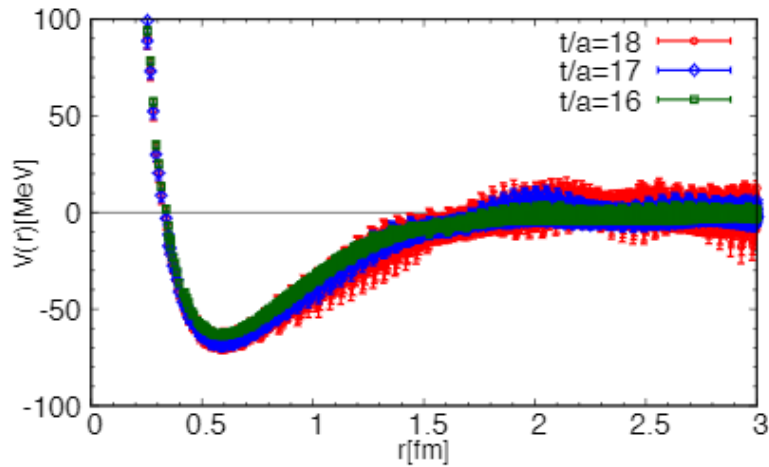


図 1.1 $\Omega\Omega$ の 1S_0 チャンネルのポテンシャル $V(r)$ を $t/a = 16, 17, 18$ で計算した図。
 $2+1$ フレーバー QCD を $m_\pi \simeq 146$ MeV で計算。[6] から引用。

局所型ポテンシャルに近似することでハドロン間ポテンシャルを求めている (5 章参照)。

ハドロン間ポテンシャルの例として、格子 QCD から計算された、オメガバリオン間 ($\Omega\Omega$) ポテンシャル [6] を図 1.1 に載せる。ここでオメガバリオン (Ω) とは、 s クォーク 3 つからなるバリオンである。図より、格子 QCD によるバリオン間ポテンシャルにおいても、 r が十分大きい遠方でポテンシャルが 0 に収束する散乱のポテンシャルであるという、ハドロン間ポテンシャルの一般的性質が反映されていることがわかる。

1.1.3 カラーの閉じ込めとクォーク間ポテンシャルの研究

前節では、ハドロン間ポテンシャルにおける最近の研究を紹介した。では、その構成要素であるクォーク間のポテンシャルはどうであろうか？ クォークとはそれ以上わけることができない素粒子の 1 つであり、重力・電磁気力・弱い力・強い力の 4 つの基本相互作用の影響を受ける。クォーク同士はグルーオンという質量のない粒子の交換により強い相互作用をする。

クォークとグルーオンはそれぞれカラーチャージ (または単にカラー) を有しておりカラーは色の三原色にならって赤、緑、青と表現される。また、反クォークもその補色である反赤、反緑、反青というカラーをもつ。歴史的には、カラーという新しい自由度はバリオン Δ^{++} においてパウリの排他原理を満たすために南部とハンによって導入された [7]。

自然界においてはクォークは単独で存在しておらず、必ずカラーが白色 (無色) になる

ように組み合わせられたハドロンとして存在している。クォーク (q) と反クォーク (\bar{q}) がそれぞれ 3 表現と $\bar{3}$ 表現なので、メソン $q\bar{q}$ とバリオン (qqq) は、

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \text{ (メソン)}, \quad (1.2)$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \text{ (バリオン)}, \quad (1.3)$$

のようなカラー表現となっており、いずれもカラー白色となる一重項のハドロンとしてのみ観測されている。これをカラーの閉じ込めとよび、その原理が未解決な問題である。この問題は質量ギャップ問題として知られており、それはヤンミルズ理論の存在と、カラー白色の状態のグルーオンの結合体 (グルーボール) が有限質量を持つことの証明問題に還元される。

カラーの閉じ込めは、無限に重いクォーク間ポテンシャルを用いて記述できる [8]。距離 R だけ離れたクォーク・反クォークのエネルギーをポテンシャルエネルギー $V(R)$ として定義する。もし $V(R) \propto R$ のような R の 1 次按比例する線形ポテンシャルとなれば、クォーク・反クォークを引き離すのに無限のエネルギーが必要となるので閉じ込めの状態であると言える。逆に、QCD の摂動論によりクォーク間ポテンシャルを計算すると $1/R$ に比例するポテンシャルとなるので閉じ込めが起こらない。つまり、閉じ込めは QCD の非摂動的な性質である。

また、チャーモニウム ($c\bar{c}$) スペクトラムの実験結果から、現象論的にクォーク間ポテンシャルが求められた。このポテンシャルは r が小さいところでは r^{-1} の項が優位であり十分大きな r では r^1 が優位であるようなポテンシャルが用いられ、

$$V^q(r) = -A/r + \sigma r + V_0, \quad (1.4)$$

と、 $V^q(r)$ はクーロン + 線形となることが予想された [9]。式 1.4 のクォーク間ポテンシャルも、距離 r が無限大の遠方で発散するので、実験に基づいて求められたクォーク間ポテンシャルも閉じ込めを表現していることがわかる。

このように現象論的にクォーク間ポテンシャルの理解は進んでいたものの、QCD の非摂動的な性質により、QCD に基づいたクォーク間ポテンシャルの計算は進んでいなかった。しかし、格子 QCD と計算機技術の発展により、QCD の数値計算をすることが可能となった。結果として、無限に重いクォーク間ポテンシャルが、(1.4) 式のようにクーロン + 線形となることが QCD の数値計算から示された。更に、無限に重いクォーク間ポテンシャルの string-breaking [10] (2.3.2 節参照) や HAL QCD 法を応用した有限質量のクォーク間ポテンシャル [11, 12] など、さまざまなポテンシャルが数値計算がされたことでクォーク間ポテンシャルの理解が進展した。

1.1.4 エキゾチックハドロン

前節 1.1.3 でみたように、カラーの閉じ込めによりクォークは自然界では単体で存在できないため、クォークが複数結合したハドロンとして存在する。ハドロンはクォーク・反クォークペア ($q\bar{q}$) のメソンと、クォーク 3 つ (qqq) が結合したバリオンに分類され、実験的に約 300 種類が観測されている。しかし、強い相互作用を記述する基礎理論である QCD には、これらメソン・バリオン以外の構造を抑制する機構はない。実際、粒子を 4 つ以上含む、より複雑な内部構造を持つハドロンはエキゾチックハドロンと呼ばれ、研究の対象となってきた [13]。歴史的にはマルチクォーク状態の可能性は 1964 年に Gell-Mann が発表したクォーク模型の原論文ですでに指摘されていた [14]。1970 年代初めには理論的計算結果に基づくエキゾチックハドロンの存在の可能性が予測されており、例えば、クォーク 2 つと反クォーク 2 つ ($qq\bar{q}\bar{q}$) のテトラクォークや 2 つのメソンの束縛状態もしくは共鳴状態であるメソン分子や、自由度としてグルーオンの励起状態を加えたハイブリッド構造などが研究された [15, 16, 17, 18, 19, 20]。しかし、理論的な予想がありつつも半世紀近くも実験的に観測されることはなかった。

ところが、高エネルギー e^+e^- 衝突の実験データが日本の B -factory で高統計に得られたことをきっかけに、状況は一変した [21]。2003 年になりようやく、高エネルギー加速器研究機構 (KEK) の Belle 実験により観測された $X(3872)$ を皮切りとして、クォークが 4 つ含まれると期待される X, Y, Z 状態が次々と実験的に観測されている。興味深いことに、同時期にペンタクォーク Θ^+ バリオンの観測も報告され、 $X(3872)$ と共に理論・実験の双方から様々な研究が行われることになった。これらの状態はエキゾチックハドロンの候補と考えられている。

$X(3872)$ は $J/\psi\pi\pi$ へ崩壊するため、チャームクォークペア ($c\bar{c}$) を含むハドロンとして考えられている。重いチャームクォークの発見以前は、軽いクォークである u, d, s クォークが QCD のスケールである数百 MeV と同程度の軽い質量であるため、エキゾチックハドロン研究の状況はやや複雑になる。一方で、 c, b クォークの質量は大きく、それぞれ約 1.5 GeV、約 5 GeV である。これらの質量は QCD スケールから大きく離れているため、重いクォークで構成される状態の波動関数に基づく記述がよく確立されている。重いクォーク系に対する静的ポテンシャルを持つクォーク模型の成功は、非相対論的 QCD (NRQCD) [22] またはポテンシャル非相対論的 QCD (pNRQCD) [23] によって正当化される。

図 1.2 にチャーモニウムのスペクトラムが X, Y, Z 粒子と共に示されている。実験的に

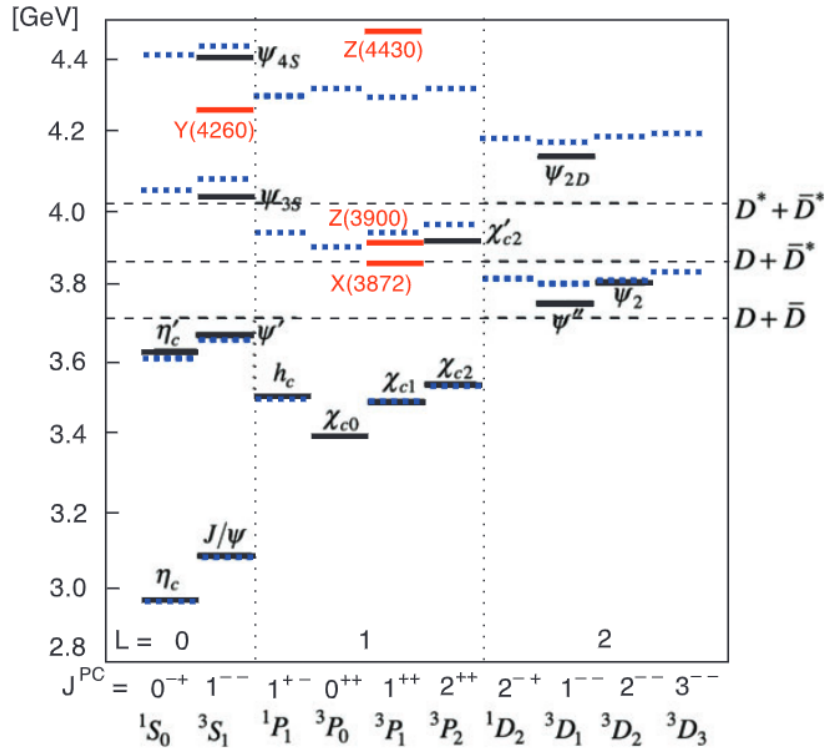


図 1.2 チャーモニウムの状態 (黒実線) と X, Y, Z 状態 (赤い実線) と $c\bar{c}$ クォークモデルの状態 (青い点線)。[24] から引用。

観測されたスペクトルを実線で示し、従来のクォーク自由度のみの $q\bar{q}$ クォークモデルの予測値 (点線) と比較してある [24]。

$D\bar{D}$ 、 $D\bar{D}^*$ 、 $D^*\bar{D}^*$ といったオープンチャーム^{*1}の閾値以下では、実験と理論がかなりの精度で一致している。逆に、閾値付近や閾値以上では状況が変わり、うまく一致していない。さらに、オープンチャーム (崩壊) チャンネルとの結合は、裸の $c\bar{c}$ 状態に強く影響すると期待される。カラーの閉じ込めにより、オープンチャームを作るには、必ず軽い $q\bar{q}$ ペアを生成し、チャームメソン D 、もしくは D^* を形成する必要がある。ただし、より現実に近い理論的記述をするためには、オープンチャームメソンに対して、クォークonium の様な状態とのチャンネル結合を用いる必要がある。

観測された $X(3872)$ の質量は $D\bar{D}^*$ 生成の閾値に非常に近いため、荷電チャンネル $D^\pm D^{*\mp}$ と中性チャンネル $D^0\bar{D}^{*0}$ の質量の差がアイソスピン対称性の破れに大きく影響する。また、中性チャンネルが、荷電チャンネルよりも閾値に近いということは、中

^{*1} c クォークの量子数が含まれているメソンのこと

性チャンネルが支配的であることを示唆している。このことが、アイソスピン $I = 0$ と $I = 1$ のチャンネルの混合を引き起こす。

$X(3872)$ を、 D メソンと \bar{D}^* メソンの分子状態であるとするのが最も広く認識されている描像である。実際に崩壊幅や崩壊分岐比といった実験データが集まってくるにつれ、量子数 $J^{PC} = 1^{++}$ を持つチャーモニウム状態 (クォーク自由度) と $D\bar{D}^*$ 分子状態 (ハドロン自由度) とが混合した状態こそが、 $X(3872)$ の内部構造であるとする仮説が主流となってきた。

このように、エキゾチックハドロンは次々と観測されているうえ、エキゾチックハドロンの構造解析も $X(3872)$ に代表されるように、進展をみせている。しかし、依然としてエキゾチックハドロンの観測が高々数個に留まり、通常のハドロンであるバリオンやメソンの観測数 (およそ 300 種類) と比べて、極端に少ない理由は未解明である。エキゾチックハドロンの解析から QCD の非摂動的な性質の更なる理解に迫ることができると期待される。

1.1.5 チャンネル結合問題

ハドロン間相互作用は中間子が粒子間で交換される核力の描像に基づいて研究され、ハドロン自由度のみを含むポテンシャルで通常ハドロンを対象とした散乱実験を高精度に再現した [25]。同様に、クォーク間相互作用も、クォーク自由度のみを含む研究が通常ハドロンの実験のスペクトルを再現した [24]。このように、クォーク自由度のみやハドロン自由度のみによるポテンシャルの研究は格子 QCD による第一原理計算も含めて多くの研究が行われている。

ところが、ハドロン自由度とクォーク自由度の結合は QCD で制限されていないにもかかわらず、従来の枠組みに明示的に含まれていない。よって、既存の体系に含まれないエキゾチックハドロンの構造解析が、片方の自由度だけを含むこれまでの議論のみで成功する保証はどこにもない。特に、クォークポテンシャルに注目するときにはハドロン生成の閾値効果が、ハドロンポテンシャルに注目したときにはクォークによる結合状態がどのような影響を与えるのかを明らかにすることが望まれている。

QCD から計算したクォーク間ポテンシャルには QCD が含むうるすべての自由度、特にクォーク自由度とハドロン自由度が両方含まれているはずである。なぜなら、同じ量子数をもつ状態は全て混合し得るからである。よって、系があからさまに含んでいない、同じ量子数を持つハドロン状態からの寄与が含まれているはずである。特に、ハドロン生成の閾値近傍ではエネルギーが近い状態が混合している可能性が高いと考えられる。一

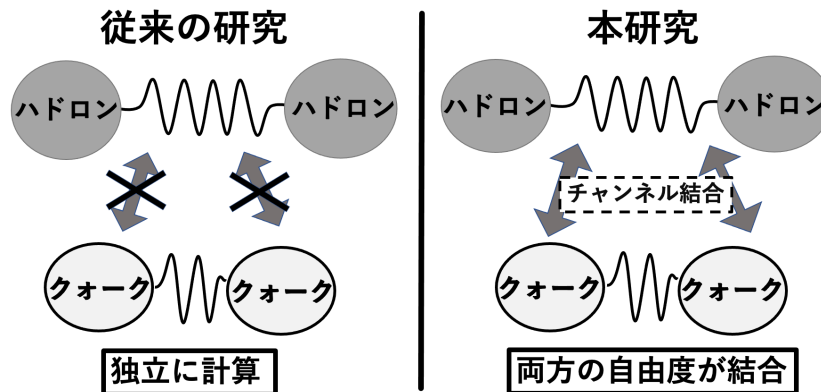


図 1.3 従来の研究手法 (左) と本研究手法 (右) の比較の模式図。

方で QCD から導出されるハドロン間ポテンシャルも、クォーク自由度の影響を含んでいると考えられている。格子 QCD は QCD を第一原理として、非摂動的な寄与を全て含んだ計算になっている。つまり、格子 QCD から計算されたポテンシャルもまた、複数の自由度を内包していると期待される。例えば、1.1.2 節でみた格子 QCD による $\Omega\Omega$ ポテンシャル (図 1.1) もやはり、クォーク自由度による相互作用の情報が含まれているはずである。従って、ハドロン間ポテンシャルにおけるクォーク自由度の影響がどれほど含まれているかを調べることでハドロンの内部構造を明らかにすることができる。実際に、クォーク自由度の状態とハドロン自由度の状態とが混合された状態であると期待される $X(3872)$ が観測されたことで、チャンネル結合によるポテンシャル研究がエキゾチックハドロンの更なる理解を助ける。

1.2 本研究の目的と方法

本研究では、既存研究では無視されることの多かったクォーク自由度とハドロン自由度のチャンネル結合問題を考える (図 1.3 左)。まず、フェッシュバツハの方法 [26, 27] に従い、両方の自由度を含む有効相互作用の導出を定式化する。得られる有効ポテンシャルが非局所型であることがわかるので、物理系への応用や相互作用の性質解明のため、2つの変換手法を用いて局所型へと近似する。最後に、定式化により得られた結果をエキゾチックハドロン $X(3872)$ へと応用する。数値計算により得たポテンシャルや物理量を議論することで、研究をまとめる。

1.2.1 チャンネル結合

例えば 1.1.4 節で見たように、一般にあるハドロン状態に対して、その量子数が許す限り、異なる状態が混合することができる。複数の状態の混合は閾値近傍のハドロンを考えるとときに典型的に生じる問題である。状態の混合を適切に切り取るためには、チャンネル結合問題を定式化することが必要である。ハドロン物理の目的のひとつは、異なる自由度の結合した状態がどこでどのように現れるかを明らかにすることで、観測データを明確な物理的メカニズムで説明することであると言える。そして、クォークとハドロンの結合によって生じる、未だ解明されていない QCD の非自明な側面を明らかにする必要がある。

本研究では、クォーク自由度とハドロン自由度がチャンネル結合した問題を定式化する(図 1.3 右)。更に、クォーク自由度のみで表された、(ハドロン自由度が結合した)クォーク間有効ポテンシャルの導出する。加えて、ハドロン自由度のみで表された、(クォーク自由度が結合した)ハドロン間有効ポテンシャルの導出する。その後、各有効ポテンシャルの性質を解析的に調べる。

1.2.2 局所近似

クォーク自由度とハドロン自由度が結合したハミルトニアンから、クォーク自由度が陽に現れないように消去して得るハドロン間有効ポテンシャルは、座標空間で非局所型になり、エネルギーに依存することがわかる [26, 27, 28]。

しかし、非局所型ポテンシャルを用いてシュレーディンガー方程式を解くためには、積分と微分を両方含む方程式を解かなければならないため、計算コストが大きいという欠点がある。実際、図 1.1 における格子 QCD の計算においても、(格子 QCD の計算一般に言えることであるが、)非局所型ポテンシャルを完全に決定するためには莫大な計算コストが要求されるため、局所型へと近似されたポテンシャルが実際の数値計算で用いられている。

また、例えば初等量子力学でシュレーディンガー方程式を解く際に利用される井戸型ポテンシャルのように、局所型ポテンシャルを図示することで相互作用の到達距離や、引力や斥力といった特徴を端的に理解することができる。一方で非局所型ポテンシャルの性質を理解する一般的なフレームワークは存在しない。よって、相互作用の理解という点において局所ポテンシャルは非局所ポテンシャルより優れている。

本研究では、得られた非局所型ポテンシャルを局所型ポテンシャルに変換する 2 つの手

法を議論する。すなわち、formal 微分展開と呼ばれるテイラー展開を用いた直接的な近似手法と、波動関数を経由してポテンシャルを求める近似手法の HAL QCD 法による微分展開 (以降、単に HAL QCD 法と呼ぶ) の 2 つを比較・検討する。本研究においては非局所型ポテンシャルとして分離型でかつ湯川型に分類されるポテンシャルを用いる。更に、変換するポテンシャルとして、非局所型ハドロン間有効ポテンシャルを用いる場合の解析的な表式を導出する。

1.2.3 $X(3872)$ の構造研究

ポテンシャルを定量的に議論するためには、実際の物理系へと応用することで、実験値や先行研究の結果と比較しなければならない。本研究では、エキゾチックハドロン $X(3872)$ を再現するような、 $c\bar{c}$ 状態と結合した非局所型の $D^0\bar{D}^{*0}$ ポテンシャルを用意する。更に、2 つの変換手法により局所近似されたハドロン間有効ポテンシャルを数値計算により評価し、得られたポテンシャルの性質や 2 つのポテンシャルの比較を行う。また、ポテンシャルごとに、物理量である散乱の位相差を計算し、厳密解と比較することで近似の妥当性を議論する。

本研究でポテンシャルを $X(3872)$ へと応用する理由を以下に挙げる。

1. $X(3872)$ では両方の自由度の量子数が同じであることから、クォーク自由度とハドロン自由度が混在していると、多くの研究者が期待している状態である。従って、クォーク自由度とハドロン自由度のチャンネル結合問題を考える本研究を検証するために最適な粒子である。
2. X, Y, Z はそれぞれ、クォークと反クォークが計 4 つ含まれていると予想される状態である。従って、エキゾチックハドロンの構造解析を始めるに際し、 X, Y, Z の構成粒子は、最も少ない粒子数であるため、理論の基礎を作るのに適している。
3. $X(3872)$ は X, Y, Z 粒子の中で最も、実験的にも理論的にも研究が進んでいる粒子である。 X, Y, Z の中でもエネルギーが低いため実験が比較的容易であるため、加速器による実験データも豊富にある。理論的には、クォーク自由度であるクォークoniumの理論も、ハドロン自由であるメソン分子の理論も豊富に存在している。

以上のような議論により、 $X(3872)$ のモデルに対応した局所型有効ポテンシャルと物理量を得ることで、エキゾチックハドロンの構造解析を実施することが本研究の最終目的である。

1.3 本論文の流れ

本論文は以下のように構成されている。

2章では、クォーク間ポテンシャルの研究に関する歴史を紹介する。まず、現象論的なクォークポテンシャルが閉じ込めの性質を表していることを確認する。次に、強結合展開を用いた閉じ込めの研究を紹介する。その後、格子 QCD による計算が無限に重いクォーク間ポテンシャルの string-breaking を示すことを紹介する。

3章では、ハドロン間ポテンシャルの研究に関する歴史を紹介する。まず、現象論的な核子間ポテンシャルを紹介し、ハドロン間ポテンシャルの格子 QCD による計算結果が現象論的ポテンシャルと同様の性質をもつことをみる。また、 $X(3872)$ に関する最近の研究を紹介する。ここでは、 $X(3872)$ がクォークコニウムと呼ばれるクォーク自由度の状態と、メソン同士が分子のように結合したハドロン自由度の状態とが混合された状態であるという仮説が、最も有力であるということを述べる。

4章ではまず、文献 [26, 27] に従い、チャンネル結合問題を含むハミルトニアンを定式化する (4.2 節)。更にそこから、各自由度の寄与を抽出した有効ポテンシャルの導出を行う (4.3, 4.4 節)。

5章では得られたポテンシャルを物理系へ応用するために、局所型ポテンシャルへの近似変換を定式化する。まず、局所型ポテンシャルと非局所型ポテンシャルの定義を確認し (5.1 節)、分離・湯川型の非局所型ポテンシャルにおける波動関数や位相差を導出する (5.2 節)。その後、formal 微分展開と HAL QCD 法の定式化を行う。また、4章で求めた有効間ポテンシャルへと応用する (5.3, 5.4 節)。

6章においては実際に $X(3872)$ のモデルを構築する (6.1 節)。更に、モデルを用いて数値計算を行い、研究結果をまとめる (6.2 節)。

第 2 章

クォーク間ポテンシャル

本章では、クォーク間ポテンシャルに関する歴史と、最近の研究を紹介する。まず、現象論的なクォークポテンシャルが閉じ込めの性質を表していることを確認する。次に、解析的な手法により閉じ込めを示すことができる、強結合展開を紹介する。その後、格子 QCD によるクォーク間ポテンシャルの計算が、クォークが無限に重い場合で閉じ込めを表す string-breaking を示すことができることを紹介する。

2.1 現象論的クォーク間ポテンシャル

この節では論文 [29] に基づきクォーク間ポテンシャルを紹介する。クォーク間ポテンシャルは

$$V^{\bar{c}c}(r) = -\frac{A}{r} + \sigma r + V_0 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty \quad (2.1)$$

のようにクォーク間距離 r が無限大で発散するような、閉じ込めのポテンシャルであると考えられている。また、式 (2.1) のように、線形項 (r の 1 次) とクーロン項 (r の (-1) 次の足し合わせとなっているポテンシャルを、コーネル (Cornell) ポテンシャル [9]

$$V(r) = -\frac{e}{r} + \sigma r, \quad (2.2)$$

と呼ぶ。ここで、 r はクォークonium状態の有効半径で e および σ は各項からの寄与の大きさを表すパラメータである。このポテンシャルは、短距離では質量のない 1 グルーオン交換が支配的であるから、電磁気力のようなクーロン力になることと、長距離では閉じ込めのためポテンシャルが際限なく増え続けるという、2つの性質を反映するように現象論的に決定されたポテンシャルである。パラメーターを適切に選ぶことで、クォークのもつ

2つの側面を示すことができるため、広く知られたポテンシャルである。

2.2 強結合展開によるカラーの閉じ込め

2.2.1 概要

本節では、文献 [8] に従い、クォーク間ポテンシャルエネルギーに線形な項が含まれることによりクォークにカラーの閉じ込めがおきることを導く。なお、クォーク間相互作用を QCD から直接計算することが困難であるため、格子上の時空間における QCD である格子 QCD (Lattice QCD) をもとに議論を進める。

まず、2.2.2、2.2.3 節では格子 QCD を定式化していく。ここではゲージ場 A_μ を用いて格子空間上の点を結ぶリンク変数を定義しプラケットと呼ばれる格子上における最小のループを導入する。これと作用を利用して分配関数を求め、最終的にウィルソンループ演算子を定義する。そしてこの演算子の期待値を求めることによりポテンシャルエネルギーがわかることを導出する。

更に 2.2.4、2.2.5、2.2.6 節においては強結合展開と呼ばれる手法を用いてウィルソンループの期待値を展開して実際に計算する。その過程において展開の一次では積分がゼロになってしまうことやリンク変数の積分計算を利用するためにプラケットをおくと、ループが次々と小さくなり遂には期待値を計算できることがわかる。計算の結果、面積則によってポテンシャルに線形項が現れることを示す。

次に、格子 QCD と呼ばれる離散化されたユークリッド時空における QCD についての定式化を行う。まず、格子 QCD を導入するにあたって必要となるリンク変数 $U_\mu(n)$ を定義する。これはゲージ場 A_μ とゲージ結合定数 g を用いて定義される。続いてループ状にリンク変数を繋げることでトレースで表現されるプラケット $U_{\mu\nu}$ を導入する。格子上のグルーオンの作用 S_g をプラケットで表し、ヤンミルズ理論の分配関数 Z を定義する。

次に、ウィルソンループ演算子 W を導入する。これは、時間方向に T 空間方向に R だけの幅をもった経路上のリンク変数の積で定義され、粒子の生成消滅に対応している。更にクォーク反クォーク対の相関関数 I を用いることで期待値 $\langle W \rangle$ がポテンシャルエネルギーと比例関係 $\langle W \rangle \propto e^{-V(R)T}$ にあることを導く。

2.2.2 格子 QCD

ここでは空間が格子状に離散化されたユークリッド時空 (図 2.1) における QCD を考える。このような QCD は格子 QCD と呼ばれている。格子間隔を a として、場の変数とし

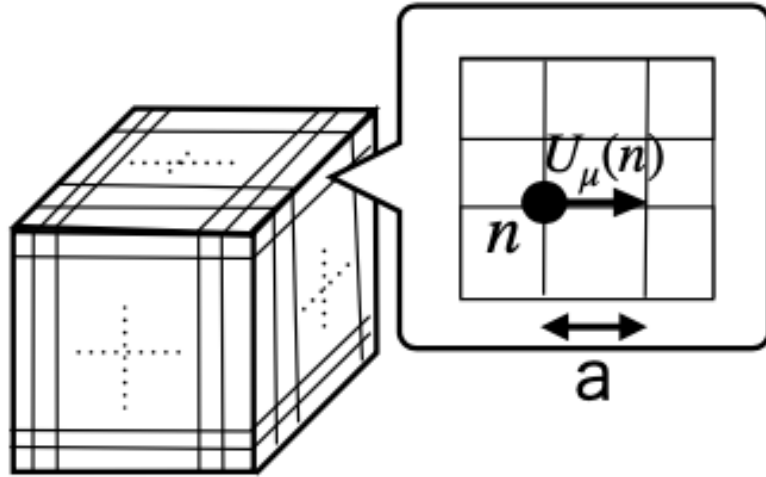


図 2.1 離散化されたユークリッド時空の模式図。虚時間と空間で構成された格子空間を表している。本来は空間は 3 方向であるが、2 次元平面上に図示するため簡略化されている。

てゲージ結合定数 g を用いたカラー空間で 3×3 の行列であるリンク変数

$$U_\mu(n) = e^{igaA_\mu(n)}, \quad (2.3)$$

を用いてゲージ場 A_μ が辺上に定義されている。ここで、下付きの添字 μ でリンク変数が結ぶ方向を示し、 n は格子点をラベルをする変数である。例えば、図 2.2 のような格子間

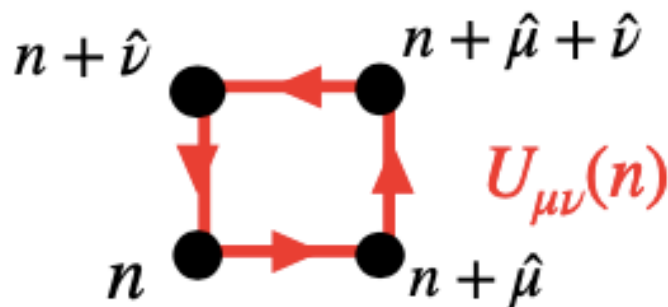


図 2.2 プラケット

隔 a で結ばれた最小のループであるプラケットは、閉じたループであるから連続した添字をもつ行列の掛け算となり、そのような行列 $A_{ij}B_{ji} = [AB]_{ii} = \text{tr}[AB]$ のようにトレー

