

カイラルユニタリー法を用いた Ξ 共鳴状態の
実験データに基づく解析

Analysis of Ξ resonances with chiral unitary
approach based on experimental data

東京都立大学理学研究科 物理学専攻
西淵 拓磨

2023年1月10日

概要

ストレンジネス $S = -2$ のフレーバー量子数を持つバリオンである Ξ の励起状態は実験での生成が難しく、データが得られなかったことから第一励起状態である $\Xi(1530)$ 以外は物理的性質の解明が進んでいなかった。2019 年に行われた Belle 実験による $\Xi_c \rightarrow \pi\pi\Xi$ 崩壊での不変質量分布の観測や、2021 年に行われた ALICE 実験による $K^- \Lambda$ 散乱長の決定など、 Ξ 励起状態のうち、 $\Xi(1620)$ 及び $\Xi(1690)$ に関する詳細な実験データが近年集まりつつある。

一方で Belle が報告した質量と崩壊幅は、これまでの理論解析の予言とは異なるものだった。 $\Xi(1620)$ 、 $\Xi(1690)$ を 3 クォーク状態のバリオン励起状態として記述する構成子クォーク模型では、実験データと大きく異なる質量が予言されていた。 Ξ 励起状態をメソン-バリオン散乱中での共鳴状態として扱うカイラルユニタリー法では、実験結果と近い質量を予測していたが、崩壊幅が定量的に実験と一致するモデルは得られていない。

こうした背景を受け、本研究ではカイラルユニタリー法を用いて共鳴状態として Ξ 励起状態を動的に生成し、Belle 実験および、ALICE 実験のそれぞれに基づいた $\Xi(1620)$ の理論モデルを構築することで、 $\Xi(1620)$ の物理的性質についての議論を行う。また、異なる実験データに基づいた理論モデルが両立できるかについても議論する。

また、Belle 実験の結果では $\Xi(1620)$ および $\Xi(1690)$ のピークが $\bar{K}\Lambda$ と $\bar{K}\Sigma$ のそれぞれの閾値エネルギーの近傍に現れている。一般に閾値近傍のピークは閾値の影響を受けて歪むことが知られているが、実験でのスペクトルフィットは閾値の影響を考慮しない手法が用いられている。そのため、本研究で構築した理論モデルを用いて、 $\bar{K}\Lambda$ の閾値によって $\Xi(1620)$ のスペクトルが歪められる閾値効果を定量的に確認する。 $\Xi(1690)$ については理論の先行研究をもとに、 $\bar{K}\Sigma$ 閾値近傍でのアイソスピンの破れを考慮した数値計算を行うことで、 $\bar{K}^0\Sigma^0$ と $K^-\Sigma^+$ の二つの閾値からスペクトルに対して現れる閾値効果について議論を行う。

目次

第 1 章	導入	4
1.1	ハドロンとは	4
1.2	共鳴状態とは	6
1.3	≡ 共鳴状態に関する研究	6
1.4	本研究の目的	8
第 2 章	≡ 励起状態の研究の現状	10
2.1	実験の現状	10
2.2	理論の現状	14
第 3 章	共鳴状態と散乱振幅	17
3.1	量子力学での共鳴状態	17
3.1.1	量子力学での束縛状態	18
3.1.2	量子力学での共鳴状態	19
3.2	散乱理論での共鳴状態	21
3.3	リーマンシート	27
3.3.1	固有状態の分類	27
3.4	共鳴状態と観測量	29
3.5	有効レンジ展開	31
3.6	散乱長を用いたポール位置の導出	33
第 4 章	カイラルユニタリー模型	42
4.1	カイラルユニタリー模型とは	42
4.2	QCD におけるカイラル対称性の自発的破れ	43
4.3	カイラル摂動論と低エネルギーメソン-バリオン相互作用	46
4.4	散乱理論における非摂動散乱振幅	48

4.5	複素エネルギーへの解析接続	52
4.6	ユニタリー性	55
4.7	Ξ 励起状態の先行研究	57
4.7.1	Ramos, Oset, Bennhold による研究	57
4.7.2	Garcia-Recio, Lutz, Nieves による研究	58
4.7.3	Sekihara による研究	59
第 5 章	$\Xi(1620)$ に関する研究	62
5.1	先行研究のスペクトル	62
5.2	幅の狭い $\Xi(1620)$ 共鳴のモデル (Model 1)	64
5.3	$\bar{K}\Lambda$ 散乱長を考慮したモデル (Model 2)	67
5.4	散乱長とポールの関係	71
5.5	誤差を考慮した Model 1 と Model 2 の比較	72
第 6 章	$\Xi(1690)$ に関する研究	75
6.1	$\Xi(1690)$ の特殊性	75
6.2	$\Xi(1690)$ における閾値効果の検証	76
第 7 章	まとめと展望	78
7.1	本研究のまとめ	78
7.2	今後の展望	80
付録 A	付録	81
A.1	基底の変換	81
A.1.1	$\pi\Xi$ の基底変換	81
A.1.2	$\bar{K}\Sigma$ の基底変換	83
A.1.3	C_{ij} の導出	83
A.2	チャージドにおける群論的係数	85
A.3	式 (3.39) の全断面積 σ の導出	86
A.4	LS 方程式の導出	86
A.5	\mathcal{L}_{QCD} のクォーク部分の計算	88
	参考文献	93