ス (対角成分の和) にすることができるので、

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}U_{\mu\nu}(n) &= \mathrm{tr}[U_{\mu}(n) \cdot U_{\nu}(n + \hat{\mu}) \cdot U_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu}) \cdot U_{-\nu}(n + \hat{\nu})] \\ &= \mathrm{tr}[U_{\mu}(n) \cdot U_{\nu}(n + \hat{\mu}) \cdot U_{\mu}^{\dagger}(n + \hat{\nu}) \cdot U_{\nu}^{\dagger}(n)],\end{aligned}\quad (2.4)$$

となる。なお、 U^{\dagger} は逆向きに進むリンク変数 $U_{\mu}(n + \hat{\mu}) = [U_{\mu}(n)]^{\dagger}$ を表す。ここで、 $\bar{\mu}$ は μ と反対方向に結ぶことを表す。

さらに、格子上のヤンミルズ理論の分配関数 Z を

$$Z = \int [dU] \mathrm{Det} F[U] e^{-S_g(U)}, \quad (2.5)$$

と、定義する。ここで、 $\mathrm{Det}F[U]$ は U の汎関数 F の全ての添字について取られるべきである。QCD においてはクォークとグルーオンはクォーク場を積分して $\mathrm{Det}[F]$ となるので、しばしば $\mathrm{Det} F[U] = 1$ となるクエンチ近似をとる。この近似は仮想クォークの励起やクォークループの効果を無視するような近似である。ヤンミルズ理論ではクォークは含まれずグルーオンのみが寄与するため、最初から $\mathrm{Det}[F] = 1$ となっている。(であるから、ヤンミルズ理論を用いた。) ここで S_g とはゲージ不変なグルーオンの作用であり、プラケットをもとにして、

$$S_g = \frac{2N_c}{g^2} \sum_p \left(1 - \frac{1}{N_c} \mathrm{Re} \mathrm{tr} U_{\mu\nu}(n)\right), \quad (2.6)$$

と定義される。ここで、 \sum_p とは、ループ内に含まれるプラケットの足し合わせを意味している。 S_g は $\frac{1}{g^2}$ に比例している。格子間隔が無限小の連続極限をとると、 S_g は、

$$\begin{aligned}S_g &= \frac{2N_c}{g^2} \sum_p \left(1 - \frac{1}{N_c} \mathrm{Re} \mathrm{tr} U_{\mu\nu}(n)\right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mu \neq \nu} \int F_{\mu\nu}^b(x) F_{\mu\nu}^b(x) d^4(\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (2.7)$$

と、格子間隔が 0 の連続極限 $a \rightarrow 0$ においてヤンミルズ作用となる。ここで、 S_g を求めるプラケットとしてはひとつの向きだけの回転を考えればよい。なぜなら、実数部分だけを考えればよいので、

$$\begin{aligned}\mathrm{Re} \mathrm{tr}U_{\mu\nu} &= \frac{\mathrm{tr}U_{\mu\nu} + (\mathrm{tr}U_{\mu\nu})^*}{2} \\ &= \frac{\mathrm{tr}U_{\mu\nu} + \mathrm{tr}U_{\mu\nu}^{\dagger}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{tr}U_{\mu\nu} + \mathrm{tr}U_{\nu\mu}}{2},\end{aligned}\quad (2.8)$$

となり、両方の回転を含むので。ここで、 U^\dagger が U の逆回転になっていることを用いた。

このように定義された空間上において実際にクォーク間ポテンシャルに線形なポテンシャルが出てくるか議論していく。

2.2.3 ウィルソンループ

次に、リンク変数を結ぶ演算子としてウィルソンループ $W(C)$ を導入する。これは図 2.3 のような空間方向に R 、時間方向に T だけの幅を持ったループ状の演算子であり、無限に重いカラーソースが生成されて距離 R だけ時間 T の間飛んだあと消滅することに対応している。この演算子の期待値は

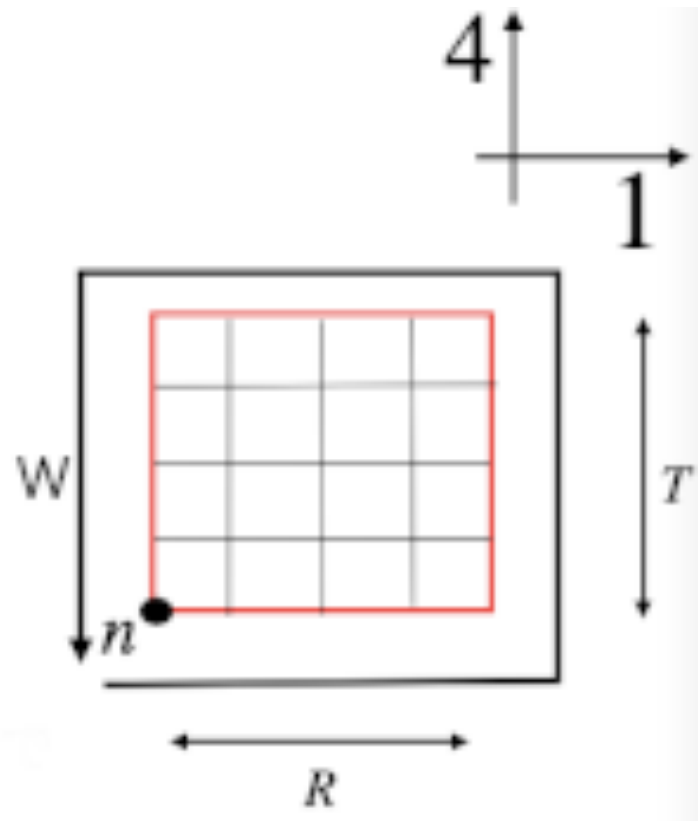


図 2.3 ウィルソンループの図。4 方向は虚時間である。図 W は、矢印で表される経路 C 上で期待値をとることを表す。

$$\begin{aligned}
 \langle W(C) \rangle &= \frac{1}{Z} \int [dU] W(C) e^{-S_g(U)} \\
 &= \frac{1}{Z} \int [dU] \text{tr} \prod U_\mu(n) e^{-S_g(U)},
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

で得られる。(熱統計力学の分配関数の性質に似ている。)ここで、距離 R だけ離れた無限に重いクォーク反クォーク対の相関関数 I を考える。無限に重いので運動エネルギーは無視してよく、

$$R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad (2.10)$$

$$x_4 = y_4 = 0, \quad (2.11)$$

$$x'_4 = y'_4 = T, \quad (2.12)$$

とすると、

$$\begin{aligned} I &= \langle M(y', x') M^\dagger(x, y) \rangle \\ &\propto \sum_n e^{-E_n T} \\ &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} e^{-E_0 T}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

のような関係にある。 $M(x, y)$ は時刻 x_4 に位置 \mathbf{x} でクォークを、時刻 y_4 に位置 \mathbf{y} に反クォークを生成する演算子として定義される。 MM^\dagger は距離 $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ だけ離れた粒子反粒子対が時間 T だけ飛んだあと消えるような生成消滅演算子のようなものであり、各状態のエネルギーを足し合わせることで計算されるが十分に時間が経過したあとだと基底状態へと落ち着くため、そこでのエネルギー (の指数) に比例する。

ここで、 E_0 を静止エネルギーとポテンシャルエネルギーの和とすれば、

$$I \propto e^{-V(R)t}, \quad (2.14)$$

となり、相関関数がマイナスでポテンシャルエネルギーかける時間の指数関数に比例していることがわかる。さらに、ミンコフスキー空間においては、 m_Q を静止質量エネルギーとして、

$$E_0 T = (2m_Q + V(R))T \xrightarrow{\text{ミンコフスキー}} -i \cdot (2m_Q + V(R)) \cdot T,$$

となる。この計算を具体的にする。まず M が以下で与えられる。

$$M(x, y) = \bar{Q}(x) \gamma U_p(x, y; A) Q(y), \quad (2.15)$$

ここで、 $Q(x)$ は質量 m の重いクォークであり、 γ は任意のガンマ行列、そして $U_p(x, y; A)$ は粒子がゲージ場 $A_\mu = A_\mu^a t^a$ 上を経路 P に沿って点 y_μ から点 x_μ へと進む時間発展演算子でありミンコフスキー空間におけるウィルソンラインである。更に、A.1 節より、

$$[M(x, y)]^\dagger = \bar{Q}(y) \bar{\gamma} U_p^\dagger(x, y; A) Q(y) Q^\dagger(x); (\gamma^0 \gamma^\dagger \gamma^0 = \bar{\gamma}), \quad (2.16)$$

であるから、A.1.1 節より、

$$I = \langle \text{tr}_c \text{tr}_s [S(y, y') \gamma U_p(y', x'; A) S(x', x) \bar{\gamma} U_p(x, y; A)] \rangle, \quad (2.17)$$

となる。ここで、 $S(x', x) = \langle Q(x') \bar{Q}(x) \rangle [S(y, y')]$ はクォークプロパゲーターであり、正 [負] のエネルギー状態のプロジェクトン演算子 $\lambda_{\pm} = (1 \pm \gamma_0)/2$ を含んでおり、

$$[\gamma_0 (i \frac{\partial}{\partial x'_0} - g A_0(x')) - m_Q] S(x', x) = \delta^4(x' - x), \quad (2.18)$$

を満たす。さらに一階の微分方程式は

$$\begin{aligned} i S(x', x) &= U_p(x', x; A_0) \delta^3(x' - x) \\ &\times [\theta(x'_0 - x_0) e^{-im_Q(x'_0 - x_0)} \lambda_+ + \theta(x_0 - x'_0) e^{im_Q(x'_0 - x_0)} \lambda_-], \end{aligned} \quad (2.19)$$

と解ける。ここで、正 [負] のエネルギークォークプロパゲーターは時間の正 [負] 方向にしか進まないという境界条件を課すと、 $S(y, y')$ は λ_- のみを含み $S(x', x)$ は λ_+ のみを含む。以上より、

$$\begin{aligned} I &\propto \langle \text{tr}_c \text{tr}_s [U_P(y, y' : A_0) \delta^3(y - y') e^{im(y - y')} \lambda_- \gamma U_p(y', x'; A) \\ &\quad \times U_P(x', x : A_0) \delta^3(x' - x) e^{-im(x' - x)} \lambda_+ \bar{\gamma} U_p(x, y; A)] \rangle, \end{aligned} \quad (2.20)$$

である。 $U_P(\cdot, \cdot : A_0)$ はカラーの成分だけを含み λ_{\pm} と γ はスピンだけの要素を含むので、

$$I \propto \text{tr}_s [\lambda_- - \gamma \lambda_+ \bar{\gamma} e^{-2imT}] \times \langle \text{tr}_c [U_P(y, y' U_P(y', x') U_P(x', x) U_P(x, y))] \rangle \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} &\propto e^{-i(2m_Q + V(R))T} \\ &\propto e^{-V(R)T}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

となり相関関数 I が $e^{-V(R)T}$ と比例関係にあることを示した。更に、式 (2.21) のカラーに関するトレースをよくみると U_P がループ状になっていることがわかるので、ここから $\langle W(C) \rangle$ を定義することができるので、

$$I \propto \langle W \rangle, \quad (2.23)$$

となることがわかる。式 (2.22) と式 (2.23) より

$$\langle W \rangle \propto e^{-V(R)T}, \quad (2.24)$$

の関係があることがわかった。以上の議論により、ウィルソンループの期待値を求めることができれば、そこからクォーク間ポテンシャルを知ることができるということが明らかになった。次章からはこの期待値を具体的に求めていく。

2.2.4 強結合展開による評価

これからの節では前節までで定義したウィルソンループ演算子の期待値 $\langle W \rangle$ を計算する。最初に、強結合展開と呼ばれる手法を用いて期待値を展開計算する。これは低エネルギー状態ではゲージ結合定数 g が十分大きいので作用 $S_g (\propto \frac{1}{g^2})$ が十分小さいことを利用して指数関数 e^{-S_g} を級数展開する。展開の一次だけを考えると積分計算により 0 になってしまうことがわかる。次に 2 次までを考えると相対するリンク変数が相殺されることで積分計算ができることを導く。

その後、先程の積分計算に必要な相殺されるリンク変数をおくためにプラケットをループ内において計算する。こうした計算によってプラケット分相殺された新たなループの期待値計算となるのでこれを繰り返すことで知りたい期待値を求めることができる。求めた期待値からポテンシャル V が計算されるが、このポテンシャルが距離 R に線形に比例していることがわかるのでカラーの閉じ込めを示すことになる。

2.2.5 強結合展開の定式化

多くの場合、結合定数が十分小さいとする弱結合展開が利用される。この場合、摂動展開によって議論される。今回は、結合定数 g が十分大きく、無限大の極限をとることができるとする。この場合、 $S_g \propto \frac{1}{g^2} \ll 1$ であるから、

$$e^{-S_g} = 1 - S_g + \frac{S_g^2}{2} + \dots, \quad (2.25)$$

と展開することができる。このような展開を強結合展開とよび、この議論の核になっている。これを利用することで W の期待値を計算することができる。ここで、展開の最低次を考えると

$$\langle W \rangle = \frac{1}{Z} \int [dU_1(n) \dots] \text{tr}[U_1(n) \dots] (1 - \dots), \quad (2.26)$$

となるが、ここで

$$\int dU U_{ij} = A_{ij}; (A_{ij} = \text{const.}), \quad (2.27)$$

を考える。 $U_{ij} \rightarrow V_{ki}U_{ij}$ と変換すると、

$$\begin{aligned}
\int dU V_{ki} U_{ij} &= V_{ki} A_{ij} \\
\int d[VU] V_{ki} U_{ij} &= V_{ki} A_{ij} ; \left(\int d[UV] = \int dU = \int d[VU] \right) \\
\int d[U'] U'_{kj} &= V_{ki} A_{ij} \\
A_{kj} &= V_{ki} A_{ij} \\
A &= 0,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

となり、被積分関数と同じ添字をもつ微少量で積分すると 0 になり

$$\int dU_{\mu}(n') U_{\mu}(n') = 0, \tag{2.29}$$

であることがわかるので、

$$\langle W \rangle = 0, \tag{2.30}$$

となり期待値の評価をすることができなくなってしまう。次に、1 次までの S_g を考えると、

$$\begin{aligned}
\langle W \rangle &= \frac{1}{Z} \int [dU_1(n) \cdots] \text{tr}[U_1(n) \cdots] (1 - S_g + \cdots) \\
&= \frac{1}{Z} \int [dU_1(n) \cdots] \text{tr}[U_1(n) \cdots] \frac{-2}{g^2} (\text{Re tr}[U_1^\dagger(n) \cdots]) + \cdots,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

となる。ここで、 S_g にはループ内全てのプラケットの足し合わせの項があったので、どこかに必ずある $U_1^\dagger(n)$ を取ってきている。同様に、

$$dU U_{ij} U_{kl}^{dag} = A_{ijkl}, \tag{2.32}$$

を考える。ここで U, U^\dagger をそれぞれ次のように変換する。

$$\begin{aligned}
U &\rightarrow LUR = L_{ni} U_{ij} R_{jm} \\
U^\dagger &\rightarrow R^\dagger U^\dagger L^\dagger = R_{pk}^\dagger U_{kl}^\dagger L_{lo}^\dagger,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$A_{ij} A_{jk}^\dagger = \delta_{ik}$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
dU U_{ij} U_{kl}^\dagger &= \int dU L_{ni} U_{ij} R_{jm} R_{pk}^\dagger U_{kl}^\dagger L_{lo}^\dagger \\
&= L_{ni} R_{jm} R_{pk}^\dagger L_{lo}^\dagger A_{ijkl} \\
&= \delta_{il} \delta_{jk} A_{ijkl},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

である。ここで

$$A_{ijkl} = B\delta_{jk}\delta_{il} \quad (B=\text{const.}) \quad (2.35)$$

とおくと、積分は、

$$\begin{aligned} \int \cdots &= L_{ni}U_{ij}R_{jm}R_{pk}^\dagger U_{kl}^\dagger L_{lo}^\dagger B\delta_{jk}\delta_{il} \\ &= BR_{pj}^\dagger R_{jm}L_{ni}L_{io}^\dagger \\ &= B\delta_{pm}\delta_{no}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} A_{ijk\ell}\delta_{jk} &= B\delta_{jk}\delta_{il}\delta_{jk} \\ &= B\delta_{jj}\delta_{il} \\ &= BN_C\delta_{il}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる (δ_{jj} は単位行列のトレース。ここではカラーの数 N_C だけの幅をもった単位行列であるから、 $\delta_{jj} = N_C$)。一方で

$$\begin{aligned} \int dUU_{ij}U_{kl}^\dagger\delta_{jk} &= \int dUU_{ik}U_{kl}^\dagger \\ &= \int dU\delta_{il} \\ &= \delta_{il}; \left(\int dU = 1\right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

であるから、

$$\begin{aligned} BN_C\delta_{il} &= \delta_{il} \\ B &= \frac{1}{N_C}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

であること、つまり同じ添字をもつ行列とそのダガー行列をこれらと同じ添字をもつ微少量で積分すると $\frac{1}{N_C}\delta_{il}\delta_{jk}$ がでてくる

$$\int dU_\mu(n) \cdots [U_\mu(n)]_{ij}[U_\mu^\dagger(n)]_{kl} = \frac{1}{N_C}\delta_{il}\delta_{jk} \quad (2.40)$$

の関係があることが導けたので、式 (2.29) は 0 にならず期待値評価をすることができることがわかった。

つまり、強結合展開を用いてウィルソンループの期待値を評価する場合、リーディングオーダー（第一次）では潰れてしまうが、それ以上大きなオーダーを取ると計算することができるということになる。次からはこれを具体的に計算していく。

2.2.6 プラケットによる打ち消し

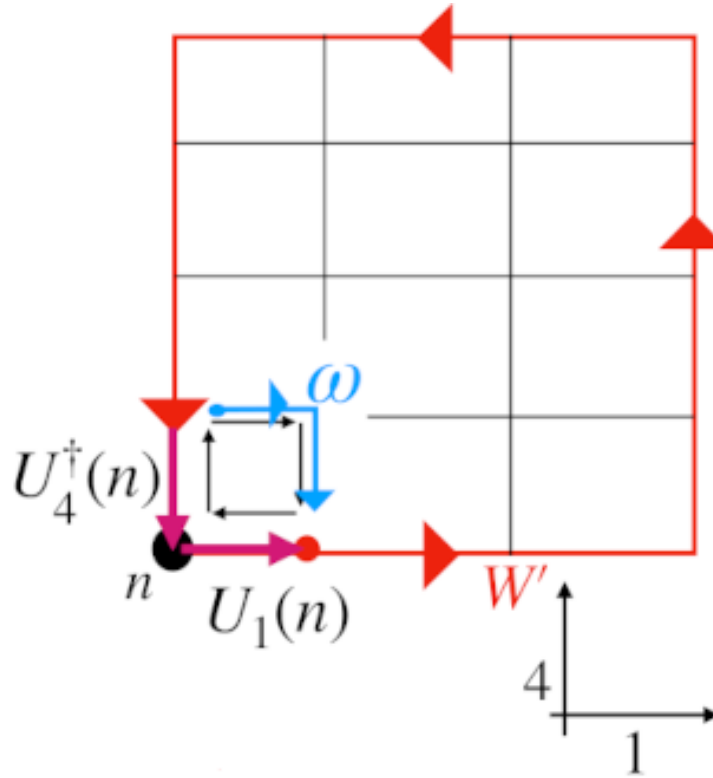


図 2.4 ウィルソンループとプラケットの図。赤線が W' 、青線が ω

図 2.4 のようにウィルソンループ内部の左端にプラケットをひとつおくことを考える。こうすることで、 $U_1(n)U_1^\dagger(n)$ 及び $U_4(n)U_4^\dagger(n)$ をとり計算することができる。さらに、 $U_1(n)$ の終点からループに沿って $U_4^\dagger(n)$ の始点までを W' 、プラケットの右上、つまり $U_1(n+\hat{4}) \cdot U_4^\dagger(n+\hat{1}+\hat{4})$ を ω とおく。このとき、ウィルソンループの期待値は A.1.2 節より、

$$\langle W \rangle = \frac{-2}{Zg^2} \int [dU] \text{tr}[W'\omega] \frac{1}{N_C} N_C, \quad (2.41)$$

と計算できる。この式をよく見てみると、新しいウィルソンループ $W'\omega$ (図 2.5) の期待値の計算に幾つか係数が掛けられているものとなっていることがわかる。このように、ループ内にプラケットをひとつおくことで互いに逆向きに進むリンク変数が相殺されて丁度プラケットひとつぶんが消えて特定の係数が掛けられた新たなループの期待値を計算するこ

とになる。この操作を繰り返していくことで係数が掛けられていくと共にループが次々と短くなっていき、遂には元々求めたかった期待値を得ることができる。

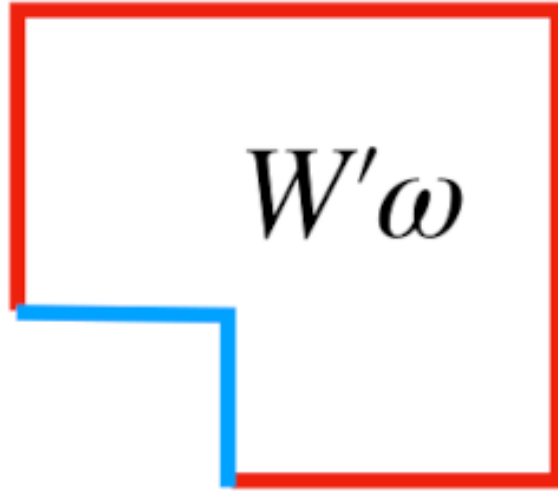


図 2.5 新たなループ $W'\omega$ の図

さて、ここからは係数がどのように掛けられているかを実際にみていく。

①プラケットひとつが消えるたびに $\frac{1}{g^2}$ が掛けられる。これはある S_g をかけるごとにプラケットひとつが消えるのだが、 $S_g \propto \frac{1}{g^2}$ の関係があるので、プラケットひとつが $\frac{1}{g^2}$ に対応しているといえる。

②一辺が相殺される度に $\frac{1}{N_C}$ が掛けられる。

そのような積分は例えば $\int dU_1(n) \cdots [U_1(n)]_{ij} [U_1^\dagger(n)]_{kl}$ のようになるが、これは式 (2.40) により

$$\int dU_1(n) \cdots [U_1(n)]_{ij} [U_1^\dagger(n)]_{kl} = \frac{1}{N_C} \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (2.42)$$

のように計算できるからである。

③一点あたり N_C が掛けられる。なぜなら、一点が消えるためにはその前後2辺が相殺される必要があり、そのような積分は例えば

$$\int dU \cdots \text{tr}[U_1(n)W'U_4^\dagger(n)] \text{tr}[U_4(n)\omega U_1^\dagger(n)] \propto \int \text{tr}[W'\omega] \delta_{ij} \delta_{ji}, \quad (2.43)$$

となり、一点あたり $\delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{ii} = N_c$ が掛けられるからである。この計算は次のように捉えるとよい。つまり、 UU^\dagger 一組につき添字をふたつもつ δ_{ij} が二個式 (2.40) により計算されるので、全体では添え字ふたつの δ が 4 つ計算され、

$$\begin{aligned}
& \int dU_{\text{others}} W_{jk} \omega_{\beta\gamma} dU_1 [U_1(n)]_{ki} [U_1^\dagger(n)]_{\alpha\beta} dU_4(n) [U_4(n)]_{\gamma\alpha} [U_4^\dagger(n)]_{ij} \cdots \\
&= \int dU_{\text{others}} W_{jk} \omega_{\beta\gamma} \frac{1}{N_c} \delta_{k\beta} \delta_{i\alpha} \frac{1}{N_c} \delta_{\gamma j} \delta_{\alpha i} \cdots \\
&= \int dU_{\text{others}} W_{j\beta} \omega_{\beta j} \frac{1}{N_c} \delta_{i\alpha} \frac{1}{N_c} \delta_{\alpha i} \quad (\text{k と } \gamma \text{ について縮約}) \\
&= \int dU_{\text{others}} \frac{1}{N_c^2} \text{tr}[W\omega] \delta_{ii}, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

のようになるからであるが、これは $\text{tr}[W\omega]$ をつくるためには添字は 4 つだけでよいので、残り 4 つの添字を消すために N_c がでてきたことになる。つまり

$$\begin{aligned}
\int dU \cdots W_{\mu\nu} \omega_{\rho\sigma} U_1 U_1^\dagger U_4 U_4^\dagger &\propto \int dU \cdots W_{\mu\nu} \omega_{\rho\sigma} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{op} \\
&= \int dU \cdots \text{tr}[W\omega] N_c, \tag{2.45}
\end{aligned}$$

この式で、 $\delta_{mn}\delta_{op}$ をトレースを作るために使ったとすれば、余った $\delta_{ij}\delta_{kl}$ を、 $k = j, \ell = i$ として、 $\delta_{ij}\delta_{ji} = N_c$ としてあげればよいということになる。

以上のルールに則って係数が繰り返し掛けられていく (図 2.6)。(便宜上 $\frac{1}{N_c}$ をかけて)

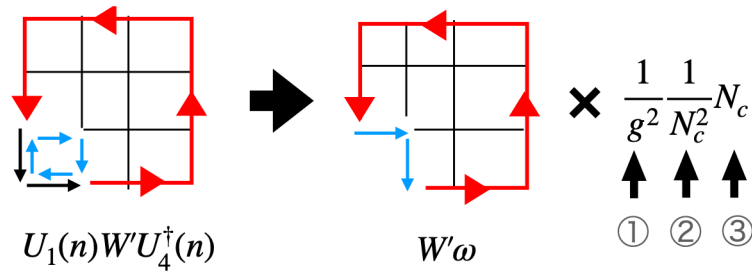


図 2.6 新たなループに係数が掛けられるようす

これをまとめると、

$$\frac{1}{N_c} \langle W \rangle \rightarrow \frac{1}{N_c} \left(\frac{1}{g^2}\right)^{N_p} \left(\frac{1}{N_c}\right)^{N_\ell} N_c^{N_s} \quad (g^2 \rightarrow \infty), \tag{2.46}$$

となる。ここで N_p, N_ℓ, N_s はそれぞれループ内に含まれるプラケットの数、辺の数、点の数である。さらに、オイラーの多面体定理

$$N_\ell - N_s + 1 = N_p \tag{2.47}$$

より、

$$\frac{1}{N_C} \left(\frac{1}{N_C}\right)^{N_\ell} \left(\frac{1}{N_C}\right)^{-N_s} = \left(\frac{1}{N_C}\right)^{N_p} \quad (2.48)$$

とすれば式 (2.46) は、

$$\left(\frac{1}{N_c g^2}\right)^{N_p} \quad (2.49)$$

となるが、プラケットの面積をその数ぶんかければループ全体の面積となる

$$N_p \times a^2 = RT \quad (2.50)$$

の関係を使えば、 $N_p = \frac{RT}{a^2}$ となるので結局式 (2.46) は、式 (2.24) の関係を思い出すと、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{N_c g^2}\right)^{\frac{RT}{a^2}} &= \exp\left(-\frac{\ln N_C g^2}{a^2} RT\right) \\ &\sim \exp(-V(R)T); (V(R) \equiv \frac{\ln N_C g^2}{a^2} \times R), \end{aligned} \quad (2.51)$$

となる。これより、ポテンシャルが距離 R に線形すること、つまり

$$V(R) \propto R, \quad (2.52)$$

を示すことができ、カラーの閉じ込めを示すことができた。このように指数部分が $R \times T$ に比例していることを面積則と呼ぶ。

2.2.7 結論

低エネルギー状態のクォークにはカラーの閉じ込めと呼ばれるカラー一重項の結合状態のハドロンとしてのみ観測される現象が知られており、その機構は厳密にわかっているものではない。これらは QCD により記述されているが低エネルギーでは摂動展開ができないため直接解析計算をすることができないため、離散化された空間における QCD である格子 QCD を利用した。まず、ポテンシャルエネルギーを定義し、そのポテンシャルエネルギーに距離 R に関して線形な項が含まれていれば閉じ込めの状態であるといえることを説明した。その後、格子 QCD の定式化を行い、ウィルソンループ演算子を導入した。この演算子の期待値によりポテンシャルエネルギーを求めることができることを導出し、同時に計算に必要な種々の定義を行なった。

次に、強結合展開を用いて期待値計算を行なった。その際リーディングオーダーでは積分が潰れてしまうことや相殺するリンク変数により積分計算ができることを示し、ループ

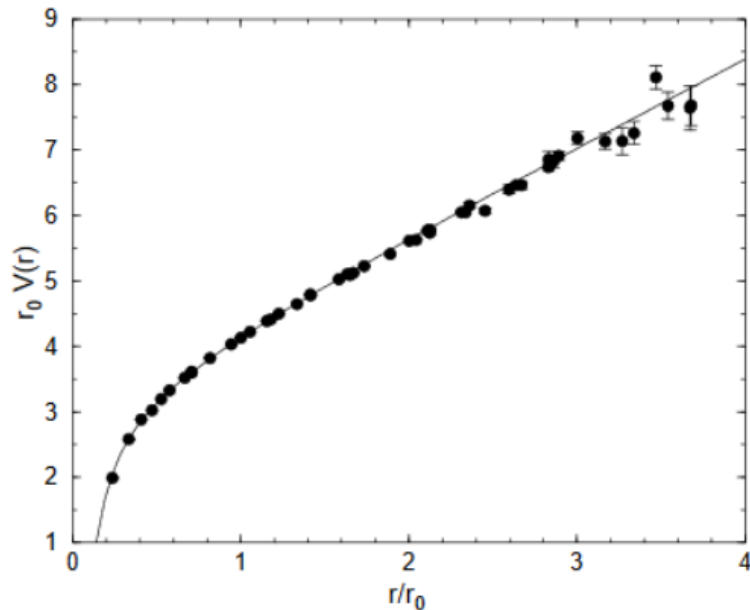


図 2.7 クォーク・反クォーク間に働く静的ポテンシャルの距離 r 依存性。縦軸と横軸はともに $r_0 \simeq 0.5 \text{ fm}$ という基準の長さを用いて、無次元化してある。文献 [30] より引用。

内にプラケットをおくことで期待値を求めた。得られた期待値からポテンシャルエネルギーがわかり、それが面積則を満たしていることからポテンシャルに線形項があることがわかりカラーの閉じ込めを示すことができた。

このように強結合展開を用いてウィルソンループの期待値を実際に解析的に解くことで閉じ込めを示すという方法は、閉じ込めを解析的に示す数少ない方法のひとつである。

2.3 格子 QCD によるクォーク間ポテンシャル

2.3.1 格子 QCD 数値計算によるカラーの閉じ込め

この節では書籍 [2] に従い、格子 QCD から計算されたクォーク間ポテンシャルがカラーの閉じ込めの性質を反映していることを紹介する。ウィルソンループ (2.2.1 節参照) の期待値を格子 QCD のモンテカルロシミュレーションで計算し、そこから引き出した静的ポテンシャル $V(r)$ の結果を図 2.7 に示す。この図は、CP-PACS Collaboration という日本の研究グループの結果 [30] である。これは、 u クォークと d クォークの 2 つの

動的クォーク^{*1}の寄与を含めた計算で、2 フレーバー格子 QCD の計算と呼ばれている。ここでは2つのクォークを同じ質量にとって計算しており、そのときの π の質量は約610 MeVである。この値は自然界の値である約140 MeVよりかなり重い、その理由は、軽い π での格子QCDは計算コストが高く、当時の計算機では実行が難しかったからである。4次元格子点の数は $24^3 \times 48$ であり、格子感覚格子間隔は $a \simeq 0.11$ fmなので、空間1辺の大きさは $L \simeq 2.6$ fmである。縦軸はポテンシャルの値 $V(r)$ 、横軸は空間距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であるが、基準の長さ $r_0 \simeq 0.5$ fmを用いて両軸とも無次元化してある。

ここで得られた静的ポテンシャル $V(r)$ は遠距離でほぼ直線であり、クォーク・反クォーク間の距離を引き離すために必要なエネルギーが距離に比例して増大することを意味している。したがって、こうしQCDで計算されたクォーク間ポテンシャルは確かにクォークの閉じ込めを示している。図2.7の実線は $V(r)$ を

$$V(r) = V_0 + \sigma r - \frac{\alpha}{r} \quad (2.53)$$

という関数形でフィットしたものである。1次関数から大きくずれている近距離($r \rightarrow 0$)の振る舞いは3番めの $1/r$ の項で良く記述されている。この頃は、電磁相互作用のクーロン力のポテンシャルと同じ形をしているので、クーロン項と呼ばれている。クーロン項は、1グルーオン交換の寄与から導出することができ、ゲージ結合定数を g として場合は $\alpha = g^2/4\pi$ となる。近距離(高エネルギー)で摂動展開での記述が見えてきていることは、近距離で相互作用が弱くなって自由粒子に近づくという漸近的自由性に対応しており、それがポテンシャル $V(r)$ の振る舞いに現れていることを示している。2番めの項が閉じ込めを意味する線形項であり、比例係数 σ は弦の張力と呼ばれている。この名前は、弦の両端にクォークと反クォークがついているモデルによりクォークの閉じ込めを理解すると、弦の張力に当たる部分がポテンシャルの線形項の係数になることからきている(2.3.2節参照)。

いくつかの格子間隔 a で σ を計算し、 $a \rightarrow 0$ の連続極限をとっても、 σ は0にならないことが数値的に確かめられている。もちろん、 $a \rightarrow 0$ の外挿なので不定性があり、クォークの閉じ込めを「証明」したことにはならないが、QCDでクォークの閉じ込めが成り立っていることを示す計算のうちのひとつと成り得る。

動的クォークを含む場合、静的ポテンシャル $V(r)$ は、遠方では距離 r とともに増大せず、一定値に収束していくはずである。これはクォーク・反クォークを間の距離を増大さ

^{*1} 格子QCDにおいて、静的ポテンシャル中を運動することができるという仮定のクォーク場のこと。

せる (つまりエネルギーを注入していく) とある時点で軽いクォーク・反クォーク対が生成され、ウィルソンループが表している重いクォーク・反クォークとそれぞれ結合し、2つの中間子が生成されるからである。したがって、 $V(r_{\max}) = 2m_{\text{HL}}$ となる r_{\max} 付近で、ポテンシャルは一定値 $2m_{\text{HL}}$ になると予想される。ここで、 m_{HL} は重いクォークと軽い反クォーク (あるいはその反粒子) で作られた中間子の質量である。弦を使った模型による理解では、クォーク・反クォークを引き離そうと引っ張るとあるところで弦が切れて、切り口のところにまたクォーク・反クォークが生成され、クォーク・反クォークを付けた2つの弦 (中間子) に分離した、と考えるのである (2.3.2 節参照)。

2.3.2 格子 QCD 数値計算による無限に重いクォークのポテンシャル

この節では無限に重いクォークと反クォークのペアを用いて、クォーク反クォークペアをある一定の距離まで離すと結合が破れて2つのメソンになる、string-breaking と呼ばれる現象について、論文 [10] に基づいて、格子 QCD を用いた数値計算の結果を紹介する。

格子 QCD において、アイソスピン $I = 0$ で無限に重いクォーク Q と反クォーク \bar{Q} が距離 $r = |\mathbf{R}|/a$ にある系を考える。ここで、 a は格子間隔であり、 $|\mathbf{R}|$ は整数値をとる3次元ベクトルである。full QCD の計算では、 r がある値 r_c を超えると、系の質量は軽いクォークを含むメソン (B と \bar{B}) が距離 r にあるような状態がエネルギー的に有利になる。距離 r 離れた $Q\bar{Q}$ ペアを生成する演算子を \mathcal{Q} 、同様に距離 r 離れた $B\bar{B}$ ペアを生成する演算子を \mathcal{B} とする。このとき、真空を $|0\rangle$ として $Q\bar{Q}$ 状態 $|Q\rangle$ と $B\bar{B}$ 状態 $|B\rangle$ を

$$|Q\rangle = \mathcal{Q}|0\rangle, |B\rangle = \mathcal{B}|0\rangle, \quad (2.54)$$

と定義する。また、これらが混合した状態を

$$|Q\rangle = a_Q(\cos\theta|1\rangle - \sin\theta|2\rangle), \quad (2.55)$$

$$|B\rangle = a_B(\sin\theta|1\rangle + \cos\theta|2\rangle), \quad (2.56)$$

と表す。ただし、 a_Q, a_B はそれぞれ高次の展開基底の効果をあらわす係数であり、 $\langle Q|B\rangle = 0$ とする。ここで、 θ は物理固有状態 $|1\rangle, |2\rangle$ の混合角である。これは、規格化された状態 $|Q_n\rangle = a_{Q^{-1}}|Q\rangle, |B_n\rangle = a_{B^{-1}}|B\rangle$ を用いて、

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \cos\theta|Q_n\rangle + \sin\theta|B_n\rangle, \\ |2\rangle &= -\sin\theta|Q_n\rangle + \cos\theta|B_n\rangle, \end{aligned} \quad (2.57)$$

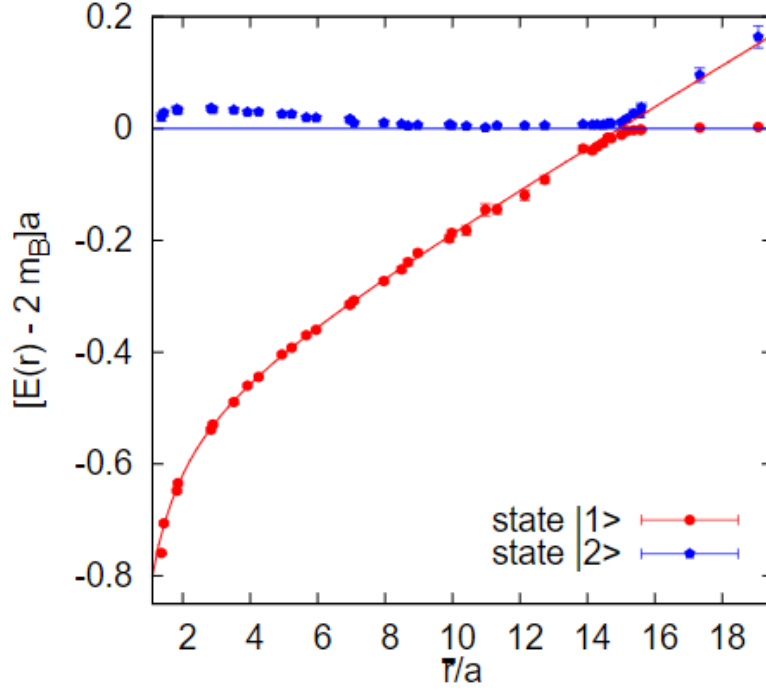


図 2.8 それぞれ $2m_B$ を基準とした 2 つのエネルギー準位。横軸も同じく無次元化されている。曲線は $E_1(\bar{r})$ の 3 つのパラメーターのフィットを式 (2.59)-(2.61) に対応させたものである。ただし、 $0.2 \text{ fm} \leq \bar{r} \leq 0.9 \text{ fm} < r_c$ 。[10] より引用。

と表される。基底 $|Q\rangle$ 、 $|B\rangle$ に対する相関関数行列を格子間隔 $a \simeq 0.083 \text{ fm}$, $a^{-1} \simeq 2.37 \text{ GeV}$ の時に数値計算した結果を図 2.8 に示す。この図はそれぞれ $2m_B$ を基準とした 2 つのエネルギー準位を $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 距離

$$\bar{r} = r [1 + \mathcal{O}(a^2)] = a \left[\frac{1}{(r/a)} \right]^{-1}, \quad (2.58)$$

の関数としてプロットしたものである。図より、 $Q\bar{Q}$ 結合の破れが $r_c \simeq 15a \simeq 1.25 \text{ fm}$ で起きていることがわかる。図中の曲線は V_0, σ, e の 3 つのパラメーターでフィットされた関数、

$$E_1(r) = V_0 + \sigma r - \frac{e}{r}, \quad (2.59)$$

に対応している。ただし、フィット範囲は $0.2 \text{ fm} \leq \bar{r} \leq 0.9 \text{ fm}$ である。規格化から $V_0 = 2m_B - 0.509(8)a^{-1}$ が得られ、弦の張力 σ とクーロン力の係数 e は、

$$\sqrt{\sigma} = 0.1888(29)a^{-1}, \quad (2.60)$$

$$e = 0.362(16), \quad (2.61)$$

と得られる。このフィットから、ゾンマーパラメーター

$$r_0^2 \frac{dE_1(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} = 1.65, \quad (2.62)$$

が

$$r_0 = 6.0009(53)a \simeq 0.5 \text{ fm}, \quad (2.63)$$

であることがわかるので、格子間隔 a を物理的な単位に変換することができる。この図は、 $Q\bar{Q}$ 間距離 r が $r < r_c$ のときにはクォーク反クォークのペアとして存在していた方がエネルギー的に安定で束縛状態である一方で、 $r > r_c$ のときにはハドロン状態 (メソン) として存在する散乱状態の方がエネルギー的に安定となる string breaking が起こることを示している。

第 3 章

ハドロン間ポテンシャル

本章では、ハドロン間ポテンシャルに関する歴史と、最近の研究結果を紹介する。まず、現象論的なハドロン間ポテンシャルと、ハドロン間ポテンシャルの性質を紹介する。次に、格子 QCD によるハドロン間ポテンシャルの数値計算結果を紹介する。最後に、エキゾチックハドロン $X(3872)$ に関する歴史と、最新の研究成果を紹介する。

3.1 ハドロン間ポテンシャル研究の歴史

3.1.1 核子間ポテンシャル

この節では論文 [31] に基づき核力のポテンシャル研究の歴史について紹介する。歴史的には、中間子の理論と分散関係により 2 核子 (NN) ポテンシャルの基礎が築かれた。これらの取り組みはすべて 1935 年に湯川が提案した中間子論 [32] と呼ばれる理論に基づいている。中間子論は、長距離力で π (パイ中間子) 1 つの交換を取り入れた理論であり、今日では、カイラル対称性を通じて QCD に根ざした理論となっている。一方分散関係は、論文 [33] で研究されたように、核力に対する 2π 交換の寄与を構築するために導入された。

1990 年代には、いわゆる高精度ポテンシャルが開発され、陽子 p と中性子 n の pp 弾性散乱と np 弾性散乱のデータを $\chi^2/\text{datum} \simeq 1$ でフィットすることができるようになった。そのひとつが、CD-Bonn ポテンシャル [25] である。CD-Bonn ポテンシャルは、 π 、ベクトル中間子 ρ 、ベクトル中間子 ω の交換に加えて、角運動量 $J = 5$ までの各チャンネルに 2 つのスカラー・アイソスカラー粒子の交換を含んでいる。同様に、2 核子ポテンシャルとして、Nijmegen ポテンシャル I,II [34] や Argonne V18 (AV18) ポテンシャル [35] などが開発された。

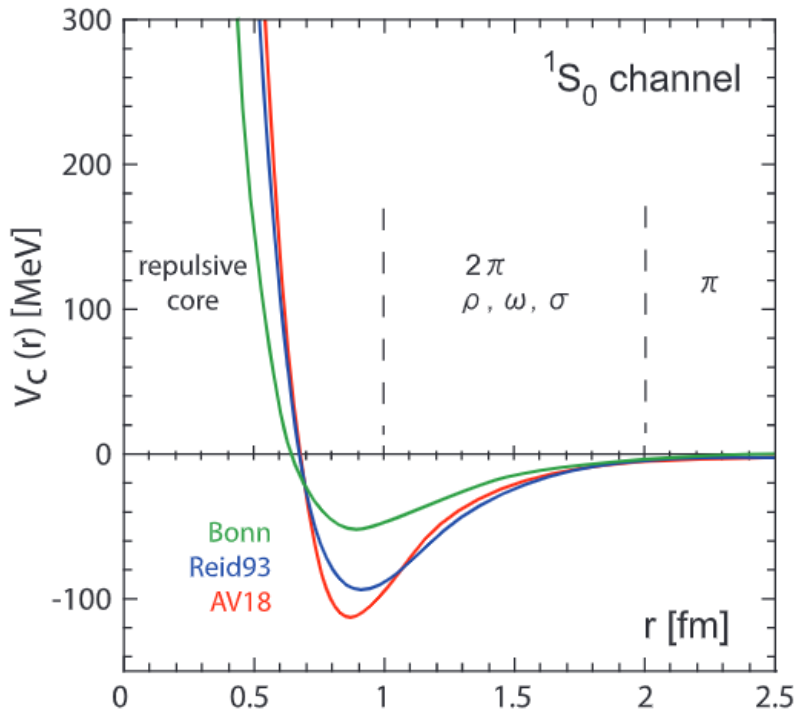


図 3.1 現象論的核力ポテンシャルの例。 1S_0 チャンネル (スピン一重項で S 波) における NN ポテンシャルが 3 つ示されている。[5] より引用。

こうした様々なポテンシャルが核子-核子 (NN) 散乱の位相差や重陽子のほとんどの性質を正確に表している。一方で、2 体力の重ね合わせに還元できない 3 体核力 (3 Nuclear Forces, 3NFs) の寄与を十分に解明されていなかった。実際、3NFs は少数系原子核の結合エネルギーとエネルギー準位を記述するために必要であるということが、Urbana-Argonne のグループにより示されていた [36, 37]。3NFs の原型となる研究は藤田と宮沢によりまとめられた [38]。藤田と宮沢は中間状態として Δ 励起状態を使う 2π 交換による 3 体力を提案した。実際、藤田と宮沢の研究は 3 体核力に関する多くの研究の基礎となった。例えば Tuscon-Melbourne[39, 40]、Brazilian[41]、Urbana-Illinois[42, 36] などの 3 体ポテンシャルは多くの成功を収め、原子核の構造や反応の計算などに利用されている。しかし、3NFs と 2 体力の整合性の問題が依然として残されていた。これらの問題はしかし、カイラル有効場の理論 (EFT)[43] を用いて解決することができる。ただし、3NFs と EFT は、相互作用の短距離部分に現れる、複雑な物理を自然な関係で対応させることができる。

図 3.1 に NN 散乱の実験結果から決められた現象論的核力ポテンシャルの例を載せる。

この図から、以下のことが読み取れる [2]。

1. $r > 1.5$ fm の領域では傾きが正なので引力になる。この引力は湯川の間粒子論で説明される。すなわち、陽子や中性子が中間子 π を交換することで相互作用していると考えられる。 π を交換したときに生じるポテンシャルは湯川ポテンシャルと呼ばれ、

$$V(r) = g \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \quad (3.1)$$

と、 π の質量 m_π ($\simeq 140$ MeV) と結合定数 g で表される。 r が大きくなると $e^{-m_\pi r}$ は指数関数的に小さくなるので、核力の到達距離は $m_\pi r \simeq 1$ となるところである。1 fm は約 $1/(200$ MeV) なので、 $r = 1 \sim 2$ fm あたりから核力が重要になる。(湯川は核力が重要になる距離から、 π の質量を予想した。)

2. r がより小さくなる中間領域では、核力ポテンシャルの傾きが湯川ポテンシャルの予言より大きくなっていく。つまり、引力がより大きくなる。これは、2つ以上の π 交換や、 π より重い中間子の交換によって、引力がより強くなっていると考えられるためである。
3. r が 0.8 fm より小さくなると、傾きが負になるので引力から斥力に変わる。更に近距離では斥力はどんどん大きくなり、2つの核子がそれ以上近づけなくなる。これを斥力芯と呼ぶ。斥力芯の寄与により、原子核は潰れず一定の大きさを保ちながら安定して存在している。しかし、斥力芯の起源は明らかにされていない。

図 3.1 のポテンシャルは、2 核子散乱実験を行い、断面積を再現するように決めたものである。この図には CD-Bohn[25]、Reid93[34]、AV18[35] という 3 つのポテンシャルの結果を載せている。どのポテンシャルも、上で挙げた 3 つの性質を持っている。

3.1.2 格子 QCD によるハドロン間ポテンシャル

この節では、論文 [5] [44] に基づき、格子 QCD を用いた HAL QCD 法により計算されたハドロン間ポテンシャルの研究の歴史を紹介する。

格子 QCD によるハドロン相互作用への新しいアプローチが、2006 年、3 人の著者によって提案され [3, 45, 4]、その後 HAL QCD Collaboration によって開発されている。そのため、このアプローチは現在 HAL QCD 法と呼ばれている。HAL QCD 法の出発点は、Lüscher の有限体積法 [46] と同じく、Nambu-Bethe-Salpeter(NBS) 波動関数 $\phi(\mathbf{r})$ である。相互作用の範囲外の波動関数を見る代わりに、ハドロン間相互作用の到達距離 R の内側 ($|\mathbf{r}| < R$) の領域を考え、有限な箱 (大きさが L^3) の中でシュレーディンガー方程

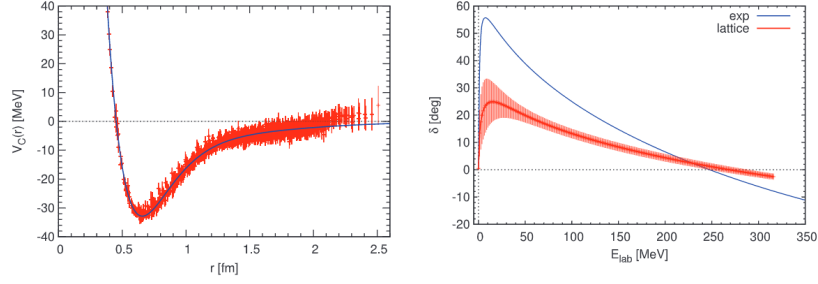


図 3.2 左：2 + 1 フレーバーの格子 QCD で計算された 1S_0 ポテンシャル。実線はそのフィット。右：フィットしたポテンシャルを用いて計算された散乱の位相差。横軸は重心系での散乱のエネルギー。実線は実験値 [50]。[5] より引用。

式に従うように、 $\phi(\mathbf{r})$ から非局所型ポテンシャル $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ が定義される。ポテンシャル $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は定義上エネルギー非依存である。QCD における $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ はクォークとグルーオンの閉じ込めにより相互作用領域内に局在しているので、大きな箱の中では弱い有限体積効果しか受けない。したがって、一度 U が決定され、 $L \rightarrow \infty$ が適切に推定できれば、無限体積のシュレーディンガー方程式を解くことで、散乱の位相差と束縛状態スペクトルを計算することができる。ただし、実用的には非局所型ポテンシャル $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を微分展開した局所型ポテンシャルの形で定式化する (5 章参照)。更にこの結果を実験データと比較することで、ポテンシャルについて調べることができる。HAL QCD 法のさらなる利点は、多体力や非弾性散乱の場合にも直接一般化できることである。

PACS-CS コラボレーションでは、物理的な π の質量をカバーする (2 + 1) フレーバー QCD シミュレーションでゲージ配位を生成している。[47, 48]。ゲージ配位は $32^3 \times 64$ 格子上的岩崎ゲージ作用と $\mathcal{O}(a)$ 改善ウィルソンクォーク作用によって生成される。格子間隔 a は m_π, m_K, m_ω から $a \simeq 0.089$ fm と決定され、 $L \simeq 2.9$ fm が導かれる。3 つのゲージ配位、 $(m_\pi, m_N) \simeq (701 \text{ MeV}, 1583 \text{ MeV}), (570 \text{ MeV}, 1412 \text{ MeV}), (411 \text{ MeV}, 1215 \text{ MeV})$ が NN ポテンシャルを計算するために使用される [49]。

図 3.2 (左) は、PACS-CS の $(m_\pi, m_N) \simeq (701 \text{ MeV}, 1583 \text{ MeV})$ 配位から、 $E \simeq 0$ において得られたスピン 1 重項 NN 散乱中心ポテンシャル $V_C(r)$ を示している [5]。図 3.1 の核力ポテンシャルの特徴である長距離力での引力と短距離での斥力芯が定性的に再現されている。中心ポテンシャル $V_C(r)$ はガウシアンを重ね合わせ $g(r) = \sum_{n=1}^{N_{\text{Gauss}}} V_n \exp(-\nu_n r^2)$ で、パラメーター V_n と $\nu_n (> 0)$ によりフィットされている。図中の実線は、 $N_{\text{Gauss}} = 5$ でのフィット結果を表している。

フィットされたポテンシャル $V_C(r)$ を用いて、 1S_0 チャンネルのシュレーディンガー

方程式を解き、散乱の位相差を計算する。図 3.2(右) は重心系での散乱の位相差 $\delta(k)$ を、比較のため実験データ [50] と共に重心系でのエネルギー E_{lab} の関数として示している。実験データの定性的な特徴は、格子ポテンシャルでよく再現されるが、 π の質量が実際よりも重いため、ポテンシャルの強さが小さくなっている。 $k = 0$ での位相差の微分から得られる格子ポテンシャルの散乱長は $a(^1S_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \tan \delta(k)/k = 1.6(1.1) \text{ fm}$ である。一方で実験値は $a^{\text{exp}}(^1S_0) \simeq 20 \text{ fm}$ である。

3.2 X(3872) に関する研究の現状

本節では、論文 [13] に基づき、エキゾチックハドロン X(3872) の概要を記す。X(3872) は数あるエキゾチックハドロンの候補の中でも、最も実験的にも理論的にも確立された粒子である [51]。

Belle 実験とは、 B 中間子系^{*1}における CP 対称性の破れに関する小林・益川理論を検証するために、KEKB 加速器を用いて電子と陽電子を衝突させる実験である。この実験では当時世界最高のルミノシティと共に、高統計のデータを得ることができたため、CP 対称性の破れだけでなく、重いハドロンに関する分光学的知見を得ることが出来た。ここで、重いハドロンとは重いクォーク、すなわち c クォークや b クォークを含むようなハドロンのことを言う。

チャーモニウム ($c\bar{c}$) のひとつである J/ψ 中間子と $\psi(2S)$ (もしくは、図 1.2 における ψ') は、 e^+e^- もしくは $\mu^+\mu^-$ へと崩壊する。 $\psi(2S)$ はまた、 $J/\psi\pi^+\pi^-$ モードにより再構成^{*2}される。このモードは、同じくチャーモニウムである χ_{c1} 及び χ_{c2} を再構成するのにも有用である。

D 中間子^{*3}は、 c クォークだけを含み \bar{c} クォークを含まないため、 c クォークの特性 (量子数) を持ち合わせているため、オープンチャームと呼ばれている。この D 中間子と、 \bar{D} 中間子のペアが生成される閾値 (3.74 GeV) より上では、特別なメカニズムによる抑制がない限り、チャーモニウムは (重い) D 中間子ペアへの崩壊が支配的となり、結果として広い崩壊幅を持つことが期待される。従って、対応する中間子ペアが生成される閾値より上のクォーコニウムの状態 (チャーモニウムなら、 D 中間子ペア) のうち、以下の条件をひと

^{*1} B 中間子とは、 \bar{b} クォークと、 u, d, s, c クォークによりそれぞれ B^+, B^0, B_s^0, B_c^+ と、構成される中間子でスピンパリティは $J^P = 0^-$ である。

^{*2} 散乱の情報から元々の状態を再現すること

^{*3} D 中間子とは、 c クォークを含む最も軽い中間子であり、 \bar{d} クォークと組み合わせられる D^+ 中間子や \bar{u} クォークと組み合わせられる D^0 中間子などがある。

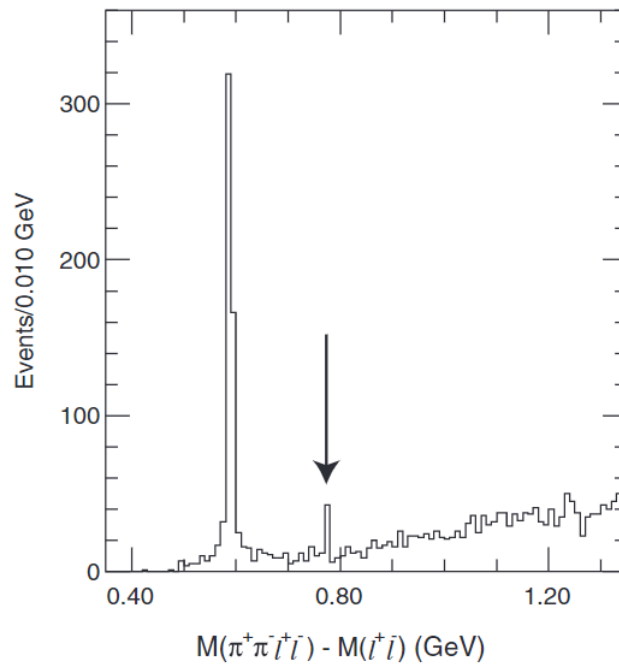


図 3.3 J/ψ の質量を基準とした $J/\psi\pi^+\pi^-$ の質量分布。 $\psi(2S)$ によるピークが 0.59 GeV にある。 $X(3872)$ に対応するピークは下向き矢印で表されている。[52] より引用。

つまたは複数満たすものが、エキゾチックハドロンの候補として挙げられる。すなわち、

1. 重い中間子ペア以外のモードに崩壊し、大きな分岐割合をもつ、
2. 非常に狭い崩壊幅を持つ、
3. クォーコニウムでは説明できないような、特殊な崩壊モードを持つ、
4. 観測された質量が、理論的に予想されるクォーコニウムの質量と一致しない、
5. 電荷を持つ。

である。

図 3.3 に示すように、Belle 実験は 2003 年に $B^\pm \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-K^\pm$ 崩壊の中で、 $J/\psi\pi^+\pi^-$ 質量スペクトラムの 3872 MeV/c² 付近に非常に狭いピークを発見した (図 3.3)。発見された状態は $X(3872)$ と呼ばれた。この状態は $D\bar{D}$ 閾値を上回る質量を持っていたにも関わらず、非常に狭い崩壊幅を有していたため、明らかに従来のチャーモニウムでは無いと期待される。その後、Belle 実験は $X(3872) \rightarrow J/\psi\gamma$ の崩壊モードの測定から、 $X(3872)$ の荷電共役を $C = +1$ と結論付けた [53]。

また、 $X(3872)$ の崩壊生成物の角度分布から、スピンとパリティを決定することができる。LHCb コラボレーションによる $X(3872) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 崩壊モードの 5 次元振幅解析により、物理量であるスピン (J)、パリティ (P)、荷電共役 (C) が、 $J^{PC} = 1^{++}$ と、明確に決定された。しかし、 $X(3872)$ の内部構造に関する仮説が、大きく分けて 2 つ存在している。