第 1 章

導入

ハドロンとは強い相互作用をする粒子の総称であり、大きく分けるとメソンとバリオン、その反粒子である反バリオンの三種類が存在する。ハドロンのなかでも同じフレーバー量子数を持ったエネルギーの高い状態を励起状態と呼び、ハドロンの励起状態は現在までに 300 種類程度発見されている [1]。励起状態は一般的に強い相互作用に対して不安定であることから、不安定状態である共鳴状態として考える必要がある。本章では 1.1 節で励起状態も含めたハドロンの説明、1.2 節では一般的な共鳴状態の説明をする。1.3 節で本研究の対象となる Ξ 共鳴状態の理論及び実験での研究の現状を紹介し、1.4 節で先行研究の問題点と本研究の目的を述べる。なお本論文では特に断りが無い限り、 $\hbar = c = 1$ の自然単位系を用いる。

1.1 ハドロンとは

物質の最小構成要素としてクォークと呼ばれる素粒子が存在する。素粒子のようなミクロな世界での相互作用は、粒子を交換することで媒介されており、素粒子クォークはグルーオンを交換することにより、強い相互作用をする。クォークにはたらく強い力はカラー SU(3) ゲージ理論によって記述され、SU(3) ゲージ対称性を持つ場の量子論は量子色力学 (QCD) と呼ばれている。クォークは u, d, c, s, t, b の 6 種類のフレーバー量子数を持つ。このうち c, s, t, b クォークは弱い相互作用によって崩壊し、最終的に u, d クォークになることから、低エネルギーである我々の身の回りの物質は u, d の二種類で構成されている。

それぞれのクォークはカラーと呼ばれる 3 つの自由度を持つ。例として u クォークに着目すると、 u^R, u^G, u^B の三種類が存在することになる。低エネルギーではクォークは

	u	d	s
電荷 Q	$+2/3$	$-1/3$	$-1/3$
アイソスピン I	$1/2$	$1/2$	0
I_3	$1/2$	$-1/2$	0
ストレンジネス S	0	0	-1

表 1.1 u 、 d 、 s クォークの量子数

単体で観測することができず、必ずカラー 1 重項となる組み合わせで存在する。これがカラーの閉じ込めと呼ばれる現象である。クォークがカラー 1 重項となる組み合わせで存在する複合的な状態のことをハドロンと呼び、一般的にはクォーク 3 つからなるバリオン、バリオンの反粒子である反バリオン、クォーク-反クォーク対であるメソンの 3 種類が存在する。バリオンの例として原子核を構成する核子 N (陽子 p と中性子 n をまとめて核子と呼ぶ) があり、メソンの例としては湯川の間接子論で導入された π (持っている電荷によって π^+ 、 π^0 、 π^- がある) などがある。これらのハドロンをクォーク組成を用いて表すと、

$$p \sim uud, \quad n \sim udd, \quad (1.1)$$

$$\pi^- \sim d\bar{u}, \quad \pi^0 \sim \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}, \quad \pi^+ \sim u\bar{d}, \quad (1.2)$$

となる。一方で QCD はクォークが 4 つ以上からなるエキゾチックハドロンと呼ばれる状態の存在を否定しておらず、エキゾチックハドロンの存在を裏付ける実験結果も得られている。具体的なものとしては $X(3872)$ [2] や、 P_c [3, 4]、 T_{cc} [5, 6] などが挙げられる。近年ではこのエキゾチックハドロンに関する研究も活発に行われている [7, 8, 9]。

本研究で扱う Ξ に含まれる u, d, s クォークの持つフレーバー量子数について表 1.1 にまとめる。 u, d クォークはアイソスピン $I = 1/2$ を持ち、その第三成分は u クォークが $I_3 = +1/2$ 、 d クォークが $I_3 = -1/2$ となっている。 s クォークは、ストレンジネス $S = -1$ を持つ。つまり、クォークはフレーバー量子数を定めると、一種類のクォークが対応する。一方、クォークが複合的になった状態であるハドロンはどうなるだろうか。ハドロンもフレーバー量子数で分類することが可能であるが、フレーバー量子数を定めると一種類のハドロンが対応するわけではなく、複数のハドロンが対応している。例えば、核子 N は $I = 1/2$ 、 $S = 0$ であるが、このフレーバー量子数を持つハドロンは 30 種類程度存在している [1]。このうち、核子 N が一番低いエネルギーを持った基底状態であり、その他の状態はフレーバー量子数と同じながら核子 N より高いエネルギーを持つ励起状態