ひとつは、ダイクォーク^{*4}が、カラーによる強い相互作用で束縛している、コンパクトな 4 クォーク状態である。この描像はテトラクォーク仮説と呼ばれ、 $c\bar{c}u\bar{u}$ と $c\bar{c}d\bar{d}$ との混合による質量分岐が、論文 [54] により理論的に予言された。2 つの状態が混合角 θ で混合したあとの、エネルギーが高い状態の質量を $M(X_h)$ 、低い状態を $M(X_l)$ とし、 $M(X_h) - M(X_l) = (7 \pm 2)/\cos(2\theta)$ MeV と表される。この差は $B^\pm \rightarrow XK^\pm$ と $B^0 \rightarrow XK^0$ で別々に観測された質量の違いとして現れると期待される。 $J/\psi\pi^+\pi^-$ モードにおけるこの差は Belle 実験により $(-0.71 \pm 0.96(\text{stat}) \pm 0.19(\text{syst})$ MeV) となることがわかったが、このことはテトラクォークという解釈を強く否定する。Belle 実験はまた、 $J\psi\pi^\pm\pi^0$ 崩壊モードにおける対応する荷電状態が見つからないことを示した [55]。

一方で $D^0\bar{D}^{*0}$ ^{*5} ハドロン分子状態が、非常に狭い崩壊幅 ($\Gamma < 1.2$ MeV) を持つことが示された [56]。更に、閾値に非常に近い質量 ($M = 3871.69 \pm 0.17$ MeV) であったため、 $X(3872)$ の最も現実的な解釈として考えられている。この議論に着想を得て $B \rightarrow D^0\bar{D}^{*0}K$ 崩壊の $D^0\bar{D}^{*0}$ の不変質量スペクトラムが再構成され、明らかなピークが観測された [57, 58]。Belle によるこの結果を図 3.4 に示す。観測された質量ピークは $J/\psi\pi^+\pi^-$ モードによって決定された値と一致している。

観測された質量と $D^0\bar{D}^{*0}$ 閾値とのエネルギー差は結合エネルギーと考えられ、具体的な値は 0.11 ± 0.21 MeV と非常に小さい。結合エネルギーの値は、 $X(3872)$ の大きさ、すなわち D^0 と \bar{D}^{*0} との間の距離が 10 fm と概算できることを表す。この場合、直径が 0.4 fm と見積もられる J/ψ と比べて、 $X(3872)$ はおよそ 1000 倍大きいことになる。それゆえ、 $D^0\bar{D}^{*0}$ モードは $J/\psi\pi^+\pi^-$ モードに比べ、はるかに大きい分岐比を有することになる。小さな結合エネルギーはまた、ハドロン分子仮説に更なる疑問をもたらす。というのも、 $X(3872)$ は崩壊しやすく非常に不安定でなければならないため、高エネルギー $p\bar{p}$ 衝突実験である Tevatron [59] で観測された生成率を説明できないのである。

以上の議論により、 $X(3872)$ は同じ量子数を持った、ハドロン分子状態とチャームonium状態との混合状態であるという可能性が高いと考えられている。実験で観測されて

^{*4} バリオンの中で、 qq ペアとして存在し、残りの q と結合すると考えられる状態

^{*5} D^0 は擬スカラー中間子で $J(P^C) = 1/2(0^-)$ 、 \bar{D}^{*0} はベクトル中間子で $J(P^C) = 1/2(1^-)$ である。

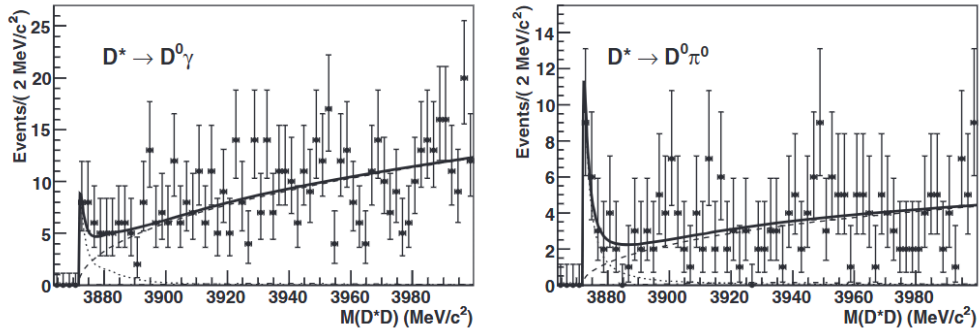


図 3.4 \bar{D}^{*0} の不変質量分布。左は $\bar{D}^{*0} \rightarrow \bar{D}^0 \gamma$ の崩壊モード。右は $\bar{D}^{*0} \rightarrow \bar{D}^0 \pi^0$ の崩壊モード。[57] より引用。

いない状態の、チャーモニウム $\chi_{c1}(2P)^{*6}$ はスピンパリティが $J^{PC} = 1^{++}$ と考えられており、元々の質量は 3920 MeV であると予想されている。混合状態という解釈において、 $X(3872)$ の主たる構成要素は $D^0 \bar{D}^{*0}$ である。これに加えて、 $\chi_{c1}(2P)$ 成分も十分に含まれていると考えられている。純粋な $\chi_{c1}(2P)$ 状態はそれ自身コンパクトな粒子でなければならず、それ故 Tevatron や LHC における高エネルギー衝突の生成を説明できている。また、この描像は J/ψ を含むような終状態への分岐比が大きいことも説明できる。 $\chi_{c1}(2P)$ は未だ実験で観測されていないものの、混合状態仮説は、 $X(3872)$ が $\chi_{c1}(2P)$ を主成分に含むことを予想している。加えて、 $X(3872)$ と同じスピンパリティで、質量が数百 MeV ほど重いような、 $X(3872)$ の励起状態の存在も推測される。こうして、より大きな質量を獲得することで、 $X(3872)$ が π をひとつまたは複数個放出して、強い相互作用により崩壊する描像を考えることができる。そしてその結果、現在利用可能なデータ統計では共鳴として認識するのが難しいほど広い崩壊幅をもつ状態になることができる。従って、混合状態仮説は今までの数多くの実験データと矛盾することなく説明できる。

$X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$ の輻射崩壊は純粋なメソン-メソン分子仮説では Q 値が小さいため抑制される。しかしながら、もし $X(3872)$ が $\chi_{c1}(2P)$ と同一であった場合にはこの崩壊が重要となる。最近、LHCb 実験により、 $X(3872) \rightarrow J/\psi$ と $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$ の輻射崩壊が観測された。 J/ψ もしくは $X\psi(2S)$ 中間子を表す ψ の再構成は、 $\mu^+\mu^-$ モードのみによって行われる。信号の抽出は、 $\psi\gamma K^\pm$ および $\psi\gamma$ の不変質量の 2 次元空間に適合する拡張最尤法によって行われる。ここで、前者は B^\pm の質量でピークを形成し、後者は $X(3872)$ の質量でピークを示す。このことは、 J/ψ モードでの $X(3872)$ の輻

*6 $\chi_{c1}(3872)$ と呼ばれる

射崩壊を示していると同時に、 $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$ の証拠となる。 $X(3872) \rightarrow J/\psi$ と $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$ の崩壊の比率は、 $\frac{\mathcal{B}(X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma)}{\mathcal{B}(X(3872) \rightarrow J/\psi\gamma)} = 2.46 \pm 0.64(\text{stat} \pm 0.29(\text{syst}))$ と求められた。Belle 実験及び BaBar 実験においても、揺らぎの範囲でこの LHCb 実験の結果と矛盾しない値を得ている。結果として、崩壊比率は、純粋な $D\bar{D}^*$ 分子としての解釈を支持せず、 $X(3872)$ がクォーク自由度のチャーモニウム状態とハドロン自由度のハドロン分子状態との混合状態であるという仮説を支持する。このようにうまくいく仮説は $X(3872)$ の状態に解釈を与えるための、実験と理論双方による近年の主な進歩である。

第 4 章

ポテンシャルのチャンネル結合

4.1 導入

2 章では、クォーク間ポテンシャルが、カラーの閉じ込めにより、クォーク間距離が無限大で発散するような閉じ込めのポテンシャルであると期待されることやその性質を概説した。実際に、クォークが無限に重い極限において、格子 QCD を用いた解析的な計算や数値計算によりクォークが閉じ込めのポテンシャルを持つことを示した。一方 3 章では、ハドロン間ポテンシャルが、ハドロン間距離が無限大で消えるような散乱のポテンシャルであると予想されることとその性質を概説した。特に、現象論的な核力計算や格子 QCD によるハドロン間ポテンシャルの数値計算による研究が進んでいることをみた。また、エキゾチックハドロンである $X(3872)$ がクォーク自由度の状態であるクォーコニウムとハドロン自由度の状態であるメソン分子状態とが混合された状態であるという仮説が、最も有力であることを紹介した。

以上のように、クォーク自由度のみやハドロン自由度のみによるポテンシャルの研究は格子 QCD による第一原理計算も含めて多くの研究が行われている。しかし、例えば $X(3872)$ で有力であるような、クォークとハドロン両方の自由度を含めたチャンネル結合問題でのポテンシャルはあまり研究されていなかった。このような、両方の自由度を含むポテンシャルの研究は、例えば 2.3.2 節でみたように、クォークが無限に重い場合における string breaking の研究 [29] があるが、より実際の物理に近い、クォーク質量が有限な場合のクォーク間ポテンシャルの研究はまだ進んでいないのが現状である。加えて、ハドロン間ポテンシャルにおけるクォーク自由度の影響もわかっていない。

本章ではまず、文献 [26, 27] に従い、チャンネル結合問題を含むハミルトニアンを定式化する (4.2 節)。更にそこから、各自由度の寄与を抽出した有効ポテンシャルの導出を行

う (4.3、4.4 節)。得られたポテンシャルを物理系へ応用するために 5 章で局所型ポテンシャルへの近似変換を行い、6 章において実際に $X(3872)$ のモデルを構築し数値計算を行い、研究結果をまとめる。

4.2 チャンネル結合の定式化

非相対論的な量子力学で、クォーク自由度とハドロン自由度のチャンネル結合問題を考える。本研究ではフェッシュバツハの研究 [26, 27] に従いハミルトニアンを用いて問題を定式化する。閉じ込めポテンシャル V^q を持つ 2 体のクォークチャンネルと散乱ポテンシャル V^h を持つ 2 体のハドロンチャンネルを、遷移ポテンシャル V^t で結合したハミルトニアン H は、

$$H = \begin{pmatrix} T^q & 0 \\ 0 & T^h + \Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^q & V^t \\ V^t & V^h \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

である。ただし、 T^q, T^h はそれぞれクォーク、ハドロンチャンネルの運動エネルギー、 Δ はハドロンチャンネルの閾値エネルギーである。このとき、シュレーディンガー方程式は、

$$H |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle, \quad (4.2)$$

である。ただし、波動関数 $|\Psi\rangle$ は

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} |q\rangle \\ |h\rangle \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

であり、 $|q\rangle, |h\rangle$ はそれぞれクォークチャンネルの波動関数とハドロンチャンネルの波動関数である。式 (4.2) に式 (4.1) を代入すると、

$$\begin{pmatrix} T^q + V^q & V^t \\ V^t & T^h + \Delta + V^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |q\rangle \\ |h\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E |q\rangle \\ E |h\rangle \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (T^q + V^q) |q\rangle + V^t |h\rangle \\ V^t |q\rangle + (T^h + \Delta + V^h) |h\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E |q\rangle \\ E |h\rangle \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

となる。これより、

$$\{E - (T^q + V^q)\} |q\rangle - V^t |h\rangle = 0, \quad (4.5)$$

$$-V^t |q\rangle + \{E - (T^h + \Delta + V^h)\} |h\rangle = 0, \quad (4.6)$$

と、クォークチャンネルとハドロンチャンネルのチャンネル結合問題が連立シュレーディンガー方程式 (4.5)、(4.6) で表される。

連立方程式 (4.5)、(4.6) からクォークチャンネルの波動関数 $|q\rangle$ を消去してハドロンチャンネルの波動関数 $|h\rangle$ だけで表された式を導出することを目標とする。式 (4.5) より、

$$|q\rangle = G^q(E)V^t|h\rangle, \quad (4.7)$$

と書ける。ここで、クォークチャンネルのグリーン関数を $G_q(E) = (E - (T^q + V^q))^{-1}$ と定義する。式 (4.7) を式 (4.6) に代入すると、

$$(-V^tG_q(E)V^t + E - (T^h + \Delta^h + V^h))|h\rangle = 0, \quad (4.8)$$

となる。以上のように、クォークチャンネルを消去することにより、ハドロンチャンネルのみのシュレーディンガー方程式

$$H_{\text{eff}}^h(E)|h\rangle = E|h\rangle, \quad (4.9)$$

を満たす有効ハミルトニアン

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}^h(E) &= T^h + \Delta^h + V^h + V^tG^q(E)V^t \\ &= T^h + \Delta^h + V_{\text{eff}}^h(E), \end{aligned} \quad (4.10)$$

が得られる。ここで、ハドロン間有効ポテンシャルを

$$V_{\text{eff}}^h(E) = V^h + V^tG^q(E)V^t, \quad (4.11)$$

と定義する。この式の第 2 項がクォークチャンネルとの結合に起因するポテンシャルである。

同様に、ハドロンチャンネルを消去することによりクォークチャンネルのみのシュレーディンガー方程式

$$H_{\text{eff}}^q(E)|q\rangle = E|q\rangle, \quad (4.12)$$

を満たすクォーク間有効ハミルトニアン

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}^q(E) &= T^q + V^q + V^tG^h(E)V^t \\ &= T^q + V_{\text{eff}}^q(E), \end{aligned} \quad (4.13)$$

及びクォーク間有効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}}^q(E) = V^q + V^tG^h(E)V^t, \quad (4.14)$$

が得られる。ただし、ハドロンチャンネルのグリーン関数を $G_h(E) = (E - (T^h + \Delta^h + V^h))^{-1}$ と定義する。本節では近似を行っていないので、シュレーディンガー方程式 (4.9)

及び式 (4.12) を解くことで、元のチャンネル結合シュレーディンガー方程式 (4.2) と等価な波動関数を得ることができる。しかし例えば、ハドロン間有効ポテンシャルを得るためには、クォークチャンネルのグリーン関数 $G_q(E)$ を得ている必要があるため、クォークチャンネルの計算結果なしではハドロン間有効ポテンシャルを得ることはできない点に注意すべきである。

4.3 ハドロン間有効ポテンシャルの性質

最初に、ハドロン間ポテンシャルにおけるチャンネル結合の効果を調べる。チャンネル結合がない場合のクォークチャンネルのシュレーディンガー方程式は、波動関数を $|\phi\rangle$ として

$$(T^q + V^q) |\phi\rangle = E |\phi\rangle, \quad (4.15)$$

である。このとき、 V^q が閉じ込めポテンシャルなので、散乱解は存在せず、固有状態は離散固有値 E_n を持つ状態 $|\phi_n\rangle$ のみで与えられ、

$$(T^q + V^q) |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle, \quad (4.16)$$

となる。ただし、 $n = 0, 1, 2, \dots$ とし、基底状態のエネルギーを E_0 とする。このとき、固有状態の規格・直交性は

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{mn}, \quad (4.17)$$

とする。また、 $|\phi_n\rangle$ 以外に固有状態がないことから、基底の完全性より、

$$\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = 1^q, \quad (4.18)$$

と、クォークチャンネルの単位行列 1^q が $|\phi_n\rangle$ を用いて表される。

クォークチャンネルが結合したときのハドロン間有効ポテンシャルの性質を座標表示で調べるために、ハドロンチャンネルの位置演算子の固有ベクトル $|\mathbf{r}_h\rangle$ でハドロン間有効ポテンシャル (4.11) を挟むことにより

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}'_h | V_{\text{eff}}^h(E) | \mathbf{r}_h \rangle &= \langle \mathbf{r}'_h | V^h + V^t G^q(E) V^t | \mathbf{r}_h \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}'_h | V^h | \mathbf{r}_h \rangle \\ &\quad + \sum_n \sum_m \langle \mathbf{r}'_h | V^t | \phi_n \rangle \langle \phi_n | G^q(E) | \phi_m \rangle \langle \phi_m | V^t | \mathbf{r}_h \rangle, \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる。ここで、式 (4.18) による基底の完全系を利用した。グリーン関数の行列要素 $\langle \phi_n | G^q(E) | \phi_m \rangle$ を計算するために、 $T^q + V^q$ の行列要素を計算する。式 (4.16) と式 (4.17) より、

$$\langle \phi_n | T^q + V^q | \phi_m \rangle = E_n \langle \phi_n | \phi_m \rangle = E_n \delta_{nm}, \quad (4.20)$$

となる。これを用いて、

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | G^q(E) | \phi_m \rangle &= \langle \phi_n | (E - (T^q + V^q))^{-1} | \phi_m \rangle \\ &= \frac{1}{E - E_n} \langle \phi_n | \phi_m \rangle \\ &= \frac{\delta_{nm}}{E - E_n}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

となる。

以上により、式 (4.19) は、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}'_h | V_{\text{eff}}^h(E) | \mathbf{r}_h \rangle &= \langle \mathbf{r}'_h | V^h | \mathbf{r}_h \rangle + \sum_n \sum_m F_n^*(\mathbf{r}') \frac{\delta_{nm}}{E - E_n} F_m(\mathbf{r}) \\ &= \langle \mathbf{r}'_h | V^h | \mathbf{r}_h \rangle + \sum_n \frac{F_n^*(\mathbf{r}') F_n(\mathbf{r})}{E - E_n}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる。ここで、クォークチャンネルの n 番目の固有状態 ϕ_n と相対座標 \mathbf{r}_h のハドロンチャンネルの散乱状態との遷移を表す遷移ポテンシャルの形状因子 $F_n(\mathbf{r})$ を、

$$\langle \phi_n | V^t | \mathbf{r}_h \rangle \equiv F_n(\mathbf{r}), \quad (4.23)$$

と定義した。

式 (4.22) の右辺第 1 項は、ハドロンチャンネルに元々含まれていたポテンシャルの座標表示を表す。式 (4.22) の右辺第 2 項はチャンネル結合の効果によって、クォーク自由度の情報が含まれており、クォークチャンネルが閉じ込めポテンシャルを持つため離散化された固有状態の寄与の足し合わせとなっている。右辺第 2 項の分子が、相互作用前後の粒子間の相対座標 \mathbf{r}_h と \mathbf{r}'_h の両方に独立に依存しているため、 $V_{\text{eff}}^h(E)$ の行列要素が非局所型ポテンシャル (5 章参照) であることがわかる。一般に、遷移ポテンシャル V^t の性質にかかわらずチャンネル結合によってハドロン間有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}^h(E)$ の行列要素が非局所型となることがわかる。また、第 2 項の分母より、ハドロン間有効ポテンシャルはエネルギーに依存するポテンシャルであり、クォークチャンネルの離散固有状態のエネルギー $E = E_n$ で発散することもわかる。

4.4 クォーク間有効ポテンシャルの性質

次に、クォーク間ポテンシャルにおけるチャンネル結合の効果を調べる。ハドロンチャンネルだけのシュレーディンガー方程式は、波動関数を $|\psi\rangle$ として

$$(T^h + \Delta + V^h) |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (4.24)$$

である。このとき、 V^h は散乱ポテンシャルなので、シュレーディンガー方程式は運動量でラベルされた連続固有状態 $|\mathbf{p}_{\text{full}}\rangle$ を解に持つ。更に、 V^h が引力で十分強いときには離散固有状態 $|\psi_n\rangle$ を持つことができる。これらが満たすシュレーディンガー方程式は、

$$(T^h + \Delta + V^h) |\mathbf{p}_{\text{full}}\rangle = E_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}_{\text{full}}\rangle, \quad (4.25)$$

$$(T^h + \Delta + V^h) |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle, \quad (4.26)$$

と表される。ここで、 $E_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \Delta$ は運動量 \mathbf{p} を持つ状態の固有エネルギー、 m は換算質量である。運動量を持たない状態のエネルギーが、しきい値のエネルギーとなるため、 $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ のとき $E_{\mathbf{p}} = \Delta$ となる。また、 E_n は n 番目の状態 ψ_n の固有エネルギーである。このとき、固有状態の規格・直交性は

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}, \quad (4.27)$$

$$\langle \mathbf{p}'_{\text{full}} | \mathbf{p}_{\text{full}} \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (4.28)$$

$$\langle \psi_n | \mathbf{p}_{\text{full}} \rangle = 0, \quad (4.29)$$

とする。また、基底の完全性より、

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}_{\text{full}}\rangle \langle \mathbf{p}_{\text{full}}| = 1^h, \quad (4.30)$$

と、ハドロンチャンネルの単位行列 1^h が $|\mathbf{p}_{\text{full}}\rangle$ と $|\psi_n\rangle$ を用いて表される。クォークチャンネルの有効ポテンシャルを調べる際に、式 (4.30) における離散固有状態 $|\psi_n\rangle$ からの寄与は 4.3 節の式 (4.22) と同様な結果を与える。y よって、以下では、クォーク間ポテンシャルに特有の散乱状態 $|\mathbf{p}_{\text{full}}\rangle$ からの寄与のみを考える。このとき、このとき完全系は、

$$\int d\mathbf{p} |\mathbf{p}_{\text{full}}\rangle \langle \mathbf{p}_{\text{full}}| = 1^h \quad (4.31)$$

チャンネル結合されたハミルトニアンから、ハドロンチャンネルを消去した結果得られるクォークチャンネルの有効ポテンシャルは、4.3 節と同じように、位置演算子の固有

ケット $|\mathbf{r}_q\rangle$ で挟むことにより座標表示すると、

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}'_q | V_{\text{eff}}^q(E) | \mathbf{r}_q \rangle &= \langle \mathbf{r}'_q | V^q + V^t G^h(E) V^t | \mathbf{r}_q \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}'_q | V^q | \mathbf{r}_q \rangle \\ &\quad + \int d\mathbf{p}' d\mathbf{p} \langle \mathbf{r}'_q | V^t | \mathbf{p}'_{\text{full}} \rangle \langle \mathbf{p}'_{\text{full}} | G^h(E) | \mathbf{p}_{\text{full}} \rangle \langle \mathbf{p}_{\text{full}} | V^t | \mathbf{r}_q \rangle,\end{aligned}\tag{4.32}$$

となる。前節と同様に、グリーン関数の行列要素は、

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}'_{\text{full}} | G^h(E) | \mathbf{p}_{\text{full}} \rangle &= \frac{1}{E - E_{\mathbf{p}} \pm i0^+} \langle \mathbf{p}'_{\text{full}} | \mathbf{p}_{\text{full}} \rangle \\ &= \frac{1}{E - E_{\mathbf{p}} \pm i0^+} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}),\end{aligned}\tag{4.33}$$

となる。ここで、 $\pm i0^+$ は積分の不定性を消すための境界条件を指定する。ただし、本研究では $+i0^+$ をとる。これより、式 (4.32) の積分は、

$$\begin{aligned}&\int d\mathbf{p}' d\mathbf{p} \langle \mathbf{r}'_q | V^t | \mathbf{p}'_{\text{full}} \rangle \langle \mathbf{p}'_{\text{full}} | G^h(E) | \mathbf{p}_{\text{full}} \rangle \langle \mathbf{p}_{\text{full}} | V^t | \mathbf{r}_q \rangle \\ &= \int d\mathbf{p} \langle \mathbf{r}'_q | V^t | \mathbf{p}_{\text{full}} \rangle \frac{1}{E - E_{\mathbf{p}} + i0^+} \langle \mathbf{p}_{\text{full}} | V^t | \mathbf{r}_q \rangle,\end{aligned}\tag{4.34}$$

となる。よって、有効ポテンシャルの座標表示は

$$\langle \mathbf{r}'_q | V_{\text{eff}}^q(E) | \mathbf{r}_q \rangle = \langle \mathbf{r}'_q | V^q | \mathbf{r}_q \rangle + \int d\mathbf{p} \frac{\langle \mathbf{r}'_q | V^t | \mathbf{p}_{\text{full}} \rangle \langle \mathbf{p}_{\text{full}} | V^t | \mathbf{r}_q \rangle}{E - E_{\mathbf{p}} + i0^+},\tag{4.35}$$

となる。

式 (4.35) の右辺第 1 項は、クォークチャンネル固有のポテンシャルの座標表示を表す。右辺第 2 項はチャンネル結合の効果によって、ハドロン自由度の情報が含まれており、ハドロンチャンネルの相互作用が散乱ポテンシャルであるため連続固有状態の積分となっている。ハドロン間有効相互作用と同じように、被積分関数の分子から、クォーク間有効ポテンシャルが非局所型ポテンシャルであることがわかる。さらに分母より、エネルギー依存であることもわかる。

さらに、分母をみると、 $E \geq \Delta$ のとき、 \mathbf{p} の積分が $E = E_{\mathbf{p}}$ となるポールを拾うこと

により、 $g(p) \equiv \langle \mathbf{r}'_q | V^t | \mathbf{p}_{\text{full}} \rangle \langle \mathbf{p}_{\text{full}} | V^t | \mathbf{r}_q \rangle$ として、

$$\begin{aligned}
\text{Im} [\langle \mathbf{r}'_q | V_{\text{eff}}^q(E) | \mathbf{r}_q \rangle] &= \text{Im} \left[4\pi \int_0^\infty dp p^2 \frac{g(p)}{E - E_{\mathbf{p}} + i0^+} \right] \\
&= \text{Im} \left[4\pi \int_\Delta^\infty dE_{\mathbf{p}} \frac{m}{p} p^2 \frac{g(p)}{E - E_{\mathbf{p}} + i0^+} \right] \\
&= \text{Im} \left[-4\pi \int_\Delta^\infty dE_{\mathbf{p}} m \sqrt{2m(E_{\mathbf{p}} - \Delta)} \frac{g(E_{\mathbf{p}})}{E_{\mathbf{p}} - E - i0^+} \right] \\
&= 4\pi^2 \int_\Delta^\infty dE_{\mathbf{p}} m \sqrt{2m(E_{\mathbf{p}} - \Delta)} g(E_{\mathbf{p}}) \delta(E_{\mathbf{p}} - E) \\
&= \begin{cases} 0 & (E \leq \Delta) \\ 4\pi^2 m \sqrt{2m(E - \Delta)} g(E) & (E > \Delta) \end{cases}, \tag{4.36}
\end{aligned}$$

と、ポテンシャルに虚部が生じることがわかる。ここで、 $E_{\mathbf{p}} = \Delta + \frac{p^2}{2m}$ と $dE_{\mathbf{p}} = \frac{p}{m} dp$ 及び、

$$\begin{aligned}
\text{Im} \left[\int dx f(x) \frac{1}{x + i0^+} \right] &= -\pi \int dx f(x) \delta(x) \\
&= -\pi f(0), \tag{4.37}
\end{aligned}$$

を用いた。式 (4.36) は、2 体クォークチャンネルのエネルギーがハドロンチャンネルのしきい値 Δ よりも大きいときに、よりエネルギーの低いハドロンチャンネルの散乱状態へ崩壊する物理課程を表している。2.3.2 節でみたように、クォーク質量が無限に重い場合、ハドロンチャンネルとの結合によりクォーク間ポテンシャルで string-braking が起きるが、このときポテンシャルは虚部を含まない。なぜなら、結合したハドロンチャンネルも無限に重い質量を持つため、散乱状態が生じないためである。一方クォーク質量が有限で、連続固有値を与える散乱状態をもつハドロンチャンネルと結合したクォーク間有効ポテンシャル (4.35) は、虚部を含むことがわかる。

さらに、式 (4.35) の積分を解析的に計算するために、具体的な条件を与える。遷移ポテンシャルが S 波で局所型であること

$$\langle \mathbf{r}'_h | V^t | \mathbf{r}_q \rangle = V^t(r) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \tag{4.38}$$

及びハドロン間ポテンシャルがゼロであること

$$V^h = 0, \tag{4.39}$$

のふたつの条件を加えると、 $|\mathbf{p}_{\text{full}}\rangle$ が平面波となるため、クォーク間有効ハミルトニアン

表 4.1 ハドロン間有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}^h(E)$ とクォーク間有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}^q(E)$ の性質のまとめ

有効ポテンシャル	性質
$V_{\text{eff}}^h(E)$	非局所型、エネルギー依存
$V_{\text{eff}}^q(E)$	非局所型、エネルギー依存、 $E > \Delta$ の時、虚部を有する

の座標表示は解析的に

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}'_q | V_{\text{eff}}^q(E) | \mathbf{r}_q \rangle &= \langle \mathbf{r}'_q | V^q | \mathbf{r}_q \rangle \\ &\quad - V^t(r')V^t(r) \frac{2m \exp[-\sqrt{2m(\Delta - E) - i0^+}|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|]}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

と与えられる。式 (4.40) より、 $E \geq \Delta$ のとき、第 2 項の分子にある平方根が $\sqrt{2m(\Delta - E) - i0^+} = -i\sqrt{2m(E - \Delta)}$ ($E \geq \Delta$) となることからポテンシャルの虚部が生じる。

ところが、ポテンシャルのフーリエ展開を利用してプロパゲーター $(E - E_p + i0^+)^{-1}$ を微分展開すると、

$$\langle \mathbf{r}'_q | V_{\text{eff}}^q(E) | \mathbf{r}_q \rangle = \langle \mathbf{r}'_q | V^q | \mathbf{r}_q \rangle + \frac{[V^t(r)]^2}{E - \Delta} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + O(\nabla^2), \quad (4.41)$$

となり展開の第 1 項は $E \geq \Delta$ でも実数になる。よって式 (4.40) とは違いポテンシャルに虚部が生じず、有限次の展開では物理的性質が破れる可能性があることがわかる。

4.5 結論

4.2 節では、クォークチャンネルとハドロンチャンネルの結合をポテンシャルを用いて定式化した。更に、4.3 節ではクォークチャンネルの成分が陽に現れないように消去することで、ハドロン間有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}^h(E)$ を座標表示した式 (4.22) を得た。同様に、4.4 節では、ハドロンチャンネルを消去することでクォーク間有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}^q(E)$ を座標表示した式 (4.35) を得た。各有効ポテンシャルは、各チャンネルのポテンシャルが元々持っていた性質に加えて、表 4.1 に示すように、チャンネル結合の効果により、どちらも、相互作用前後の相対座標 \mathbf{r} と \mathbf{r}' に独立に依存するため非局所型ポテンシャルとなり、エネルギー E 依存性を有する。クォーク間有効ポテンシャルの場合はこれらの性質に加えて、ハドロン生成のしきい値を超えるエネルギーでポテンシャルに虚部が生じる

ことで、よりエネルギーが低く安定なハドロン状態へ崩壊する過程を正しく表すことを示した。

第 5 章

ポテンシャルの局所近似

この章では、物理的な性質が不透明な非局所型ポテンシャルを局所型ポテンシャルに近似することで、相互作用の物理的描像を明らかにすることを目指す。5.1 節では非局所型ポテンシャル及び局所型ポテンシャルの定義をまとめる。次に 5.2 節では非局所型ポテンシャルが解析的に厳密に解ける例として、分離型でかつ湯川型なポテンシャルを導入することで波動関数や物理量を得る [6]。更に、局所近似の手法として formal 微分展開 (5.3 節) と HAL QCD 法 (5.3 節) の二つの近似手法を導入する。また、本研究の応用として 4 章で求めた非局所型ハドロン間ポテンシャルの局所近似を導出する (5.5 節)

5.1 局所ポテンシャルと非局所ポテンシャル

非相対論的な量子力学における、2 粒子系のポテンシャル問題を考える。本節ではポテンシャルに関する一般論として、ポテンシャル演算子 V を座標表示の行列要素で表したときの性質で局所型と非局所型の 2 つに分類する。まず、相対座標 \mathbf{r} に対し、状態 $|\mathbf{r}\rangle$ を

$$\hat{\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle, \quad (5.1)$$

のように、位置演算子 $\hat{\mathbf{r}}$ の固有状態として定義する。更に、規格化・直交条件を

$$\langle \mathbf{r}' | \mathbf{r} \rangle = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (5.2)$$

のように、完全性を

$$\int d^3\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| = 1, \quad (5.3)$$

のように定義する。次に、ポテンシャル演算子 V の座標表示の行列要素が、

$$\langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{r} \rangle = V(\mathbf{r}', \mathbf{r}), \quad (5.4)$$

のように \mathbf{r} と \mathbf{r}' に独立に依存するポテンシャルを非局所型ポテンシャルと呼ぶ。これは相互作用前の始状態 $|\mathbf{r}\rangle$ と相互作用後の終状態 $\langle\mathbf{r}'|$ で粒子の相対座標が変化するポテンシャルである。一般には、相互作用前後で位置関係が変わりうるので、ポテンシャルは非局所型ポテンシャルとなることができる。非局所型ポテンシャルの例として、 ω をポテンシャル強度として、

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \omega V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}'), \quad (5.5)$$

のように、 \mathbf{r} のみの関数と \mathbf{r}' のみの関数の積となっている分離型ポテンシャルが挙げられる。一方、

$$\langle\mathbf{r}'|V|\mathbf{r}\rangle = V(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (5.6)$$

のようにデルタ関数 $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ に比例し、相互作用前後で位置関係が不変なポテンシャルは局所型ポテンシャルと呼ばれる。局所型ポテンシャルは初等量子力学で通常扱うポテンシャルである。

状態 $|\psi\rangle$ に対するシュレーディンガー方程式は、

$$\begin{aligned} H|\psi\rangle &= E|\psi\rangle \\ \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V\right)|\psi\rangle &= E|\psi\rangle, \end{aligned} \quad (5.7)$$

である。ただし、 H, E, m, \mathbf{p}, V はそれぞれ、系のハミルトニアン演算子、エネルギー、2粒子の換算質量、運動量演算子、ポテンシャル演算子である。座標表示するために (5.7) に左から $\langle\mathbf{r}|$ をかけると

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \langle\mathbf{r}|V|\psi\rangle &= E\psi(\mathbf{r}) \\ -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \int d^3\mathbf{r}' \langle\mathbf{r}|V|\mathbf{r}'\rangle \langle\mathbf{r}'|\psi\rangle &= E\psi(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

となる。ここで、座標表示の波動関数を $\langle\mathbf{r}|\psi\rangle = \psi(\mathbf{r})$ とする。

一般的な非局所型ポテンシャル、すなわち式 (5.4) の表式のときは、

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}', \mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') = E\psi(\mathbf{r}), \quad (5.9)$$

のように式 (5.9) は積分微分方程式となり、 $\psi(\mathbf{r})$ に対し自己無撞着に解かなければならず、計算が複雑となる。ただし、ポテンシャルとして分離型ポテンシャル (5.5) をとると

きは、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \int d^3\mathbf{r}' \omega V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') &= E\psi(\mathbf{r}) \\ -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \omega V(\mathbf{r}) \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') &= E\psi(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5.10)$$

のようになり、 $V(\mathbf{r})$ が特別な場合には、解析的に解くことができる (5.2 節参照)。しかし、非局所型ポテンシャルは物理的な性質が明白でないため、通常扱われることは少ない。

一方、局所型ポテンシャルのとき、すなわち式 (5.6) の表式のときは、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') &= E\psi(\mathbf{r}) \\ -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) &= E\psi(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

のように $\psi(\mathbf{r})$ に関する微分方程式となる。これが、一般に量子力学で扱うシュレーディンガー方程式である。この方程式は \mathbf{r} のみを変数であり、左辺第 2 項の積分が解析的に処理されるため、非局所型ポテンシャルにおける方程式 (5.9) と比べ、数値計算において計算コストが少ないという利点がある。加えて、ポテンシャルの到達距離などの物理的な描像が理解しやすいというメリットもある。

4 章でみたように、チャンネル結合の効果によりポテンシャルがエネルギー E に依存する場合があるため、ポテンシャルがエネルギー依存性を持つ場合を考える。局所型でエネルギー依存なポテンシャルを用いたシュレーディンガー方程式は、

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}, E)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (5.12)$$

となる。シュレーディンガー方程式を解くためには、まずあるエネルギー E でのポテンシャル $V(\mathbf{r}, E)$ を決めてから右辺の固有エネルギー E を求めなければならない。一般には求めた固有エネルギー E と最初にポテンシャルを決めたエネルギー E が一致するとは限らないため、両辺のエネルギー E が一致するように自己無撞着的に決めることで正しい解を得る必要がある。

5.2 分離・湯川型を用いた非局所型ポテンシャルの解析解

5.2.1 シュレーディンガー方程式

この節では、文献 [6] の結果に従い、分離型の非局所型ポテンシャル (5.5) を用いたシュレーディンガー方程式を解析的に解くことで、その解である波動関数と位相差を求める。

そのために、 $V(\mathbf{r})$ に湯川型関数

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (5.13)$$

を用いた分離型の非局所型ポテンシャル

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \omega V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}') = \omega \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{e^{-\mu r'}}{r'}, \quad (5.14)$$

を考える。ただし、 $r = |\mathbf{r}|$ 、カットオフ μ は長さの逆数の次元を持つ定数で、 $r > 1/\mu$ となるときポテンシャルが指数関数的に減少するため、相互作用の到達距離が $1/\mu$ となる。また、 ω は、相互作用の強さを決定する定数で、符号が正のとき斥力、負のとき引力となる。このポテンシャル (5.14) は、解析的に解くことができる非局所型ポテンシャルの特別な例である。分離型ポテンシャル (5.14) のシュレーディンガー方程式 (5.10) は、

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \omega \frac{e^{-\mu r}}{r} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{e^{-\mu r'}}{r'} \psi(\mathbf{r}') = E \psi(\mathbf{r}), \quad (5.15)$$

となる。

5.2.2 散乱波動関数の計算

ここでは、分離型の非局所型ポテンシャルを用いたシュレーディンガー方程式 (5.10) を解くことで波動関数を求める。その後、湯川型関数 (5.13) を用いた場合の解析的な波動関数を導出する。

まず、エネルギー $E > 0$ で散乱の境界条件を満たす波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ を求めるため、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \omega V(\mathbf{r}) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') &= E \psi(\mathbf{r}) \\ (E - (-\frac{1}{2m} \nabla^2)) \psi(\mathbf{r}) &= \omega V(\mathbf{r}) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (5.16)$$

とする。ここで、

$$E = \frac{k^2}{2m}, \quad (5.17)$$

として、エネルギーを運動量 k で表す。恒等式

$$\left(\frac{k^2}{2m} - \left(-\frac{\nabla^2}{2m} \right) \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0, \quad (5.18)$$

を右辺に足すと、

$$\left(\frac{k^2}{2m} - \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2\right)\right)\psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{k^2}{2m} - \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2\right)\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \omega V(\mathbf{r}) \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}'), \quad (5.19)$$

となる。更に左から $\left(\frac{k^2}{2m} - \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2\right)\right)^{-1}$ を掛けると、

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \left(\frac{k^2}{2m} - \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2\right)\right)^{-1}\omega V(\mathbf{r}) \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}'), \quad (5.20)$$

となる。恒等式を足した理由は、相互作用がないとしたときに波動関数が平面波となるような散乱の境界条件

$$\lim_{V\rightarrow 0} [\psi(\mathbf{r})] = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (5.21)$$

を満たすためである。次に、式 (5.20) の右辺第二項をブラケット表示する。式 (5.4)、(5.5) 及び

$$\langle \mathbf{r} | \psi \rangle = \psi(\mathbf{r}), \quad (5.22)$$

より、

$$\langle \mathbf{r} | \left(\frac{k^2}{2m} - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right)^{-1} | \hat{V} \int d^3\mathbf{r}' |\mathbf{r}'\rangle \langle \mathbf{r}' | \psi \rangle, \quad (5.23)$$

となる。位置 \mathbf{x} と運動量 \mathbf{p} の完全系を挟むと、

$$\langle \mathbf{r} | \left(\frac{k^2}{2m} - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right)^{-1} \left[\int d^3\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| \right] \left[\int d^3\mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| \right] \hat{V} \int d^3\mathbf{r}' |\mathbf{r}'\rangle \langle \mathbf{r}' | \psi \rangle, \quad (5.24)$$

となる。ブラケットをまとめると、式 (5.4) に注意して、

$$\begin{aligned} & \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{r}' \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle \frac{1}{\frac{k^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} + i0^+} \langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle \omega V(\mathbf{x}) V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \\ &= \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{r}' \left[\int d^3\mathbf{p} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\frac{k^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} + i0^+} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \right] \omega V(\mathbf{x}) V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \\ &\equiv \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{r}' [-G_k(\mathbf{r}, \mathbf{x})] \omega V(\mathbf{x}) V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (5.25)$$

となる。ただし、

$$G_k(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{2me^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{x})}}{p^2 - k^2 - i0^+}, \quad (5.26)$$

と定義した。結局、式 (5.20) は、

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \omega \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{r}' G_k(\mathbf{r}, \mathbf{x}) V(\mathbf{x}) V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \\ &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \omega \langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'),\end{aligned}\quad (5.27)$$

となる。ここで、

$$\langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle = \int d^3\mathbf{x} G_k(\mathbf{r}, \mathbf{x}) V(\mathbf{x}),\quad (5.28)$$

と定義した。式 (5.27) は波動関数に対するリップマン・シュウインガー方程式と呼ばれる。

式 (5.27) の両辺に $V(\mathbf{r})$ を掛けて \mathbf{r} で積分すると、

$$\begin{aligned}\int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) &= \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \int d^3\mathbf{r} \omega V(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle \cdot \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \\ \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) &= \langle V | \mathbf{k} \rangle - \omega \langle V | G_k | V \rangle \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (5.29)$$

となる。ただし、右辺の積分において引数を $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ とした。また、

$$\langle V | \mathbf{k} \rangle = \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},\quad (5.30)$$

$$\langle V | G_k | V \rangle = \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle,\quad (5.31)$$

と定義した。これより、

$$\begin{aligned}(1 + \omega \langle V | G_k | V \rangle) \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) &= \langle V | \mathbf{k} \rangle \\ \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) &= \frac{\langle V | \mathbf{k} \rangle}{1 + \omega \langle V | G_k | V \rangle},\end{aligned}\quad (5.32)$$

となる。これを式 (5.27) に代入すると、

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \omega \langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \\ &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle \frac{\langle V | \mathbf{k} \rangle}{\frac{1}{\omega} + \langle V | G_k | V \rangle},\end{aligned}\quad (5.33)$$

となる。このように、非局所型ポテンシャルとして分離型 (5.5) を用いたリップマンシュウインガー方程式 (5.27) の解が閉じた形で得られる。

次に、 $V(\mathbf{r}) = e^{-\mu r}/r$ の場合に、式 (5.33) における各ブラケットを計算する。ただし、散乱が起こるためにはポテンシャルが無限遠で収束しなければならないので、 $\mu > 0$ であることに注意する。行列要素 $\langle V | \mathbf{k} \rangle$ は、A.2.1 節を参考に、

$$\langle V | \mathbf{k} \rangle = \frac{4\pi}{\mu^2 + k^2}, \quad (5.34)$$

である。次に、 $\langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle$ の行列要素を、A.2.2 節を参考にすると、

$$\langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle = \frac{2m(e^{ikr} - e^{-\mu r})}{(\mu^2 + k^2)r}, \quad (5.35)$$

が得られる。これを、

$$\langle V | G_k | V \rangle = \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle, \quad (5.36)$$

に代入して A.2.3 節を参考に計算すると、

$$\langle V | G_k | V \rangle = \frac{8\pi m}{(\mu^2 + k^2)^2} \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right], \quad (5.37)$$

が得られる。以上、式 (5.34)、式 (5.35)、式 (5.37) を用いて、波動関数 (5.33) が、

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{2m(e^{ikr} - e^{-\mu r})}{(\mu^2 + k^2)r} \frac{\frac{4\pi}{\mu^2 + k^2}}{\frac{1}{\omega} + \frac{8\pi m}{(\mu^2 + k^2)^2} \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right]} \\ &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{e^{ikr} - e^{-\mu r}}{r} \frac{8\pi m\omega}{(\mu^2 + k^2)^2 + 8\pi m\omega \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right]}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

と計算される。ここで、右辺第 2 項には角度の情報がなく s 波の寄与しか含まれていないので、波動関数全体に付与される散乱の寄与は s 波だけである。従って、平面波の部分派展開

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta), \quad (5.39)$$

の和において、 $\ell = 0$ だけを取り出すと、

$$\begin{aligned}
e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= i^0 j_0(kr) P_0(\cos\theta) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta) \\
&= j_0(kr) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta) \\
&= \frac{\sin(kr)}{kr} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta) \\
&= \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta), \tag{5.40}
\end{aligned}$$

と、計算される。よって、 s 波の波動関数 $\psi_k^0(r)$ は

$$\psi_k^0(r) = \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} - \frac{e^{ikr} - e^{-\mu r}}{r} \frac{8\pi m\omega}{(\mu^2 + k^2)^2 + 8\pi m\omega \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right]}, \tag{5.41}$$

となり、波動関数 $\psi_k^0(r)$ が r と k の式で表される。

5.2.3 位相差の計算

次に、散乱の位相差 δ を得るために、十分遠方の波動関数を計算すると、 $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\mu r}/r = 0$ なので、

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} [\psi_k^0(r)] &= \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{8\pi m\omega}{(\mu^2 + k^2)^2 + 8\pi m\omega \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right]} \\
&= \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1 - \frac{(2ik)8\pi m\omega}{(\mu^2 + k^2)^2 + 8\pi m\omega \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right]}}{2ik} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{1}{2ik}, \tag{5.42}
\end{aligned}$$

となる。一般に、 s 波の波動関数 $\psi_k^0(r)$ の $r \rightarrow \infty$ での漸近形は、位相差 $\delta(k)$ を用いて、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\psi_k^0(r)] \propto \frac{\sin(kr + \delta(k))}{kr}, \tag{5.43}$$

となることが知られている。これと、式 (5.42) を比較して、 e^{-ikr} の係数が一致するように漸近形の比例係数を $e^{i\delta(k)}$ と決定する。このとき、

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} [\psi_k^0(r)] &= e^{i\delta(k)} \frac{\sin(kr + \delta(k))}{kr} \\
&= \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{2i\delta(k)}}{2ik} - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{1}{2ik}, \tag{5.44}
\end{aligned}$$

となるので、位相差 $\delta(k)$ が、

$$e^{2i\delta(k)} = 1 - \frac{(2ik)8\pi m\omega}{(\mu^2 + k^2)^2 + 8\pi m\omega \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right]}, \quad (5.45)$$

と求まる。なお、 $e^{2i\delta(k)}$ は S 行列であり、解析的に求められていることがわかる。有効レンジ展開との対応をみるために式 (5.45) から $k \cot \delta(k)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} k \cot \delta(k) &= k \frac{\cos \delta(k)}{\sin \delta(k)} \\ &= k \frac{e^{i\delta(k)} + e^{-i\delta(k)}}{2} \frac{2i}{e^{i\delta(k)} - e^{-i\delta(k)}} \frac{e^{i\delta}}{e^{i\delta}} \\ &= -\frac{\mu}{2} \left[1 + \frac{\mu^3}{4\pi m\omega} \right] k^0 + \frac{1}{2\mu} \left[1 - \frac{2\mu^3}{4\pi m\omega} \right] k^2 - \frac{1}{8\pi m\omega} k^4 \\ &= -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2\mu} \left[1 - \frac{2\mu^3}{4\pi m\omega} \right] k^2 - \frac{1}{8\pi m\omega} k^4, \end{aligned} \quad (5.46)$$

と、運動量 k の 4 乗までの関数として得られる。ただし、

$$a_0 = + \frac{8\pi m\omega}{\mu(4\pi m\omega + \mu^3)}, \quad (5.47)$$

と、散乱長 a_0 を定義した。一般に有効レンジ展開は k に関して無限次までの項を含んでもよいが、湯川型関数の場合には有限次で得られることがわかる。式 (5.41) における一般の r での波動関数 $\psi_k^0(r)$ は、

$$\begin{aligned} \psi_k^0(r) &= \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} - \frac{e^{ikr} - e^{-\mu r}}{r} \frac{8\pi m\omega}{(\mu^2 + k^2)^2 + 8\pi m\omega \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right]} \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1 - \frac{(2ik)8\pi m\omega}{(\mu^2 + k^2)^2 + 8\pi m\omega \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right]}}{2ik} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{1}{2ik} \\ &\quad - \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{8\pi m\omega}{(\mu^2 + k^2)^2 + 8\pi m\omega \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right]}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

である。ここで式 (5.45) より、

$$\psi_k^0(r) = e^{i\delta(k)} \frac{\sin(kr + \delta(k))}{kr} + \frac{1 - e^{2i\delta(k)}}{2ik} \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (5.49)$$

と、波動関数が位相差を用いて与えられる。波動関数 (5.49) は複素数値をとるが、波動関数の位相は物理量に影響を与えないので $e^{-i\delta(k)}$ を両辺にかけると、波動関数 $\psi_k^0(r)$ が

$$\psi_k^0(r) = \frac{\sin(kr + \delta(k)) - \sin \delta(k)e^{-\mu r}}{kr} \quad (5.50)$$

と、実数で解析的に得られる。

5.3 formal 微分展開

本節では文献 [6] に従い、分離型の非局所型ポテンシャルをテイラー展開により微分 ∇ のべきで展開し局所近似する手法である、formal 微分展開を定式化する。非局所型のポテンシャルの $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ のまわりでのテイラー展開は、

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}) \nabla_{i_1}^r \dots \nabla_{i_n}^r \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.51)$$

である。ここで、一般の非局所型ポテンシャルに対しては、展開係数は、

$$V_n^{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) = \frac{1}{n!} \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\mathbf{r}' - \mathbf{r})^{i_1} \dots (\mathbf{r}' - \mathbf{r})^{i_n}, \quad (5.52)$$

であり、式 (5.5) のように分離型であれば、

$$V_n^{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}) = \frac{1}{n!} \omega V(\mathbf{r}) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' - \mathbf{r})^{i_1} \dots (\mathbf{r}' - \mathbf{r})^{i_n}, \quad (5.53)$$

である。ただし、 n は微分の次数であるため、運動量が十分小さい範囲では、展開の高次は無視できる。そのため、最も支配的となる低エネルギーの $n = 0$ をとると、

$$V_0(\mathbf{r}) = \omega V(\mathbf{r}) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}'), \quad (5.54)$$

となる。これより、式 (5.51) は、

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V_0(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \mathcal{O}(\nabla^1), \quad (5.55)$$

となる。これが分離型ポテンシャルを formal 微分展開により局所近似したポテンシャルの一般形の最低次である。さらに、ポテンシャルが式 (5.14) のように、湯川型 $V(\mathbf{r}) = \omega \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{e^{-\mu r'}}{r'}$ である時には、

$$\begin{aligned} V_0(\mathbf{r}) &= \omega \frac{e^{-\mu r}}{r} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{e^{-\mu r'}}{r'} \\ &= \frac{4\pi\omega e^{-\mu r}}{\mu^2 r}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

となる。よって、局所近似は、

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{4\pi\omega e^{-\mu r}}{\mu^2 r} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \mathcal{O}(\nabla^1), \quad (5.57)$$

と得られる。

5.4 HAL QCD 法

本節では論文 [6] に基づき、分離・湯川型の非局所型ポテンシャルから求めた波動関数を用いたシュレーディンガー方程式が、局所型のシュレーディンガー方程式に従うと仮定して、ポテンシャルについて逆解きすることで局所型ポテンシャルを定式化する。このような手法を HAL QCD 法による微分展開と呼ぶ。加えて、ゼロエネルギー極限でのポテンシャルの解析解を与える。

5.4.1 定式化

本節では、非局所型ポテンシャルによる s 波の散乱を考える。与えられたポテンシャルに対して s 波の波動関数 $\psi_k(r)$ が既に得られているとする。例えば、5.2 章における分離・湯川型の (5.14) に対しては式 (5.50) の波動関数 $\psi_k^0(r)$ が得られている。まず、 $n+1$ 個の固有運動量 k_i , ($i = 0, 1, \dots, n$) の点で波動関数 $\psi_{k_i}(r)$ を用意する。この波動関数が、局所型のポテンシャル $V_n(r, \frac{d}{dr})$ を用いたシュレーディンガー方程式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V_n(r, \frac{d}{dr})\right)\psi_{k_i}(r) &= E_{k_i}\psi_{k_i}(r) \\ \left(-\frac{1}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + V_n(r, \frac{d}{dr})\right)\psi_{k_i}(r) &= E_{k_i}\psi_{k_i}(r), \end{aligned} \quad (5.58)$$

に従うことを仮定する。ここで、 E_{k_i} は運動量 k_i の時のエネルギー $E_{k_i} = \frac{k_i^2}{2m}$ 、また、 m, \mathbf{p} はそれぞれ換算質量、運動量演算子である。

更に、ポテンシャル $V_n(r, \frac{d}{dr})$ を $n+1$ 項の和に微分のべきで展開すると

$$V_n(r, \frac{d}{dr}) = \sum_{i=0}^n V_{n,i}(r) \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r\right)^i, \quad (5.59)$$

となる。この展開係数 $V_{n,i}(r)$ は、 $n+1$ 個のシュレーディンガー方程式 (5.58) により決定される。HAL QCD 法は微分の偶数次のみが含まれる定式化である。ポテンシャルに奇数次を含むような定式化をとることもできるが、回転対称性と時間反転対称性を持つエ

ルミートポテンシャルには微分の奇数次の項が含まれないので、散乱の位相差を記述するために奇数次の項は必要ない。実際、微分の一次を含むような、formal 微分展開による局所型ポテンシャルは近似の精度を落とすことが知られている [6]。

方程式 (5.58) から、ポテンシャルの展開係数 $V_{n,j}(r)$ が

$$\sum_{j=0}^n T_{ij}(r)V_{n,j}(r) = K_i(r)$$

$$V_{n,i}(r) = \sum_{j=0}^n [T^{-1}(r)]_{ij} K_j(r), \quad (5.60)$$

のように導かれる。ただし、

$$T_{ij}(r) \equiv \frac{1}{r} \frac{d^{2j}}{dr^{2j}} [r \cdot \psi_{k_i}(r)], \quad (5.61)$$

$$K_i(r) \equiv \frac{1}{2m} \left(k_i^2 + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \right) \psi_{k_i}(r), \quad (5.62)$$

である。注意すべきこととして、式 (5.59) のポテンシャル V_n は近似ポテンシャルであり、 k_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) の選択に依存し、 $k = k_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) の点で正しい位相差を与えることが保証されているが、それ以外の運動量では近似的な値を与える。

本研究では、微分の最低次のポテンシャルに注目するので、式 (5.60) で $n = 0$ をとる。このとき、 $i = j = 0$ しか取り得えないので、

$$\begin{aligned} V_{0,0}(r) &= [T^{-1}(r)]_{00} K_0(r) \\ &= [\psi_{k_0}(r)]^{-1} \cdot \frac{1}{2m} \left(k_0^2 + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \right) \psi_{k_0}(r) \\ &= \frac{k_0^2}{2m} + \frac{1}{2m\psi_{k_0}(r)} \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \right) \psi_{k_0}(r), \end{aligned} \quad (5.63)$$

となる。局所近似されたポテンシャルの最低次は、

$$V_0(r, \frac{d}{dr}) = V_{0,0}(r), \quad (5.64)$$

と、 $i = 0$ となる 1 点の運動量での波動関数のみで与えられる。このときの運動量を $k_0 = k_{\text{pot}}$ と呼び、エネルギーを $E_{\text{pot}} = \frac{k_{\text{pot}}^2}{2m}$ とする。これより、 $k_{\text{pot}} = \sqrt{2mE_{\text{pot}}}$ となる。以上により、最低次の HAL QCD 法による局所近似ポテンシャル $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ が、

$$V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}}) = E_{\text{pot}} + \frac{1}{2mr\psi_{k_{\text{pot}}}(r)} \frac{d^2}{dr^2} [r\psi_{k_{\text{pot}}}(r)] + \mathcal{O}(\nabla^2), \quad (5.65)$$

と求められる。ここで、微分 ∇ の誤差が 2 次以上なのは、HAL QCD 法によるポテンシャル (5.59) が微分の奇数次を含まないように定義されたためである。注意しておくべきこととして、 E_{pot} は、ポテンシャル $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ を求めるための波動関数 $\psi_{k_{\text{pot}}}$ を指定するエネルギーである。HAL QCD 法による局所型ポテンシャルを用いたシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{1}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})\right) \psi(r) = E \psi(r), \quad (5.66)$$

を、 $E = E_{\text{pot}}$ の点で解いた場合には、 $\psi = \psi_{k_{\text{pot}}}$ が厳密に得られ、局所型ポテンシャルから計算した位相差も近似元の非局所型ポテンシャルから得られる位相差と厳密に一致する。しかし $E \neq E_{\text{pot}}$ の場合には、一般に厳密な波動関数は得られないことに注意する。

5.4.2 湯川型ポテンシャルの場合

次に、波動関数 $\psi_{k_{\text{pot}}}(r)$ として湯川型ポテンシャルから得られる式 (5.50) の具体的な波動関数

$$\psi_k(r) = \frac{\sin(kr + \delta(k)) - \sin \delta(k) e^{-\mu r}}{kr}$$

を用いた場合の解析解を調べる。これを式 (5.65) に代入すると、

$$\begin{aligned} V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}}) &= \frac{1}{\psi_{k_{\text{pot}}}(r)} \frac{1}{2m} \left(k_{\text{pot}}^2 \psi_{k_{\text{pot}}}(r) + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r \psi_{k_{\text{pot}}}(r)] \right) + \mathcal{O}(\nabla^2) \\ &= E_{\text{pot}} + \frac{k_{\text{pot}} r}{2mr(\sin(k_{\text{pot}} + \delta) - \sin \delta e^{-\mu r})} \\ &\quad \times \frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{\sin(k_{\text{pot}} r + \delta) - \sin \delta e^{-\mu r}}{k_{\text{pot}} r} \right] + \mathcal{O}(\nabla^2) \\ &= E_{\text{pot}} + \frac{k_{\text{pot}} r}{2mr(\sin(k_{\text{pot}} r + \delta) - \sin \delta e^{-\mu r})} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{k_{\text{pot}} r} (-k^2 \sin(k_{\text{pot}} r + \delta) - \mu^2 \sin \delta e^{-\mu r}) \right] + \mathcal{O}(\nabla^2) \\ &= E_{\text{pot}} + \frac{-k_{\text{pot}}^2 \sin(k_{\text{pot}} r + \delta) - \mu^2 \sin \delta e^{-\mu r}}{2m(\sin(k_{\text{pot}} r + \delta) - \sin \delta e^{-\mu r})} + \mathcal{O}(\nabla^2), \quad (5.67) \end{aligned}$$

となる。ここで位相差 δ は式 (5.45) または式 (5.46) より $k = k_{\text{pot}}$ で与えられる。以上のように、HAL QCD 法により局所近似されたポテンシャルを具体的な表式で導出することができた。

5.4.3 ゼロエネルギー極限のポテンシャル

本節では、低エネルギーでの散乱を調べるために、ゼロエネルギー極限のポテンシャルを解析的に導出する。具体的に、HAL QCD 法による湯川型ポテンシャルを用いた局所近似ポテンシャル (5.67) において、 $E_{\text{pot}} \rightarrow 0$ とする極限のポテンシャルを求める。位相差 $\delta(k)$ の低エネルギー極限を記述する散乱長 a_0 は、

$$k \cot \delta(k) = -\frac{1}{a_0} + \mathcal{O}(k^2), \quad (5.68)$$

と定義される。位相差 δ は

$$\lim_{k \rightarrow 0} \delta(k) = \mathcal{O}(k^1), \quad (5.69)$$

と、 k が十分小さいとき 0 に収束することが知られているので、式 (5.68) の両辺で $k \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta(k) &= \lim_{k \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{a_0} + \mathcal{O}(k^2) \right] \\ \lim_{k \rightarrow 0} k \frac{\cos \delta(k)}{\sin \delta(k)} &= -\frac{1}{a_0} \\ \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{k}{\delta(k)} \right] &= -\frac{1}{a_0}, \end{aligned} \quad (5.70)$$

となる。これより、

$$\lim_{k \rightarrow 0} \delta(k) = -a_0 k, \quad (5.71)$$

が得られる。また、これを用いて、

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sin \delta(k) = -ka_0, \quad (5.72)$$

となる。

これらの極限を用いて、HAL QCD 法による局所近似ポテンシャル (5.67) の極限を求

めると、

$$\begin{aligned}
V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}} = 0) &= \lim_{k_{\text{pot}} \rightarrow 0} \left[\frac{k_{\text{pot}}^2}{2m} + \frac{-k_{\text{pot}}^2 \sin(k_{\text{pot}}r + \delta) - \mu^2 \sin \delta e^{-\mu r}}{2m(\sin(k_{\text{pot}}r + \delta) - \sin \delta e^{-\mu r})} + \mathcal{O}(\nabla^2) \right] \\
&= \lim_{k_{\text{pot}} \rightarrow 0} \left[\frac{k_{\text{pot}}^2}{2m} \right. \\
&\quad \left. + \frac{-k_{\text{pot}}^2 \sin(k_{\text{pot}}r - k_{\text{pot}}a_0 + \dots) - \mu^2 \sin(-k_{\text{pot}}a_0 + \dots)e^{-\mu r}}{2m(\sin(k_{\text{pot}}r - k_{\text{pot}}a_0 + \dots) - \sin(-k_{\text{pot}}a_0 + \dots)e^{-\mu r})} \right] + \mathcal{O}(\nabla^2) \\
&= \lim_{k_{\text{pot}} \rightarrow 0} \left[\frac{-k_{\text{pot}}^2 (k_{\text{pot}}r - k_{\text{pot}}a_0 + \dots) - \mu^2 (-k_{\text{pot}}a_0 + \dots)e^{-\mu r}}{2m((k_{\text{pot}}r - k_{\text{pot}}a_0 + \dots) - (-k_{\text{pot}}a_0 + \dots)e^{-\mu r})} \right] + \mathcal{O}(\nabla^2) \\
&= \lim_{k_{\text{pot}} \rightarrow 0} \left[\frac{-\mu^2 (-k_{\text{pot}}a_0 + \dots)e^{-\mu r}}{2m((k_{\text{pot}}r - k_{\text{pot}}a_0 + \dots) - (-k_{\text{pot}}a_0 + \dots)e^{-\mu r})} \right] + \mathcal{O}(\nabla^2) \\
&= \lim_{k_{\text{pot}} \rightarrow 0} \left[\frac{\mu^2 a_0 e^{-\mu r} k_{\text{pot}} + \dots}{2m(r - a_0 + a_0 e^{-\mu r}) k_{\text{pot}} + \dots} \right] + \mathcal{O}(\nabla^2) \\
&= \frac{a_0 \mu^2 e^{-\mu r}}{2m(r - a_0 + a_0 e^{-\mu r})} + \mathcal{O}(\nabla^2), \tag{5.73}
\end{aligned}$$

と、散乱長 a_0 を用いて表される。同様に、ゼロエネルギー極限における波動関数 (5.50) は、

$$\begin{aligned}
\lim_{k_{\text{pot}} \rightarrow 0} \psi_{k_{\text{pot}}}(r) &= \lim_{k_{\text{pot}} \rightarrow 0} \frac{\sin(k_{\text{pot}}r + \delta(k_{\text{pot}})) - \sin \delta(k_{\text{pot}})e^{-\mu r}}{k_{\text{pot}}r} \\
&= \lim_{k_{\text{pot}} \rightarrow 0} \frac{k_{\text{pot}}r - k_{\text{pot}}a_0 + k_{\text{pot}}a_0 e^{-\mu r}}{k_{\text{pot}}r} \\
&= \frac{r - a_0 + a_0 e^{-\mu r}}{r}, \tag{5.74}
\end{aligned}$$

と、散乱長 a_0 を用いて表される。

5.5 ハドロン間ポテンシャルへの応用

4.3 章で求めた、クォークチャンネルを消去することで得たハドロン間有効ポテンシャル (4.22) は

$$\langle \mathbf{r}'_h | V_{\text{eff}}^h(E) | \mathbf{r}_h \rangle = \langle \mathbf{r}'_h | V^h | \mathbf{r}_h \rangle + \sum_n \frac{F_n^*(\mathbf{r}') F_n(\mathbf{r})}{E - E_n}, \tag{5.75}$$

であった。ここで、チャンネル結合の寄与に注目するため以下では、

$$\langle \mathbf{r}'_h | V^h | \mathbf{r}_h \rangle = 0, \tag{5.76}$$

とする。低エネルギーでは $n \geq 1$ の励起状態の寄与を無視できるため、 $n = 0$ が支配的となるため、

$$V_{\text{eff}}^h(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \frac{F_0^*(\mathbf{r}')F_0(\mathbf{r})}{E - E_0}, \quad (5.77)$$

とできる。更に $n = 0$ の基底状態の形状因子 F_0 が結合定数 g_0 を用いて、 $F_0 = g_0 \frac{e^{-\mu r}}{r}$ となるときは、

$$V_{\text{eff}}^h(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \frac{g_0^2}{E - E_0} \frac{e^{-\mu r'}}{r'} \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (5.78)$$

となる。

5.5.1 位相差の計算

5.3 節の式 (5.78) で求めたハドロン間有効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}}^h(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \frac{g_0^2}{E - E_0} \frac{e^{-\mu r'}}{r'} \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

から位相差を求める。ここで、右辺と式 (5.14) の分離・湯川型ポテンシャル $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \omega \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{e^{-\mu r'}}{r'}$ を比較する。 $E = \frac{k^2}{2m}$ であることを思い出すと、湯川ポテンシャルの係数 ω を

$$\begin{aligned} \omega(E) &= \frac{g_0^2}{E - E_0} \\ &= \frac{g_0^2}{\frac{k^2}{2m} - E_0}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

とすれば、ハドロン間有効ポテンシャルが分離・湯川型ポテンシャルとして得られることがわかる。ポテンシャル強度 ω がエネルギー依存性をもつ場合でも、波動関数や位相差を求める 5.2 節の議論には影響しないので、単に計算の最後に $\omega \rightarrow \omega(E)$ とすればよい。波動関数 (5.50)

$$\psi_k^0(r) = \frac{\sin(kr + \delta(k)) - \sin \delta(k)e^{-\mu r}}{kr}$$

には ω が陽に含まれないので、波動関数の表式は変わらない。一方位相差 $\delta(k)$ の表式 (5.46) で $\omega \rightarrow \omega(E)$ とすると、 $k \cot \delta(k)$ が、

$$\begin{aligned}
k \cot \delta(k) &= -\frac{\mu}{2} \left[1 + \frac{\mu^3}{4\pi m \omega(E)} \right] k^0 + \frac{1}{2\mu} \left[1 - \frac{2\mu^3}{4\pi m \omega(E)} \right] k^2 - \frac{1}{8\pi m \omega(E)} k^4 \\
&= -\frac{\mu}{2} \left[1 + \frac{\mu^3}{\frac{8\pi m^2 g_0^2}{k^2 - 2mE_0}} \right] + \frac{1}{2\mu} \left[1 - \frac{2\mu^3}{\frac{8\pi m^2 g_0^2}{k^2 - 2mE_0}} \right] \cdot k^2 - \frac{1}{2 \frac{8\pi m^2 g_0^2}{k^2 - 2mE_0}} \cdot k^4 \\
&= \left[\mu m E_0 - \frac{\mu^4}{16\pi m^2 g_0^2} \right] + \left[-\frac{\mu}{2} - \frac{mE_0}{\mu} + \frac{\mu^2}{8\pi m^2 g_0^2} \right] k^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{2\mu} + \frac{E_0}{8\pi m g_0^2} \right] k^4 - \left[\frac{1}{16\pi m^2 g_0^2} \right] k^6, \tag{5.80}
\end{aligned}$$

と、 k の 6 次までで展開される。散乱長 a_0 は、この式の k^0 の係数から決まるので、

$$a_0 = \frac{\frac{8\pi m g_0^2}{E_0}}{\mu \left(\frac{4\pi m g_0^2}{E_0} + \mu^3 \right)}, \tag{5.81}$$

と求まる。

5.5.2 局所近似

ハドロン間有効ポテンシャル (5.78) を 5.3 節の formal 微分展開と 5.4 節の HAL QCD 法で 2 通りに局所近似する。

ω がエネルギー非依存の場合の formal 微分展開による局所近似の式 (5.57) において、 $\omega \rightarrow \omega(E)$ とすると、

$$V_{\text{eff}}^\ell(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = V^{\text{formal}}(r, E) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \mathcal{O}(\nabla), \tag{5.82}$$

となる。ここで、

$$V^{\text{formal}}(r, E) = \frac{4\pi g_0^2}{\mu^2(E - E_0)} \frac{e^{-\mu r}}{r}, \tag{5.83}$$

である。これが、ハドロン間有効ポテンシャルにおける formal 微分展開の最低次の表式となる。formal 微分展開により局所近似されたポテンシャルは、元の非局所型ポテンシャルと同じくエネルギー依存であることがわかる。よって、シュレーディンガー方程式 (5.12) を解く際にエネルギー依存性に対して自己無撞着的に解く必要がある。また、 r 依存性に注目すると、湯川型のポテンシャルの性質と同じく、ポテンシャルの到達距離が $1/\mu$ になっていることがわかる。ただし、 μ はチャンネル結合の効果により、遷移ポテンシャル

の形状因子に起因する運動量スケールである。にもかかわらずハドロン間ポテンシャルの到達距離が μ に依存している点は特筆すべき点である。

ω がエネルギー非依存の場合の HAL QCD 法による局所近似の式 (5.67) も、 ω に陽に依存していないので、 $\omega \rightarrow \omega(E)$ としても表式は変わらず、ハドロン有効ポテンシャルに対する局所近似は

$$V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}}) = E_{\text{pot}} + \frac{-k_{\text{pot}}^2 \sin(k_{\text{pot}}r + \delta) - \mu^2 \sin \delta e^{-\mu r}}{2m(\sin(k_{\text{pot}}r + \delta) - \sin \delta e^{-\mu r})} + \mathcal{O}(\nabla^2), \quad (5.84)$$

となる。ただし、位相差 δ は式 (5.80) により求められる、 ω がエネルギー依存の場合の位相差である。ここで、 E_{pot} はポテンシャルを近似するために導入されたエネルギーであり、値は固定されている。式 (5.84) には E_{pot} しか含まれないため、近似元の非局所型ポテンシャルが E 依存であったのにもかかわらず、HAL QCD 法で局所近似したポテンシャルはエネルギー E に依存していない。よって、通常のシュレーディンガー方程式 (5.11) を単に解くだけで固有エネルギーが得られる。

ただし、固有エネルギーと E_{pot} が一致する $E = E_{\text{pot}}$ の場合には、局所近似ポテンシャルから計算する位相差が非局所型ポテンシャルから計算される厳密な位相差を再現する。よって、 E_{pot} を変化させ、シュレーディンガー方程式の固有エネルギーが $E = E_{\text{pot}}$ となるように自己無撞着に解くことで、全ての E で厳密な位相差を再現することができる。この操作により、非局所型ポテンシャルと完全に等価なエネルギー依存かつ局所型のポテンシャルを構成できる。

第 6 章

数値計算

4 章では、クォーク自由度とハドロン自由度のチャンネル結合の一般的な定式化を行った。また、5 章ではポテンシャルの局所近似について、分離・湯川型ポテンシャルを用いた場合の一般的な定式化を 2 つの変換手法で行った。本章では、具体的な系として $X(3872)$ にこれらの定式化を適用する。更に、数値計算を用いて局所近似に関して定量的に議論する。

6.1 $X(3872)$ を扱うモデルの定式化

本節ではまず、4 章と 5 章の定式化を $X(3872)$ へ適用するために、モデルを構築する。

6.1.1 ポテンシャルの定式化

3.2 節では、エキゾチックハドロン $X(3872)$ を、クォーク自由度を含む $c\bar{c}$ クォークonium 状態と、ハドロン自由度を含む $D^0\bar{D}^{*0}$ 分子チャンネルと $D^\pm D^{*\mp}$ 分子チャンネルの、混合状態であるとする仮説が最も有力であることを述べた。この仮説に基づき、 $X(3872)$ を記述するモデルを構築する。本モデルにおいてはハドロン間ポテンシャルにおけるクォーク自由度の影響に注目するため、 $X(3872)$ と最も閾値に近い中性チャンネル ($D^0\bar{D}^{*0}$) と $c\bar{c}$ 状態との結合のみを考える (図 6.1)。簡単のため、荷電チャンネル ($D^\pm D^{*\mp}$) および崩壊チャンネル ($J\psi\pi\pi$ など) との結合、及びメソン間の直接相互作用は考えない。

4 章におけるチャンネル結合の定式化を $X(3872)$ に応用する。ここでは、クォーク自由度の状態 $|q\rangle$ として $c\bar{c}$ 、ハドロン自由度 $|h\rangle$ として $D^0\bar{D}^{*0}$ をとる。これらがチャンネル

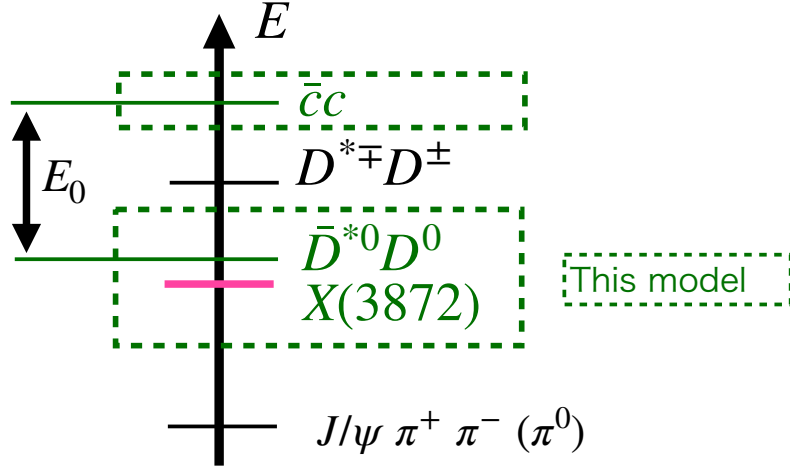


図 6.1 $X(3872)$ と同じ量子数を持つチャンネルと、本研究で用いるモデルの模型空間の模式図。

結合されたハミルトニアン H は、式 (4.1) より、

$$H = \begin{pmatrix} T^{c\bar{c}} & 0 \\ 0 & T^{D^0\bar{D}^{*0}} + \Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^{c\bar{c}} & V^t \\ V^t & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

となる。 $c\bar{c}$ チャンネルのみにおける固有状態 $|\phi_n\rangle$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) において、基底状態の ϕ_0 のみを考える。ここで、 ϕ_0 の質量を $m_{c\bar{c}}$ とし、 $D^0\bar{D}^{*0}$ チャンネルの閾値を基準としたエネルギーを E_0 を、

$$E_0 = m_{c\bar{c}} - (m_{\bar{D}^{*0}} + m_{D^0}), \quad (6.2)$$

とする。ただし、 $m_{\bar{D}^{*0}}$ 、 m_{D^0} はそれぞれ \bar{D}^{*0} と D^0 の質量である。

次に、 ϕ_0 と $D^0\bar{D}^{*0}$ との遷移ポテンシャル V^t の行列要素を座標表示で湯川型となるように

$$\langle \mathbf{r}_{D^0\bar{D}^{*0}} | V^t | \phi_0 \rangle = g_0 \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (6.3)$$

と定義する。式 (A.12) で示したように、フーリエ変換により運動量表示では、

$$\langle \mathbf{k}_{D^0\bar{D}^{*0}} | V^t | \phi_0 \rangle = \frac{4\pi g_0}{k^2 + \mu^2}, \quad (6.4)$$

となる。 μ はカットオフであり、本研究では $D^0\bar{D}^{*0}$ 間での最も軽い交換粒子である π の

表 6.1 パラメーターの値

物理量	値	出典
$m_{c\bar{c}}$	3.950 GeV	クォーク模型の値 [24]
m_{D^0}	1.86484 GeV	PDG [60]
$m_{D^{0*}}$	2.00685 GeV	PDG [60]
μ	0.14 GeV	PDG [60]
$\hbar c$	0.1973269804 GeV · fm	PDG [60]
$m_{X(3872)}$	3.87165 GeV	PDG [60]

表 6.2 数値計算で得られたパラメーター

物理量	値	計算式
E_0	0.07831 GeV	$m_{c\bar{c}} - m_{D^0} - m_{\bar{D}^{*0}}$
m	0.9666 GeV	$\frac{m_{D^0} + m_{\bar{D}^{*0}}}{m_{D^0} m_{\bar{D}^{*0}}}$
g_0^2	$1.999 \times 10^{-5} \text{ GeV}^3$	$\frac{m_{c\bar{c}} - m_{X(3872)}}{I}$
a_0	124.1 fm	$\frac{8\pi m g_0^2 / E_0}{\mu(4\pi m g_0^2 / E_0 + \mu^3)}$

質量とする。^{*1}また、 g_0 は結合定数であり、本研究では $X(3872)$ の質量を再現するように決める。つまり $X(3872)$ の質量を $m_{X(3872)}$ として、A.3 節の計算に従い、

$$g_0^2 = \frac{m_{c\bar{c}} - m_{X(3872)}}{I}, \quad (6.5)$$

$$I = \int_0^\infty dk 4\pi \frac{k^2}{(m_{D^0} + m_{D^{*0}} + \frac{k^2}{2m}) - m_{X(3872)}} \left(\frac{1}{k^2 + \mu^2} \right)^2 \frac{2}{\pi}, \quad (6.6)$$

のように決める。ここで、 m は \bar{D}^{*0} と D^0 の換算質量である。実際に数値計算でインプットした値を表 6.1 にまとめる。ただし、 $m_{c\bar{c}}$ は観測可能量ではなく、ハドロンと結合しない $c\bar{c}$ の質量であるため、クォーク模型を用いて計算した研究 [24] より決定し、その他の粒子の質量は PDG[60] の値をとる。また、本研究において計算されたモデルのパラメーターを表 6.2 に記す。

^{*1} D^0, D^{0*}, π のスピンパリティは $J^P = 0^-, 1^-, 0^-$ であるから、 D^0 - π - D^0 頂点の結合が角運動量とパリティ保存則から禁止されるが、 D^0 - π - D^{0*} 頂点の結合は可能であるために π 交換ができる。

次に、4章で得られた有効ポテンシャルを本研究の $X(3872)$ のモデルへ適用する。4章で求めたハドロン間有効ポテンシャル (4.22) をもとに、5章で分離・湯川型ポテンシャルから定式化したハドロン間有効ポテンシャル (4.11) を $X(3872)$ のモデルへ応用すると、

$$V_{\text{eff}}^{D^0\bar{D}^{*0}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \frac{g_0^2}{E - E_0} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{e^{-\mu r'}}{r'}, \quad (6.7)$$

と、 $c\bar{c}$ チャンネルと結合した $D^0\bar{D}^{*0}$ ハドロン間有効ポテンシャルが非局所型として得られる。このポテンシャルは式 (5.14) において

$$\omega(E) = \frac{g_0^2}{E - E_0}, \quad (6.8)$$

を代入すると、分離型かつ湯川型なポテンシャルに分類されることがわかるが、エネルギー依存性が含まれている点に注意すべきである。

次に、得られた非局所型ポテンシャル (6.7) を局所型へ変換する。本研究では5章で見たように、二つの変換手法を議論する [6]。ひとつは、5.3節で紹介した、formal 微分展開と呼ばれる、テイラー展開により非局所型ポテンシャルを直接局所型ポテンシャルの微分で表す手法である。式 (6.7) は、式 (5.78) の時と同様に、formal 微分展開により、本モデルにおいても式 (5.83) と同等な局所型ポテンシャルが得られる。すなわち、

$$V^{\text{formal}}(r, E) = \frac{4\pi g_0^2}{\mu^2(E - E_0)} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \mathcal{O}(\nabla), \quad (6.9)$$

と微分展開の最低次が得られる。また、このポテンシャルはエネルギー E に依存している。

もうひとつの変換手法は、5.4節で導入した、HAL QCD 法と呼ばれる手法である。HAL QCD 法では、非局所型ポテンシャル (6.7) から得られる運動量 $k_{\text{pot}} = \sqrt{2mE_{\text{pot}}}$ を構築する波動関数 $\psi_{k_{\text{pot}}}(r)$ を用いて局所型ポテンシャルを構築する。HAL QCD 法の局所型ポテンシャルは、式 (5.67) と同じように、

$$V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}}) = E_{\text{pot}} + \frac{-k_{\text{pot}}^2 \sin(k_{\text{pot}}r + \delta) - \mu^2 \sin \delta e^{-\mu r}}{2m(\sin(k_{\text{pot}}r + \delta) - \sin \delta e^{-\mu r})} + \mathcal{O}(\nabla^2), \quad (6.10)$$

のように得られ、主要項に対する補正は微分の2次以上になる。このポテンシャルは、ポテンシャルを決める時のエネルギー E_{pot} にのみ依存し、シュレーディンガー方程式を解く際のエネルギー E には依存しない。ただし、 $E_{\text{pot}} = 0$ のときには、式 (5.73) と同じく、

$$V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}} = 0) = \frac{a_0 \mu^2 e^{-\mu r}}{2m(r - a_0 + a_0 e^{-\mu r})} + \mathcal{O}(\nabla^2), \quad (6.11)$$

のように式 (5.81) の散乱長 a_0 により記述される。

6.1.2 位相差 δ の定式化

ポテンシャルは相互作用の背景にある物理的機構そのものであるが、直接観測される物理量ではない。よって、ポテンシャルは一意に決定されるものではないため、比較が難しいという側面がある。そのため、本研究では物理量である位相差 δ を求めることで局所変換の手法を比較する。

本モデルにおける非局所型ハドロン間ポテンシャル (6.7) に対する厳密な位相差 δ は 5.5 節の結果と同じく、運動量 k を変数として、 m, g_0, μ, E_0 から、

$$k \cot \delta(k) = \left[\mu m E_0 - \frac{\mu^4}{16\pi m^2 g_0^2} \right] + \left[-\frac{\mu}{2} - \frac{m E_0}{\mu} + \frac{\mu^2}{8\pi m^2 g_0^2} \right] k^2 + \left[\frac{1}{2\mu} + \frac{E_0}{8\pi m g_0^2} \right] k^4 - \left[\frac{1}{16\pi m^2 g_0^2} \right] k^6, \quad (6.12)$$

である。これは、ポテンシャルとして分離・湯川型を選択したことにより、厳密な位相差が解析的に得られていることを表している。

局所型ポテンシャル (6.9) と (6.10) には位相差の解析解が存在しないため、位相差は数値計算により求める。数値計算手法の詳細は B.1 節を参照。

6.2 $X(3872)$ を用いた数値計算の結果

6.1.1 節で構築した $X(3872)$ のモデルを用いて、各局所近似ポテンシャルの性質を調べる。

6.2.1 formal 微分展開によるポテンシャル $V^{\text{formal}}(r, E)$

ポテンシャルのエネルギー依存性について調べるため、formal 微分展開による局所近似ポテンシャル (6.9) を相対距離 r の関数として図 6.2 に示す。更に、 $r = 0.15$ fm の付近を拡大した図を図 6.3 に示す。運動量カットオフ μ に対応するエネルギーを

$$E_\mu = \frac{\mu^2}{2m}, \quad (6.13)$$

とする。これは、本モデルにおける最も高いエネルギーに相当する。図 6.2 にはそれぞれ、最小が $E = 0$ 、最大が $E = E_\mu$ と、中間のエネルギー $E = \frac{1}{2}E_\mu$ の 3 つの E をもつ $V^{\text{formal}}(r, E)$ が示されている。図 6.2 より、ポテンシャル (6.9) のエネルギー E へ

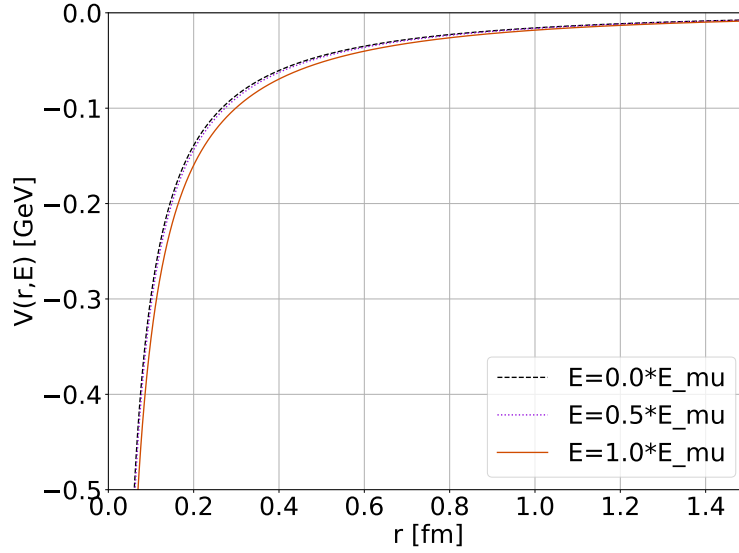


図 6.2 formal 微分展開による局所近似ポテンシャル $V^{\text{formal}}(r, E)$ 。横軸は相対座標の大きさ r で、縦軸がポテンシャルである。赤い実線が $E = E_\mu$ のときのポテンシャル $V^{\text{formal}}(r, E = E_\mu)$ 。同様に、紫の点線が $E = E_\mu/2$ 、黒の破線が $E = 0$ のときのポテンシャル。

の依存性は強くないことがわかる。この理由は、式 (6.9) の分母にある $E - E_0$ において、 $0 \leq E \leq E_\mu$ の範囲では $E \ll E_0$ であるため、エネルギー変化のポテンシャルへの影響が小さいためである。実際、この範囲では最大でも $E = E_\mu \simeq 0.01$ GeV であり、 $E_0 \simeq 0.078$ GeV に比べて十分小さい。ただし、パラメーター μ や E_0 を変化させて、 $E \simeq E_0$ となるポテンシャルがどのようなふるまいになるかは、実際に再次数値計算することで確かめる必要がある。また、図 6.2 より、ポテンシャルが $1/\mu \simeq 1.4$ fm でほとんど 0 になっていることがわかる。これは、湯川型ポテンシャル (6.9) における性質が数値計算においても反映されていることを示している。

6.2.2 HAL QCD 法によるポテンシャル $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$

$V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ のエネルギー依存性

HAL QCD 法による局所近似ポテンシャル (6.10) を図 6.4 に示す。更に、 $r = 0.15$ fm の付近を拡大した図を図 6.5 に示す。formal 微分展開とは異なり、HAL QCD 法ではエネルギーに依存しないポテンシャルが得られる。しかし、ポテンシャルを決める際に波動関数を指定するエネルギーである E_{pot} は自由に選べるため、その依存性を調べるため、

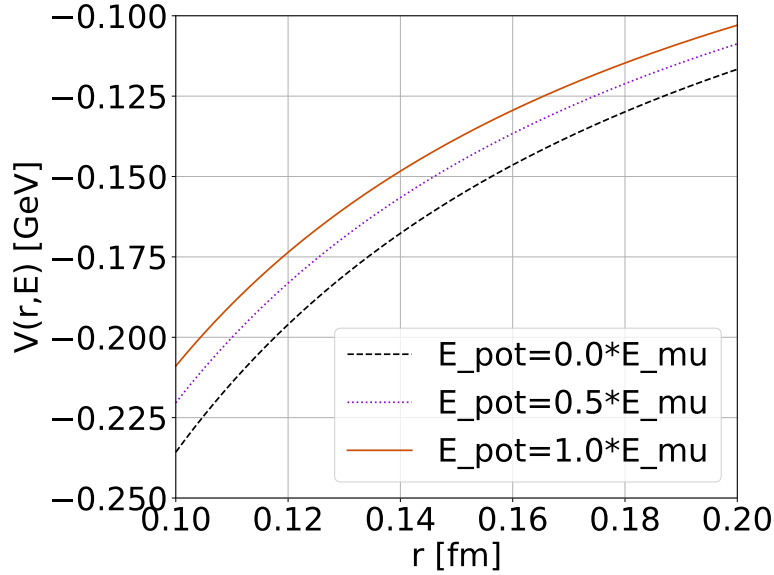


図 6.3 図 6.2 の $r = 0.15$ fm の付近を拡大した図。

E_{pot} の異なる 3 つのポテンシャルを示す。それぞれ、最小が $E_{\text{pot}} = 0$ 、 $E_{\text{pot}} = E_{\mu}$ と、中間のエネルギー $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}E_{\mu}$ の 3 つの E_{pot} での $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ がプロットされている。図 6.4 より、HAL QCD 法によるポテンシャル (6.10) は、ポテンシャルを決めるエネルギー E_{pot} に強く依存していないことがわかる。この理由を調べるためには、パラメータを変化させたときのポテンシャルの性質を詳しくみる必要があると考えられる。

$V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ の発散

HAL QCD 法によるポテンシャル (6.10) は分母に波動関数を含むため、波動関数がゼロとなる r (節) でポテンシャルが発散してしまう [61]。例として、 $k_{\text{pot}} = \mu$ としたときの波動関数 $\psi_{k_{\text{pot}}=\mu}(r)$ を図 6.6 に示す。これより、 $r \simeq 3.8, 8.0, 12.5$ fm 付近のとき、それぞれ波動関数が節となることがわかる。さらに、このときの HAL QCD 法によるポテンシャル (6.10) は、図 6.7 にあるように、波動関数の節となる r 、つまり $r \simeq 3.8, 8.0, 12.5$ fm の付近で発散していることがわかる。更に、発散の様子を拡大した図が図 6.8 である。

波動関数が $r = r_0$ でゼロとなるとき、 c を定数として

$$\psi(r) = c(r - r_0)^n + \dots \quad (6.14)$$

と近似できるため、HAL QCD 法によるポテンシャルの解析的な式 (5.65) から、ポテン

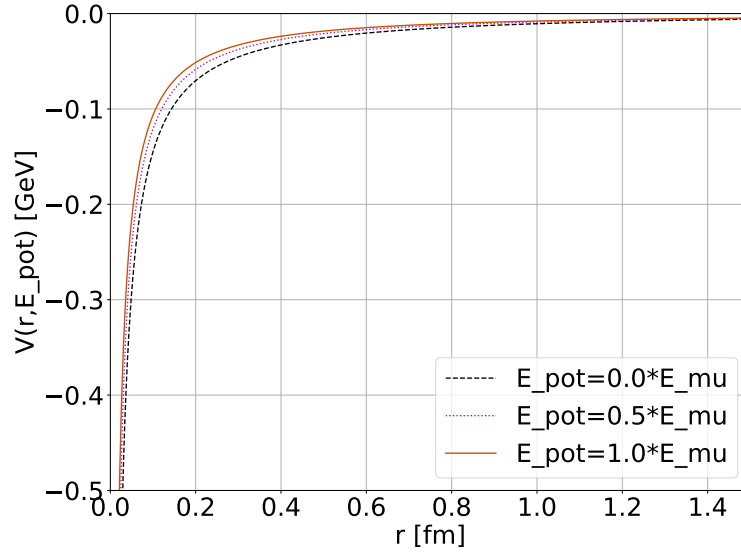


図 6.4 HALQCD 法による局所近似ポテンシャル $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ 。横軸は相対座標の大きさ r で、縦軸がポテンシャルである。赤い実線が $E_{\text{pot}} = E_{\mu}$ のときのポテンシャル $V^{\text{HAL}}(r, E = E_{\mu})$ 。同様に、紫の点線が $E_{\text{pot}} = E_{\mu}/2$ 、黒の破線が $E_{\text{pot}} = 0$ のときのポテンシャル。

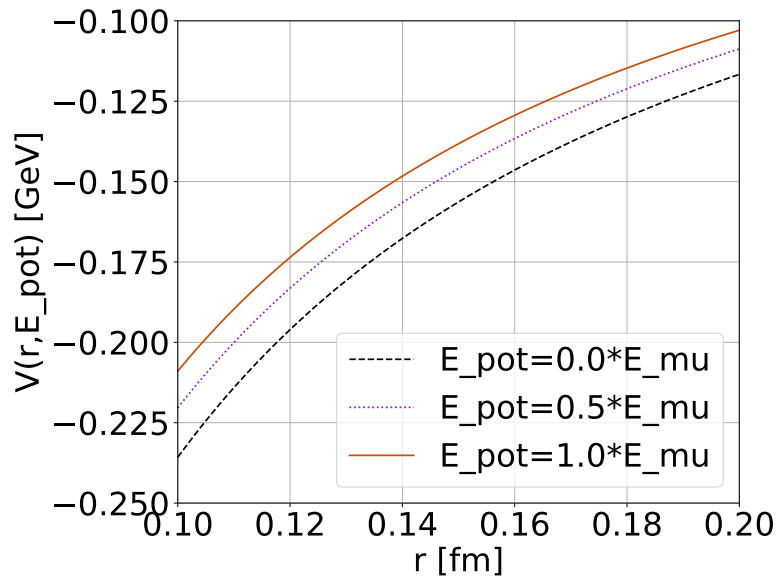


図 6.5 図 6.4 の $r = 0.15$ fm の付近を拡大した図

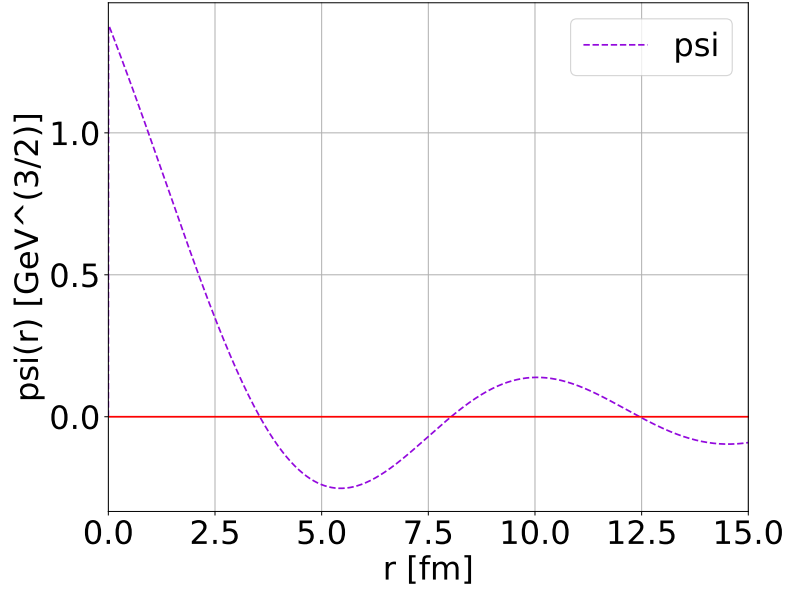


図 6.6 $k_{\text{pot}} = \mu$ としたときの非局所型ポテンシャルを用いた (エネルギー依存の) シュレーディンガー方程式を解いて得られる波動関数 $\psi_{k_{\text{pot}}}(r)$ 。横軸が相対座標の大きさ r 。

シャルを $r = r_0$ で展開すると、

$$\begin{aligned} V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}}) &\propto \frac{1}{cr(r-r_0)^n} \frac{d^2}{dr^2} (cr(r-r_0)^n) \\ &= \frac{n}{r(r-r_0)} \end{aligned} \quad (6.15)$$

となるため、ポテンシャルが $\frac{1}{r-r_0}$ の発散をしていることがわかる。図 6.8 のポテンシャルのふるまいが、このような発散の性質を反映していると考えられる。

ここからは発散のエネルギー依存性について調べる。HAL QCD 法によるポテンシャル (6.10) において、それぞれ $E_{\text{pot}} = 0, \frac{1}{2}E_\mu, E_\mu$ としたときのポテンシャルを $r = 15.0$ fm の範囲までプロットしたものが図 6.9、図 6.10、図 6.7 である。これらの図より、エネルギー E_{pot} が大きいほどより小さい r で発散が起きていることがわかる。例えば、 $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}E_\mu$ のとき (6.10) には最初の発散が $r \simeq 4.5$ fm の付近に存在しているのに対し、 $E_{\text{pot}} = E_\mu$ のとき (6.7) には、最初の発散が $r \simeq 3.8$ fm の付近に存在している。更に、 $E_{\text{pot}} = 0$ のとき (6.9) には最初の発散は $r \leq 15.0$ fm の範囲にはまだ存在していない。この理由は、 $E_{\text{pot}} = 0$ の波動関数の節は $r = a_0$ に存在するが、本節におけるパラメーターでは $a_0 \simeq \text{fm}$ であるからである。このような性質の要因は、以下のように理解できる。波

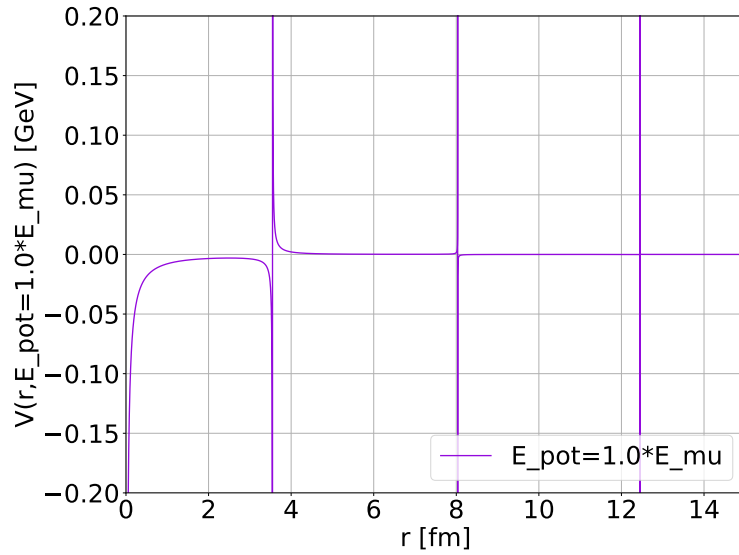


図 6.7 $E_{\text{pot}} = E_{\mu}$ としたときの $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ 。横軸は相対座標の大きさ r 。

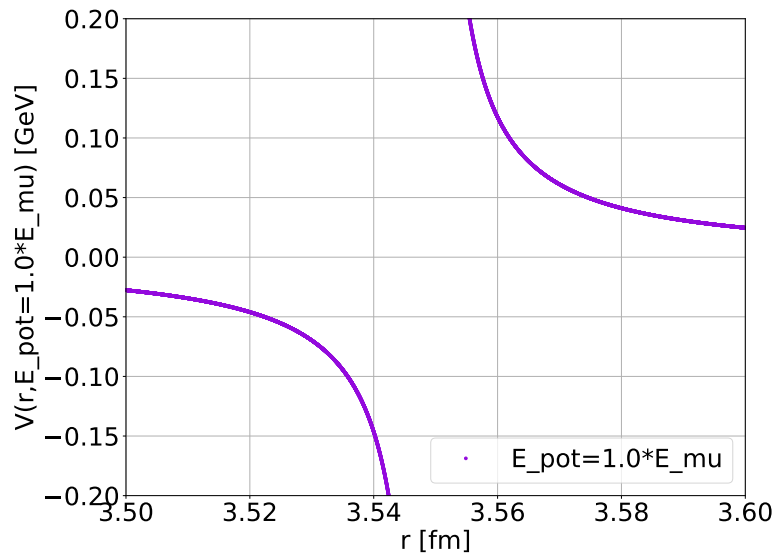


図 6.8 図 6.7 において $r = 3.5\text{fm}$ の付近を拡大した図

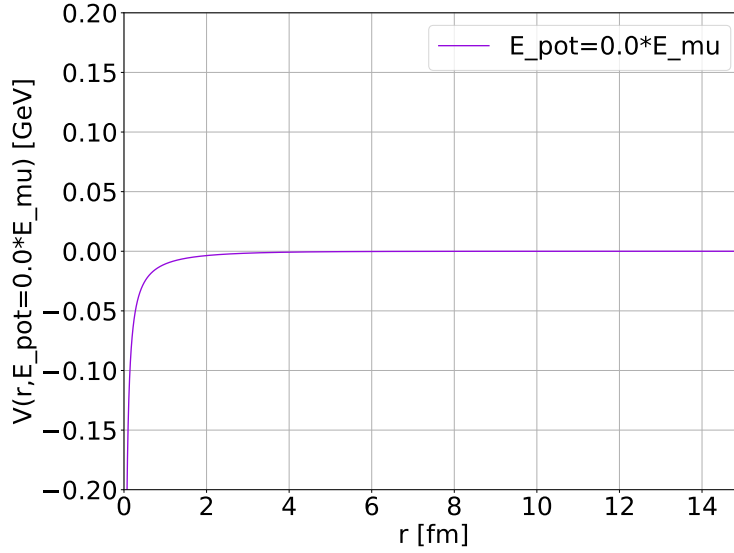


図 6.9 $E_{\text{pot}} = 0$ としたときの $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ 。横軸は相対座標の大きさ r 。

数 $\frac{\sqrt{2mE_{\text{pot}}}}{\hbar}$ が $\sqrt{E_{\text{pot}}}$ に比例しているため、 E_{pot} が大きいほどより強く波動関数が振動する。よって、波動関数の節がより小さい r で現れるためポテンシャルの発散がより小さい r で起きる。

6.2.3 formal 微分展開と HAL QCD 法の比較

$V^{\text{formal}}(r, E)$ と $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ の比較

更に、formal 微分展開による局所近似ポテンシャル (6.9) と、HAL QCD 法による局所近似ポテンシャル (6.10) を図 6.11 で比較する。それぞれ、青い実線が、HAL QCD 法によるポテンシャル (6.10) で、 $E_{\text{pot}} = 0$ としたポテンシャル、オレンジの点線が、formal 微分展開によるポテンシャル (6.9) で、 $E = 0$ としたポテンシャルである。図 6.11 より、異なる変換手法により得られた局所近似ポテンシャルは、元の非局所型ポテンシャルが同じであるにも関わらず、定量的に異なるポテンシャルとなることがわかる。特に、 $r \lesssim 0.4 \text{ fm}$ の近くで、この傾向が顕著であることがわかる。図 6.2 や図 6.4 と比べると二つのポテンシャルのずれが、各ポテンシャルのエネルギー E や E_{pot} 依存性によるずれよりも、大きな差となっていることがわかる。

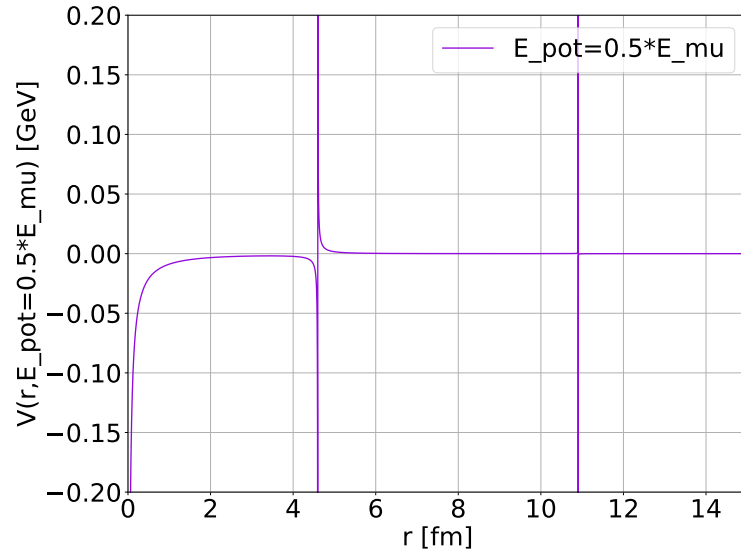


図 6.10 $E_{\text{pot}} = E_{\mu}/2$ としたときの $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ 。横軸は相対座標の大きさ r 。

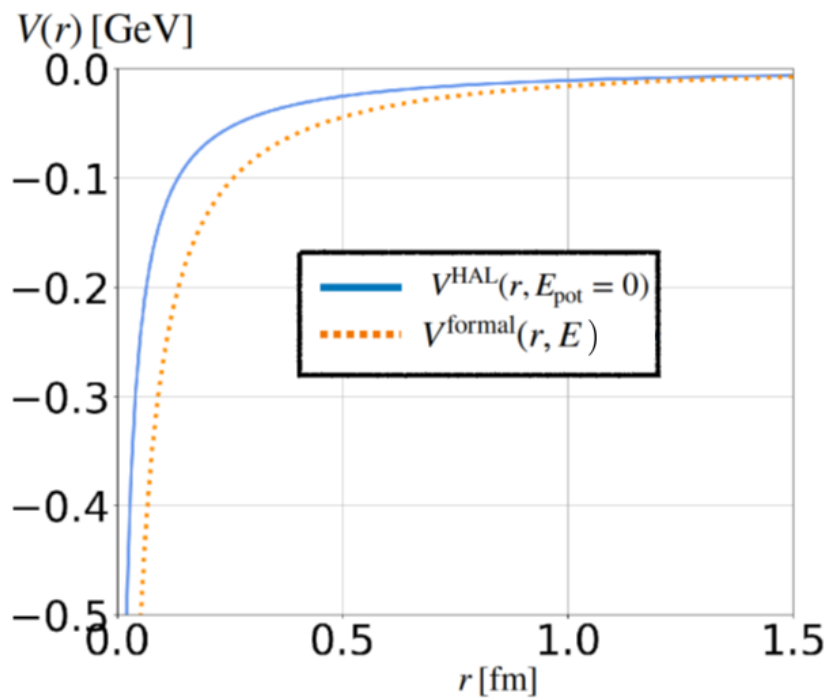


図 6.11 近似されたポテンシャル $V^{\text{formal}}(r, E)$ と $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ の比較。ともに、 $E = E_{\text{pot}} = 0$ で計算されている。青い実線が HAL QCD 法による $V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}})$ 、オレンジの点線が $V^{\text{formal}}(r, E)$ 。横軸は相対座標の大きさ r 。

位相差の比較

前節で異なることを示した局所近似ポテンシャルから計算される物理量が、実際にどのような値になるか位相差を例として調べることで、ポテンシャルの違いが物理量に与える影響を調べる。formal 微分展開によるポテンシャル (6.9) と、HAL QCD 法によるポテンシャル (6.10) から、それぞれ位相差 δ を数値計算して比較する。HAL QCD 法によるポテンシャルでは $E_{\text{pot}} = 0$ として数値計算しているが、formal 微分展開によるポテンシャルは k ごとにエネルギー E を変えたポテンシャルで位相差を数値計算する。数値計算結果を図 6.12 に示す。縦軸が位相差 δ で、横軸がカットオフ μ で無次元化した運動量 k/μ である。また、四角のプロットで青い線が、HAL QCD 法によるポテンシャル (6.10) から数値計算した位相差、三角のプロットでオレンジの点線が formal 微分展開によるポテンシャル (6.9) から数値計算した位相差である。更に、丸いプロットで黒い実線が、モデルを与えている変換前の非局所型ポテンシャルから計算した (6.12) の厳密な位相差 δ である。この図より、ポテンシャルの違いが、計算される位相差にも影響を与えることで、異なる位相差となることがわかる。しかし、HAL QCD 法によるポテンシャル (6.10) から計算した位相差は、formal 微分展開によるポテンシャル (6.9) から計算した位相差に比べ、厳密な位相差により一致していることがわかる。しかも、 k が小さいところでは一致度合いがより大きいため、位相差の原点での傾きから計算される散乱長もまた、HAL QCD 法によるポテンシャルの方が、厳密な値をより再現することが期待される。 $k = 0$ ではどのようなポテンシャルであっても位相差はゼロになる。実際、formal 微分展開でも HAL QCD 法でも厳密な位相差でも、ゼロとなっていることがわかる。しかし、HAL QCD 法では、 $k = 0$ の近傍においても、formal 微分展開に比べ、厳密な位相差をより再現している。

以上の結果から、formal 微分展開による局所近似と HAL QCD 法による局所近似では、元の非局所型ポテンシャルが同じであったとしても異なる局所型ポテンシャルに変換されることがわかり、更に、そこから計算される物理量である位相差もまた、異なる値となることがわかった。また、モデルから解析的に計算した厳密な位相差を比べると、HAL QCD 法による位相差の方が、より厳密な位相差に近い値をとることが確認できる。

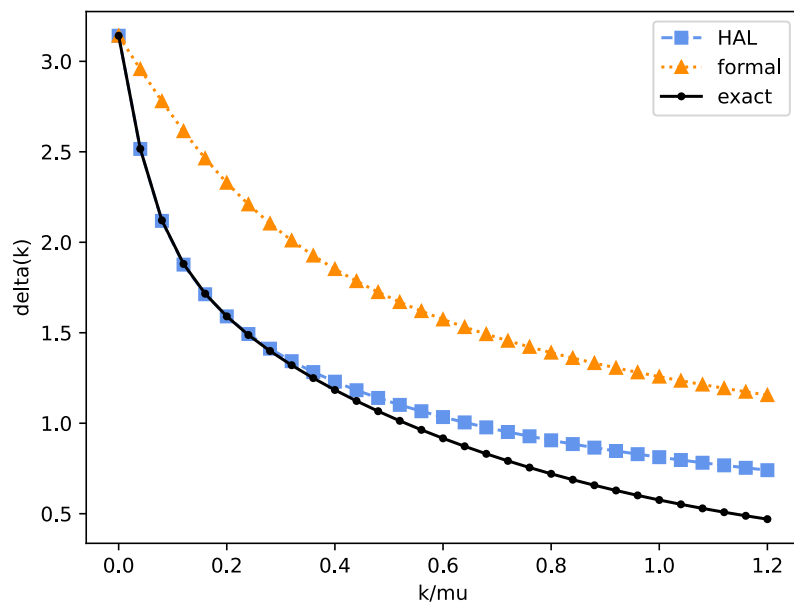


図 6.12 異なるポテンシャルから計算された位相差 $\delta(k)$ の比較。横軸はカットオフ μ で無次元化された運動量 k/μ 。四角のプロットで青い線が、HAL QCD 法によるポテンシャル (6.10) から計算した位相差、三角のプロットでオレンジの点線が formal 微分展開によるポテンシャルから計算した位相差、丸いプロットで黒い実線が厳密な位相差である。

第 7 章

まとめと展望

クォークとはそれ以上わけることができない素粒子の 1 つであり、クォーク間の強い相互作用が QCD(Quantum ChromoDynamics) により記述されている。低エネルギーではカラーの閉じ込めと呼ばれる現象によりクォークは単離されないが、複数が結合することでハドロンと呼ばれる状態を構成する。ハドロン間にも、核力に代表されるような強い相互作用が働いている。ハドロンにはクォークと反クォークの 2 つで構成されるメソンとクォーク 3 つで構成されるバリオンが含まれており、メソンとバリオン合わせて 300 種類近くが観測されている。

クォークはカラーの閉じ込めにより、実験に直接の観測ができないことから、クォーク間ポテンシャルを用いた相互作用の研究は停滞していた。一方近年のコンピューター科学の発展に伴い、格子 QCD により直接数値計算を用いた研究が進められ、クォーク間ポテンシャルはクォーク間距離が無限大で発散するような閉じ込めのポテンシャルであることが示された。本論文では 2 章において、現象論的なクォークポテンシャルが閉じ込めの性質を表していることを確認し、格子 QCD による計算で無限に重いクォーク間ポテンシャルが閉じ込めを表すこと、及び string-breaking を示すことを紹介した。

一方、ハドロン間ポテンシャルは、大型の加速器による高エネルギー衝突実験と格子 QCD による数値解析の双方から研究が進められている。その結果、ハドロン間ポテンシャルが、ハドロン間距離が無限大で消えるような散乱のポテンシャルであることが期待される。実際、3 章では、ハドロン間ポテンシャルの格子 QCD による計算結果を示した。このように、クォーク自由度のみやハドロン自由度のみによるポテンシャルの研究は格子 QCD による第一原理計算も含めて多くの研究が行われている。一方で、クォークとハドロン両方の自由度を含めたチャンネル結合問題でのポテンシャルの研究はあまりされて来なかった。

観測されたハドロンはどれもクォークが2つか3つで構成される粒子であり、クォーク4つ以上で構成されるエキゾチックハドロンは観測されていなかった。ところが2003年に $X(3872)$ と呼ばれるクォーク4つを含むと考えられる粒子の発見を皮切りに、次々とエキゾチックハドロンの候補が発見された。エキゾチックハドロン $X(3872)$ の内部構造は、クォークコニウムと呼ばれるクォーク自由度の状態と、メソン同士が分子のように結合したハドロン自由度の状態とが混合された状態であるという仮説が、最も有力である [13]。本論文3章では、 $X(3872)$ に関する最近の研究を紹介した。

そこで本研究では、エキゾチックハドロンの構造解析を目指し、クォークとハドロン両方の自由度を含むポテンシャルの性質を調べる。まず、文献 [26, 27] に従い、チャンネル結合問題のハミルトニアンを定式化し、クォーク自由度が結合したハドロン間有効ポテンシャルを導出する。得られた有効ポテンシャルが相互作用前後の位置関係が変化する非局所型ポテンシャルであり、ポテンシャル強度がエネルギー依存であることを示す [28](4章)。

しかし、非局所型ポテンシャルは物理系への応用や相互作用の性質解明が難しいので、局所型ポテンシャルへと近似変換する。本研究では、formal 微分展開と呼ばれるテイラー展開を用いた直接的な近似手法と、HAL QCD 法と呼ばれる波動関数からポテンシャルを求める近似手法 [6] の2つを定式化する。更に、遷移ポテンシャルに湯川型を用いた場合のハドロン間有効ポテンシャルの局所近似がそれぞれ、

$$V^{\text{formal}}(r, E) = \frac{4\pi g_0^2}{\mu^2(E - E_0)} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \mathcal{O}(\nabla), \quad (7.1)$$

$$V^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}}) = E_{\text{pot}} + \frac{1}{2mr\psi_{k_{\text{pot}}}(r)} \frac{d^2}{dr^2} [r\psi_{k_{\text{pot}}}(r)] + \mathcal{O}(\nabla^2), \quad (7.2)$$

と得られることを示す。ここで、 r は相対座標の大きさ、 E, E_{pot} はエネルギー、 g_0 は結合定数、 E_0 はクォークコニウムの基底状態エネルギー、 μ はカットオフ定数、 m は換算質量である。また、 $\psi_{k_{\text{pot}}}$ は運動量 k_{pot} をもつ非局所型ポテンシャルの波動関数であり、解析形を得ることができる。

最後に、 $X(3872)$ のモデルにおける局所型有効ポテンシャルを与える。数値計算の結果、各局所近似変換によるポテンシャルは定量的に違いがあることを示す [図 7.1(左)]。近似された局所型ポテンシャルと、モデルの持つ非局所型ポテンシャルから計算される位相差 $\delta(k)$ を比較する [図 7.1(右)] ことにより、各近似変換の妥当性について議論する。

今後の展望として、得られた2種類の局所ポテンシャルで、位相差以外の、例えば散乱振幅などの物理量を計算し、元の非局所ポテンシャルの結果と比較する。様々な物理量の結果を解析することで、局所ポテンシャルの違いの起源を調べる。また、本研究では

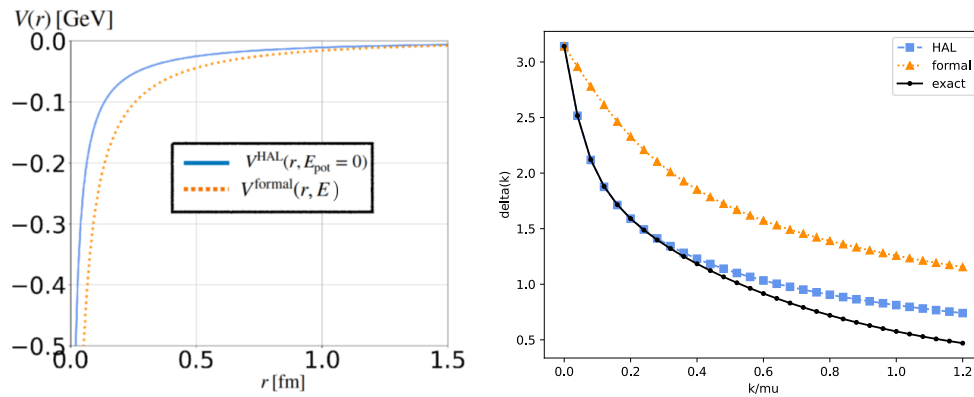


図 7.1 (左) 相対座標 r の関数としての 2 つの局所近似変換から得られた有効ポテンシャル $V(r, E = E_{\text{pot}} = 0)$ の比較。(右) カットオフ μ で無次元化された運動量 k/μ の関数としての位相差 $\delta(k)$ の厳密解との比較。

$D^0 \bar{D}^{*0}$ 中性チャンネルのみを考えたが、文献 [62] のモデルを参考に、ポテンシャルや物理量への $D^+ D^{*-}$ 荷電チャンネルの影響を明らかにする。更なる展望として、本研究による結果をエキゾチックハドロン一般の構造解析へと繋げることができれば、QCD に新たな解釈を与えることができると期待される。

Appendix A

A.1 2章の計算

$[M(x, y)]^\dagger$ の計算

$$\begin{aligned}
[M(x, y)]^\dagger &= [\bar{Q}(x)\gamma U_p(x, y; A)Q(y)]^\dagger \\
&= Q^\dagger(y)U_p^\dagger(x, y; A)Q(y)\gamma^\dagger\bar{Q}^\dagger(x) \\
&= Q^\dagger(y)U_p^\dagger(x, y; A)Q(y)\gamma^\dagger\gamma^{0\dagger}Q^\dagger(x); (\bar{Q} = Q^\dagger\gamma^0) \\
&= Q^\dagger(y)\gamma^\dagger\gamma^{0\dagger}U_p^\dagger(x, y; A)Q(y)Q^\dagger(x) \\
&= Q^\dagger(y)\gamma^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma^\dagger\gamma^0U_p^\dagger(x, y; A)Q(y)Q^\dagger(x); (\gamma^0\gamma^0 = 1, \gamma^{0\dagger} = \gamma^0) \\
&= \bar{Q}(y)\bar{\gamma}U_p^\dagger(x, y; A)Q(y)Q^\dagger(x); (\gamma^0\gamma^\dagger\gamma^0 = \bar{\gamma}). \tag{A.1}
\end{aligned}$$

A.1.1 I の計算

$$I = \langle \bar{Q}(y')\gamma U_p(y', x'; A)Q(x') \cdot \bar{Q}(x)\bar{\gamma}U_p(x, y; A)Q(y) \rangle \tag{A.2}$$

これを成分でみると、

$$I = \langle \bar{Q}_i(y')\gamma_{ij}U_p(y', x'; A)Q_j(x') \cdot \bar{Q}_k(x)\bar{\gamma}_{kl}U_p(x, y; A)Q_\ell(y) \rangle \tag{A.3}$$

成分にしたので並べ替えてよく、さらにトレースができるので、

$$I = \langle Q_\ell(y)\bar{Q}_i(y')\gamma_{ij}U_p(y', x'; A) \cdot Q_j(x')\bar{Q}_k(x)\bar{\gamma}_{kl}U_p(x, y; A) \rangle \tag{A.4}$$

$$= \langle [Q(y)\bar{Q}]_{\ell i}(y')\gamma_{ij}U_p(y', x'; A) \cdot [Q(x')\bar{Q}]_{jk}(x)\bar{\gamma}_{kl}U_p(x, y; A) \rangle \tag{A.5}$$

$$\propto \langle \text{tr}_{\text{color}}\text{tr}_{\text{spin}}[Q(y)\bar{Q}(y')\gamma U_p(y', x'; A) \cdot Q(x')\bar{Q}(x)\bar{\gamma}U_p(x, y; A)] \rangle \tag{A.6}$$

$$= \langle \text{tr}_{\text{c}}\text{tr}_{\text{s}}[S(y, y')\gamma U_p(y', x'; A)S(x', x)\bar{\gamma}U_p(x, y; A)] \rangle. \tag{A.7}$$

A.1.2 $\langle W \rangle$ の計算

$$\begin{aligned}
\langle W \rangle &= \frac{1}{Z} \int dU_1(n) dU_4(n) \cdots \times \text{tr}[U_1(n) W' U_4^\dagger(n)] S_g \\
&= \frac{1}{Z} \int dU_1(n) dU_4(n) \cdots \times \text{tr}[U_1(n) W' U_4^\dagger(n)] \frac{-2}{g^2} \text{tr}[U_1^\dagger(n) U_4(n) \omega] \cdots \\
&= \frac{-2}{g^2} \frac{1}{Z} \int [dU] \frac{1}{N_c^2} \text{tr}[W' \omega] \delta_{ij} \delta_{ji} \\
&= \frac{-2}{g^2} \frac{1}{Z} \int [dU] \frac{1}{N_c^2} \text{tr}[W' \omega] N_C, \tag{A.8}
\end{aligned}$$

となる。なぜなら、

$$\begin{aligned}
S_g &= \frac{2N_c}{g^2} \sum_p (1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr } U_{\mu\nu}(n)) \\
&= \frac{-2}{g^2} \text{tr}[U_1^\dagger(n) U_4^\dagger(n + \hat{1}) U_1(n + \hat{4}) U_4(n)] + \cdots \\
&= \frac{-2}{g^2} [U_1^\dagger(n)]_{ij} [U_4^\dagger(n + \hat{1})]_{jk} [U_1(n + \hat{4})]_{kl} [U_4(n)]_{li} + \cdots \\
&= \frac{-2}{g^2} [U_1^\dagger(n)]_{ij} \omega_{jl} [U_4(n)]_{li} + \cdots, \tag{A.9}
\end{aligned}$$

となるので、 $(\text{tr}[ABC] = A_{ij} B_{jk} C_{ki})$

$$\begin{aligned}
\langle W \rangle &= \frac{1}{Z} \int dU_1(n) dU_4(n) \cdots \times [U_1(n)]_{ki} W'_{jk} [U_4^\dagger(n)]_{ij} \frac{-2}{g^2} [U_1^\dagger(n)]_{\alpha\beta} \omega_{\beta\gamma} [U_4(n)]_{\gamma\alpha} \\
&= \frac{1}{Z} \int [dU \cdots] \frac{-2}{g^2} W'_{jk} \omega_{\beta\gamma} dU_1(n) [U_1(n)]_{ki} [U_1^\dagger(n)]_{\alpha\beta} dU_4(n) [U_4(n)]_{\gamma\alpha} [U_4^\dagger]_{ij} \\
&= \frac{1}{Z} \int [dU \cdots] \frac{-2}{g^2} W'_{jk} \omega_{\beta\gamma} \frac{1}{N_C} \delta_{k\beta} \delta_{i\alpha} \frac{1}{N_C} \delta_{\gamma j} \delta_{\alpha i} \\
&= \frac{-2}{Z g^2} \int [dU] W'_{\gamma k} \omega_{k\gamma} \frac{1}{N_C^2} \delta_{ii} \\
&= \frac{-2}{Z g^2} \int [dU] \text{tr}[W' \omega] \frac{1}{N_C^2} N_C, \tag{A.10}
\end{aligned}$$

である。

A.2 5章の計算

A.2.1 $\langle V | \mathbf{k} \rangle$ の計算

$$\begin{aligned}\langle V | \mathbf{k} \rangle &= \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \int d^3\mathbf{r} \frac{e^{-\mu r}}{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},\end{aligned}\tag{A.11}$$

となる。右辺の積分は湯川関数のフーリエ変換なので、

$$\begin{aligned}\int d^3\mathbf{r} \frac{e^{-\mu r}}{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta r^2 \sin\theta \frac{e^{-\mu r}}{r} e^{-ikr\cos\theta} \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr \int_{-1}^1 dt r e^{-\mu r} e^{-ikrt} \\ &\quad (\cos\theta = t \text{ とおいた。このとき、} -\sin\theta d\theta = dt.) \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr r e^{-\mu r} \left[\frac{-e^{-ikrt}}{ikr} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2\pi}{ik} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} [-e^{-ikr} + e^{ikr}] \\ &= \frac{2\pi}{ik} \int_0^\infty dr [-e^{-(ik+\mu)r} + e^{(ik-\mu)r}] \\ &= \frac{2\pi}{ik} \left[\frac{e^{-(ik+\mu)r}}{ik+\mu} + \frac{e^{(ik-\mu)r}}{ik-\mu} \right]_0^\infty \\ &= \frac{2\pi}{ik} \left[\frac{e^{-(ik+\mu)r}}{\mu+ik} - \frac{e^{(ik-\mu)r}}{\mu-ik} \right]_0^\infty \\ &= \frac{2\pi}{ik} \left[\frac{(\mu-ik)e^{-(ik+\mu)r} - (\mu+ik)e^{(ik-\mu)r}}{\mu^2+k^2} \right]_0^\infty \\ &= \frac{2\pi}{ik} \left[\frac{-\{\mu-ik - (\mu+ik)\}}{\mu^2+k^2} \right] \\ &= \frac{2\pi}{ik} \frac{2ik}{\mu^2+k^2} \\ &= \frac{4\pi}{\mu^2+k^2},\end{aligned}$$

と計算されるので、まとめると、

$$\int d^3\mathbf{r} \frac{e^{-\mu r}}{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{4\pi}{\mu^2 + k^2}, \quad (\text{A.12})$$

である。

A.2.2 $\langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle$ の計算

$$\langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle = \int d^3\mathbf{x} G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) V(\mathbf{x}), \quad (\text{A.13})$$

を計算する。 G_k の定義式 (5.26) は、運動量表示の湯川型ポテンシャルをフーリエ変換する表式になっていることに注意すると、

$$\begin{aligned} G_k(\mathbf{r}, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{2m e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{x})}}{p^2 - k^2 - i0^+} \\ &= \frac{m}{2\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

となる。ここで、部分波分解の公式

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} = 4\pi ik \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} h_{\ell}^{(+)}(kr_{>}) j_{\ell}(kr_{<}) Y_{\ell m}(\Omega_{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^{\dagger}(\Omega_{\mathbf{x}}), \quad (\text{A.15})$$

を用いる。ただし、 $r_{>} \equiv \max(r, x)$, $r_{<} \equiv \min(r, x)$ 、 $h_{\ell}^{(+)}(z)$ は球ハンケル関数、 $j_{\ell}(Z)$ は球ベッセル関数、 $Y_{\ell m}(\Omega_{\mathbf{r}})$ は球面調和関数である。式 (A.13) に、式 (5.13) と式 (A.14) と式 (A.15) を代入すると、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle &= \int d^3\mathbf{x} \frac{m}{2\pi} \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \frac{e^{-\mu x}}{x} \\ &= \int d^3\mathbf{x} \frac{m}{2\pi} 4\pi ik \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} h_{\ell}^{(+)}(kr_{>}) j_{\ell}(kr_{<}) Y_{\ell m}(\Omega_{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^{\dagger}(\Omega_{\mathbf{x}}) \frac{e^{-\mu x}}{x}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

となる。ここで、湯川ポテンシャル (5.13) が相対座標 \mathbf{r} の大きさにしか依存せず、角度の情報が含まれていないため、散乱が s 波でしか起こらない。よって、式 (A.16) の和と

して $l=0$ のみが寄与し、他は 0 となる。これより、

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle &= \int d^3 \mathbf{x} \frac{m}{2\pi} 4\pi i k h_0^{(+)}(kr_>) j_0(kr_<) Y_{00}(\Omega_{\mathbf{r}}) Y_{00}^\dagger(\Omega_{\mathbf{x}}) \frac{e^{-\mu x}}{x} \\
&= 2mik \int d\Omega \int_0^\infty dx h_0^{(+)}(kr_>) j_0(kr_<) \frac{1}{4\pi} x e^{-\mu x} \\
&= 2mik \int_0^\infty dx h_0^{(+)}(kr_>) j_0(kr_<) x e^{-\mu x}, \tag{A.17}
\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$Y_{00}(\Omega_{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \tag{A.18}$$

を用いた。また、 x 積分を $x=r$ で分割すると、

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle &= 2mik \left[\int_0^r dx h_0^{(+)}(kr_>) j_0(kr_<) x e^{-\mu x} \right. \\
&\quad \left. + \int_r^\infty dx h_0^{(+)}(kr_>) j_0(kr_<) x e^{-\mu x} \right], \tag{A.19}
\end{aligned}$$

となるが、積分 $\int_0^r dx$ 中では $r_> = \max(r, x) = r, r_< = \min(r, x) = x$ となり、 $\int_r^\infty dx$ 中では $r_> = \max(r, x) = x, r_< = \min(r, x) = r$ となるので、

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle &= 2mik \left[\int_0^r dx h_0^{(+)}(kr) j_0(kx) x e^{-\mu x} + \int_r^\infty dx h_0^{(+)}(kx) j_0(kr) x e^{-\mu x} \right] \\
&= 2mik \left[h_0^{(+)}(kr) \int_0^r dx j_0(kx) x e^{-\mu x} + j_0(kr) \int_r^\infty dx h_0^{(+)}(kx) x e^{-\mu x} \right], \tag{A.20}
\end{aligned}$$

となる。 $h_0^{(+)}(z) = -i \frac{e^{iz}}{z}, j_0(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ を用いると、

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r} | G_k | V \rangle &= 2mik \left[-i \frac{e^{ikr}}{kr} \int_0^r dx \frac{\sin(kx)}{kx} x e^{-\mu x} + \frac{\sin(kr)}{kr} \int_r^\infty dx \left(-i \frac{e^{ikx}}{kx} \right) x e^{-\mu x} \right] \\
&= \frac{2m}{kr} \left[e^{ikr} \int_0^r dx \sin(kx) e^{-\mu x} + \sin(kr) \int_r^\infty dx e^{ikx} e^{-\mu x} \right] \\
&= \frac{2m}{kr} \left[e^{ikr} \int_0^r dx \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} e^{-\mu x} + \sin(kr) \int_r^\infty dx e^{ikx} e^{-\mu x} \right] \\
&= \frac{2m}{kr} \left[e^{ikr} \int_0^r dx \frac{e^{(ik-\mu)x} - e^{(-ik-\mu)x}}{2i} + \sin(kr) \int_r^\infty dx e^{(ik-\mu)x} \right] \\
&= \frac{2m}{kr} \left[\frac{e^{ikr}}{2i} \left[\frac{e^{(ik-\mu)x}}{ik-\mu} - \frac{e^{(-ik-\mu)x}}{-ik-\mu} \right]_0^r + \sin(kr) \left[e^{(ik-\mu)x} \right]_r^\infty \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2m}{kr} \left[\frac{e^{ikr}}{2i} \left[\frac{e^{(ik-\mu)r} - 1}{ik - \mu} - \frac{e^{(-ik-\mu)r} - 1}{-ik - \mu} \right] + \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2i} \frac{e^{(ik-\mu)r}}{ik - \mu} \right] \\
&= \frac{m}{ikr} \left[\frac{e^{(2ik-\mu)r}}{ik - \mu} - \frac{e^{ikr}}{ik - \mu} - \frac{e^{-\mu r}}{-ik - \mu} + \frac{e^{ikr}}{-ik - \mu} - \frac{e^{(2ik-\mu)r}}{ik - \mu} + \frac{e^{-\mu r}}{ik - \mu} \right] \\
&= \frac{m}{ikr} \left[e^{ikr} \left(-\frac{1}{ik - \mu} + \frac{1}{-ik - \mu} \right) + e^{-\mu r} \left(-\frac{1}{-ik - \mu} + \frac{1}{ik - \mu} \right) \right] \\
&= \frac{m}{ikr} \left[e^{ikr} \frac{2ik}{k^2 + \mu^2} + e^{-\mu r} \frac{2ik}{-k^2 - \mu^2} \right] \\
&= \frac{2m}{r} \left[e^{ikr} \frac{1}{k^2 + \mu^2} - e^{-\mu r} \frac{1}{k^2 + \mu^2} \right] \\
&= \frac{2m(e^{ikr} - e^{-\mu r})}{(\mu^2 + k^2)r}, \tag{A.21}
\end{aligned}$$

となる。

A.2.3 $\langle V | G_k | V \rangle$ の計算

$$\begin{aligned}
\langle V | G_k | V \rangle &= \int d^3\mathbf{r} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{2m(e^{ikr} - e^{-\mu r})}{(\mu^2 + k^2)r} \\
&= \frac{2m}{\mu^2 + k^2} \int d\Omega \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{-\mu r} e^{ikr} - e^{-2\mu r}}{r^2} \\
&= \frac{8\pi m}{\mu^2 + k^2} \int_0^\infty dr \left(e^{(ik-\mu)r} - e^{-2\mu r} \right) \\
&= \frac{8\pi m}{\mu^2 + k^2} \left[\frac{e^{(ik-\mu)r}}{ik - \mu} - \frac{e^{-2\mu r}}{-2\mu} \right]_0^\infty \\
&= \frac{8\pi m}{\mu^2 + k^2} \left[-\frac{1}{ik - \mu} + \frac{1}{-2\mu} \right] \\
&= \frac{8\pi m}{\mu^2 + k^2} \left[-\frac{-ik - \mu}{(ik - \mu)(-ik - \mu)} + \frac{1}{-2\mu} \right] \\
&= \frac{8\pi m}{\mu^2 + k^2} \left[\frac{ik + \mu}{\mu^2 + k^2} - \frac{1}{-2\mu} \right] \\
&= \frac{8\pi m}{\mu^2 + k^2} \frac{2ik\mu + 2\mu^2 - \mu^2 - k^2}{2\mu(\mu^2 + k^2)} \\
&= \frac{8\pi m}{\mu^2 + k^2} \frac{2ik\mu + \mu^2 - k^2}{2\mu} \\
&= \frac{8\pi m}{(\mu^2 + k^2)^2} \left[\frac{\mu^2 - k^2}{2\mu} + ik \right], \tag{A.22}
\end{aligned}$$

と、計算される。

A.3 6章の計算

g_0 を求める計算

式 (6.5) は、式 (5.27) で、離散固有値を持つために、十分遠方で平面波の寄与を消すために、右辺第2項の分母を0とする条件が、

$$\frac{1}{\omega} + \langle v | G | v \rangle = 0 \quad (\text{A.23})$$

となることから求める。これに、式 (5.36)、式 (A.13)、式 (5.13) を用いることで、

$$\begin{aligned} \frac{E - E_0}{g_0^2} + \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{x} V(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) V(\mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{E - E_0}{g_0^2} + \int d^3\mathbf{y} \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2me^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{x})}}{p^2 - k^2 - i\epsilon} V(\mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{E - E_0}{g_0^2} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\frac{p^2}{2m} - E - i\epsilon} \int d\mathbf{r} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \int d\mathbf{x} V(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} &= 0 \\ E - E_0 + g_0^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\frac{p^2}{2m} - E - i\epsilon} \frac{4\pi}{\mu^2 + p^2} 4\pi\mu^2 + p^2 &= 0 \\ m_{c\bar{c}} - E - g_0^2 \int_0^\infty dq 4\pi \frac{q^2}{\frac{q^2}{2m} - E - i\epsilon} \frac{1}{(\mu^2 + q^2)^2} \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} &= 0 \\ m_{c\bar{c}} - E - g_0^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq 4\pi \frac{q^2}{\frac{q^2}{2m} - E - i\epsilon} \frac{1}{(\mu^2 + q^2)^2} &= 0 \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

と、計算される。ただし、 $E = \frac{k^2}{2m}$ 。これを、 g_0^2 について解き、積分を I に置き換えることで式 (6.5) が得られる。

Appendix B

B.1 6章における数値計算手法

本研究では、シュレーディンガー方程式をヌメロフ法^{*1}を用いて数値計算している。この手法は、シュレーディンガー方程式のように方程式に2階微分しか現れない場合に有効な手法である。差分の刻み幅を h としたとき、微分方程式を解く際によく利用される4次のルンゲクッタ法においては、解の誤差の程度が h^5 に比例するが、ヌメロフ法の解に対する誤差の程度は h^6 に比例し、精度で上回る手法となっている。しかも、ルンゲクッタ法に比べて演算回数は少ないという利点もある。表 B.1 に、本研究で使用したパラメータを示す。

角運動量 $l = 0$ で s 波の場合に^{*2}、波動関数は動径方向と角度方向に分けると、球面調和関数 Y_ℓ^m を用いて、

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_{\ell=0}(r)}{r} Y_{\ell=0}^m(\theta, \phi), \quad (\text{B.1})$$

となる。このとき、シュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{1}{2m} + V(r)\right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (\text{B.2})$$

の動径成分の方程式は、

$$\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r)\right] u(r) = Eu(r) \quad (\text{B.3})$$

となる。ここで、formal 微分展開によるポテンシャル (6.9) は $r = 0$ で発散してしまうた

^{*1} もしくは、Numerov-Fox-Goodwin-Milne 法などと呼ばれている。

^{*2} 本研究で用いる分離・湯川型ポテンシャルでは散乱は s 波でしかおこらない。

表 B.1 ヌメロフ法のパラメーター

繰り返し数 N	800000
刻み幅 h	0.001
換算距離 $(N \times h) \times \hbar c$	$\simeq 158$ fm

め、数値計算においては、微小量 ϵ を用いて、

$$V_{\text{numerical}}^{\text{formal}}(r, E) = \frac{4\pi g_0^2}{\mu^2(E - E_0)} \frac{e^{-\mu r}}{\sqrt{r^2 + \epsilon}}, \quad (\text{B.4})$$

とする。このポテンシャルを用いて解くべき動径方向のシュレーディンガー方程式は、

$$\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{numerical}}^{\text{formal}}(r, E) \right] u(r) = Eu(r), \quad (\text{B.5})$$

であり、ポテンシャルを計算する際に用いるエネルギー E とシュレーディンガー方程式を計算する際に用いるエネルギー E は同一である。一方、HAL QCD 法によるポテンシャル (6.10) では、発散を取り除くために、

$$V_{\text{numerical}}^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}} = 0) = E_{\text{pot}} + \frac{-k_{\text{pot}}^2 \sin(k_{\text{pot}} r + \delta) - \mu^2 \sin \delta e^{-\mu r}}{2m(\sin(k_{\text{pot}} \sqrt{r^2 + \epsilon} + \delta) - \sin \delta e^{-\mu r})}, \quad (\text{B.6})$$

とする。これは、 $r \rightarrow 0$ の極限でポテンシャルが負、すなわち引力となるための定式化である。また、ゼロエネルギー極限でのポテンシャル (5.73) は、

$$V_{\text{numerical}}^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}}) = \frac{a_0 \mu^2 e^{-\mu r}}{2m \left(r - a_0 + a_0 e^{-\mu \sqrt{r^2 + \epsilon}} \right)}, \quad (\text{B.7})$$

とする。これらのポテンシャルを用いて解くべき動径方向のシュレーディンガー方程式は、

$$\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{numerical}}^{\text{HAL}}(r, E_{\text{pot}}) \right] u(r) = Eu(r), \quad (\text{B.8})$$

と、ポテンシャルを計算する際に用いるエネルギー E_{pot} とシュレーディンガー方程式を計算する際に用いるエネルギー E が異なっている点に注意するべきである。

また、位相差は漸近形 (5.44) の微分用いることで、 $k \cot(\delta(k))$ が式に現れるようにした、

$$\cot \delta = \frac{-u_{\text{max}} \cos(kr_{\text{max}-1}) + u_{\text{max}-1} \cos(kr_{\text{max}})}{u_{\text{max}} \sin(kr_{\text{max}-1}) - u_{\text{max}-1} \sin(kr_{\text{max}})}, \quad (\text{B.9})$$

から、計算したいエネルギー E を入れて、運動量 $k = \sqrt{2mE}$ をインプットし、原点から外向きに解いて遠方の振る舞いを引き出すことにより、位相差を数値計算する。ここで、 u_{\max} は一番遠方の動径方向の波動関数であり、 $u_{\max-1}$ はひとつだけ原点に近い点での動径方向波動関数。 $r_{\max}, r_{\max-1}$ の同様に、原点から一番とおい点とそこから1つだけ原点に近い点を表す。

謝辞

本論文をまとめるに際し、兵藤先生に最大の感謝を捧げる。また、研究室のメンバーにも感謝の気持ちでいっぱいである。特に、衣川さんには研究室の先輩として様々な知恵をお借りした。同期の西淵とは、親身に研究生活を送ることができた。後輩の曾根くんと三澤くん、更に卒研究生の渡辺くんと阿曾沼くんは、大学であまり会うことができなかった点には悔恨を感じる。社会人として新たな道に進む人にはエールを送り、これからも研究を共にする人とは更なる交友の発展を期待したい。また、研究する環境を与えてくれたのは紛れもなく両親のおかげであり、感謝している。また、プログラミングや TeX の知識をインターネットの海に流してくれた顔も名前も知らない誰かにも感謝している。「人生は何事もなさぬにはあまりに長いが、何事をもなさぬにはあまりにも長い。」と、”山月記” (中島敦) で語られているが、2年間は修士として研究をまとめるにはあまりにも短いように感じる日々であった。兵藤先生には、これからの3年間もお世話になるが、これからも多大な迷惑をかけることをこの場を借りてお許しただけきたい。そして、最後まで読んでくださったあなたに、感謝を述べておしまいとしたい。

参考文献

- [1] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. **17**, 48 (1935).
- [2] S. Aoki, 格子 QCD によるハドロン物理, *Hadron Physics in Lattice QCD -Understanding Hadrons from QCD-*, 1 ed. (共立出版株式会社, 2017), 9784320035331.
- [3] N. Ishii, S. Aoki, and T. Hatsuda, Phys. Rev. Lett. **99**, 022001 (2007), nucl-th/0611096.
- [4] S. Aoki, T. Hatsuda, and N. Ishii, Prog. Theor. Phys. **123**, 89 (2010), 0909.5585.
- [5] HAL QCD, S. Aoki *et al.*, PTEP **2012**, 01A105 (2012), 1206.5088.
- [6] S. Aoki and K. Yazaki, PTEP **2022**, 033B04 (2022), 2109.07665.
- [7] M. Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. **139**, B1006 (1965).
- [8] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).
- [9] E. Eichten *et al.*, Phys. Rev. Lett. **34**, 369 (1975), [Erratum: Phys.Rev.Lett. 36, 1276 (1976)].
- [10] SESAM, G. S. Bali, H. Neff, T. Duessel, T. Lippert, and K. Schilling, Phys. Rev. D **71**, 114513 (2005), hep-lat/0505012.
- [11] Y. Ikeda and H. Iida, Prog. Theor. Phys. **128**, 941 (2012), 1102.2097.
- [12] T. Kawanai and S. Sasaki, Phys. Rev. Lett. **107**, 091601 (2011), 1102.3246.
- [13] A. Hosaka, T. Iijima, K. Miyabayashi, Y. Sakai, and S. Yasui, PTEP **2016**, 062C01 (2016), 1603.09229.
- [14] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [15] R. L. Jaffe, Phys. Rev. D **15**, 267 (1977).
- [16] R. L. Jaffe, Phys. Rev. D **15**, 281 (1977).
- [17] N. Isgur and J. E. Paton, Phys. Rev. D **31**, 2910 (1985).
- [18] N. Isgur, R. Kokoski, and J. Paton, Phys. Rev. Lett. **54**, 869 (1985).

- [19] R. H. Dalitz and S. F. Tuan, Phys. Rev. Lett. **2**, 425 (1959).
- [20] A. De Rujula, H. Georgi, and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **38**, 317 (1977).
- [21] BaBar, Belle, A. J. Bevan *et al.*, Eur. Phys. J. C **74**, 3026 (2014), 1406.6311.
- [22] G. T. Bodwin, E. Braaten, and G. P. Lepage, Phys. Rev. D **51**, 1125 (1995), hep-ph/9407339, [Erratum: Phys.Rev.D 55, 5853 (1997)].
- [23] N. Brambilla, A. Pineda, J. Soto, and A. Vairo, Nucl. Phys. B **566**, 275 (2000), hep-ph/9907240.
- [24] S. Godfrey and N. Isgur, Phys. Rev. D **32**, 189 (1985).
- [25] R. Machleidt, Phys. Rev. C **63**, 024001 (2001), nucl-th/0006014.
- [26] H. Feshbach, Annals Phys. **5**, 357 (1958).
- [27] H. Feshbach, Annals Phys. **19**, 287 (1962).
- [28] I. Terashima and T. Hyodo, EPJ Web Conf. **271**, 10004 (2022), 2208.14075.
- [29] G. S. Bali, Phys. Rept. **343**, 1 (2001), hep-ph/0001312.
- [30] CP-PACS, A. Ali Khan *et al.*, Phys. Rev. D **65**, 054505 (2002), hep-lat/0105015, [Erratum: Phys.Rev.D 67, 059901 (2003)].
- [31] E. Epelbaum, H.-W. Hammer, and U.-G. Meissner, Rev. Mod. Phys. **81**, 1773 (2009), 0811.1338.
- [32] N. Kaiser, M. Muhlbauer, and W. Weise, Eur. Phys. J. A **31**, 53 (2007), nucl-th/0610060.
- [33] A. D. Jackson, D. O. Riska, and B. Verwest, Nucl. Phys. A **249**, 397 (1975).
- [34] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, and J. J. de Swart, Phys. Rev. C **49**, 2950 (1994), nucl-th/9406039.
- [35] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, and R. Schiavilla, Phys. Rev. C **51**, 38 (1995), nucl-th/9408016.
- [36] S. C. Pieper and R. B. Wiringa, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **51**, 53 (2001), nucl-th/0103005.
- [37] W. Gloeckle, H. Witala, D. Huber, H. Kamada, and J. Golak, Phys. Rept. **274**, 107 (1996).
- [38] J. Fujita and H. Miyazawa, Prog. Theor. Phys. **17**, 360 (1957).
- [39] B. H. J. McKellar, Phys. Rev. Lett. **21**, 1822 (1968).
- [40] S. A. Coon, M. D. Scadron, and B. R. Barrett, Nucl. Phys. A **242**, 467 (1975), [Erratum: Nucl.Phys.A 254, 542–543 (1975)].
- [41] H. T. Coelho, T. K. Das, and M. R. Robilotta, Phys. Rev. C **28**, 1812 (1983).

- [42] B. S. Pudliner, V. R. Pandharipande, J. Carlson, S. C. Pieper, and R. B. Wiringa, Phys. Rev. C **56**, 1720 (1997), nucl-th/9705009.
- [43] G. E. Brown, Comments Nucl. Part. Phys. **4**, 140 (1970).
- [44] S. Aoki and T. Doi, Front. in Phys. **8**, 307 (2020), 2003.10730.
- [45] S. Aoki, T. Hatsuda, and N. Ishii, Comput. Sci. Dis. **1**, 015009 (2008), 0805.2462.
- [46] M. Luscher, Nucl. Phys. B **354**, 531 (1991).
- [47] PACS-CS, S. Aoki *et al.*, PoS **LATTICE2010**, 108 (2010), 1011.1063.
- [48] PACS-CS, S. Aoki *et al.*, Phys. Rev. D **81**, 074503 (2010), 0911.2561.
- [49] N. Ishii, S. Aoki, and T. Hatsuda, PoS **LATTICE2008**, 155 (2008), 0903.5497.
- [50] <http://www.nn-online.org/>.
- [51] M. B. Voloshin, Prog. Part. Nucl. Phys. **61**, 455 (2008), 0711.4556.
- [52] CDF, D. Acosta *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 072001 (2004), hep-ex/0312021.
- [53] Belle, V. Bhardwaj *et al.*, Phys. Rev. Lett. **107**, 091803 (2011), 1105.0177.
- [54] L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa, and V. Riquer, Phys. Rev. D **71**, 014028 (2005), hep-ph/0412098.
- [55] Belle, S. K. Choi *et al.*, Phys. Rev. D **84**, 052004 (2011), 1107.0163.
- [56] Particle Data Group, K. A. Olive *et al.*, Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).
- [57] Belle, T. Aushev *et al.*, Phys. Rev. D **81**, 031103 (2010), 0810.0358.
- [58] BABAR Collaboration, B. Aubert *et al.*, Phys. Rev. D **77**, 011102 (2008).
- [59] C. Bignamini, B. Grinstein, F. Piccinini, A. D. Polosa, and C. Sabelli, Phys. Rev. Lett. **103**, 162001 (2009), 0906.0882.
- [60] Particle Data Group, R. L. Workman *et al.*, PTEP **2022**, 083C01 (2022).
- [61] K. Nochi, T. Kawanai, and S. Sasaki, Phys. Rev. D **94**, 114514 (2016), 1608.02340.
- [62] M. Takizawa and S. Takeuchi, PTEP **2013**, 093D01 (2013), 1206.4877.