である。励起状態はスピン・パリティ J^P および質量で分類される。核子以外のハドロンについても多数の励起状態が知られている。

1.2 共鳴状態とは

一般にほとんどのハドロンの励起状態は基底状態のハドロン対などへと崩壊するため、励起状態の解析にあたっては高いエネルギーを持ち、最終的に複数のハドロンへと崩壊をする不安定な状態を考える必要がある。励起状態の崩壊した後の粒子の散乱を考えると、散乱エネルギーが元の励起状態に近づいた時に共鳴散乱が起こることから、ハドロンの励起状態は共鳴状態であるとして扱わなくてはならない。

以下では、ハドロンのようなミクロな粒子が従う量子力学での共鳴状態の記述について議論する。通常はハミルトニアン固有値であるエネルギーは実数で与えられるが、固有状態が共鳴状態であるとき、ハミルトニアン固有値は複素数になっている。この複素エネルギーを持つ固有状態の考えは 1928 年にガモフ (G.Gamow) によって初めて導入された [10]。複素エネルギー z を質量 M_R と崩壊幅 Γ_R を用いて

$$z = M_R - \frac{i}{2}\Gamma_R, \quad (1.3)$$

と表す。式 (1.3) のような複素エネルギーを持つ固有状態の波動関数の存在確率は時間と共に指数関数的に減衰する (3 章参照)。

散乱理論では、複素エネルギーの固有状態が散乱振幅 $f(E)$ の $E = z$ でのポールとして表される。ポールの寄与を含まないバックグラウンド項を取り除いた Breit-Wigner 振幅は

$$f_{\text{BW}}(E) \propto \frac{1}{E - M_R + \frac{i\Gamma_R}{2}}, \quad (1.4)$$

と表される。 $f(E)$ の絶対値もしくは虚部が、 $E = M_R$ を中心に幅 Γ_R のピークを持つことから、 M_R は共鳴の質量、 Γ_R は共鳴の崩壊幅と解釈できる。

1.3 Ξ 共鳴状態に関する研究

数あるハドロンのうち、ストレンジネス $S = -2$ 、アイソスピン $I = 1/2$ を持つバリオンである Ξ を考える。電荷の違いによって Ξ^0 と Ξ^- の二種類が存在しており、クォーク組成はそれぞれ $\Xi^0 \sim (uss)$ 、 $\Xi^- \sim (dss)$ である。

状態	J^P	状況	状態	J^P	状況
Ξ^0	$1/2^+$	****	$\Xi(1950)$	-	***
Ξ^-	$1/2^+$	****	$\Xi(2030)$	-	***
$\Xi(1530)$	$3/2^+$	****	$\Xi(2120)$	-	*
$\Xi(1620)$	-	*	$\Xi(2250)$	-	**
$\Xi(1690)$	-	***	$\Xi(1950)$	-	**
$\Xi(1820)$	$3/2^-$	***	$\Xi(1950)$	-	*

表 1.2 Ξ 励起状態の性質 [1]。状況における*は最大で 4 つあり、*が多いほど性質がよく解明されていることを示す。

核子の励起状態は 30 個程度知られているが、 Ξ の励起状態は表 1.2 で示すように 10 個程度であり、大半の Ξ 励起状態は性質があまりよくわかっていない。 s クォークは低エネルギーでは存在していないことから、高エネルギー加速器などによって人工的に生成する必要がある。しかし、 u クォークや d クォークよりも大きな質量を持ち、 10^{-10} 秒程度ですぐ u クォークや d クォークへと崩壊してしまうことから、実験的に s クォークを二つ含む Ξ 励起状態を作ることが難しく、データが集まらなかった。理論研究においても、これまで様々なモデル計算が行われてきたが、実験データが少ないことからその物理的性質についての解明は進まなかった。

こうしたなか、近年になり実験での観測で大きな進展があり、2019 年には Belle 実験による $\pi^+\Xi^-$ 不変質量分布中での $\Xi(1620)$ 及び $\Xi(1690)$ のピークの観測 [11]、2021 年には ALICE 実験による $\Xi(1620)$ の質量に近い閾値エネルギーを持つ $K^-\Lambda$ の散乱長の決定 [12] など詳細なデータが得られている。これらの詳細な実験データは $\Xi(1620)$ 及び $\Xi(1690)$ の物理的性質の解明に大きく役立つことが期待される。(2.1 節参照)

理論の先行研究のうち、 Ξ 励起状態を通常の 3 クォーク状態として計算する構成子クォークモデルの予測 [13] では、実験で得られた質量を再現できていない。一方で、 Ξ 励起状態を共鳴状態としてメソン-バリオン動力学から生成するカイラルユニタリー法を用いた先行研究 [14] では、崩壊幅は定量的な一致がないものの、構成子クォークモデルよりも軽く、実験データに近い質量を予言している (2.2 節参照)。

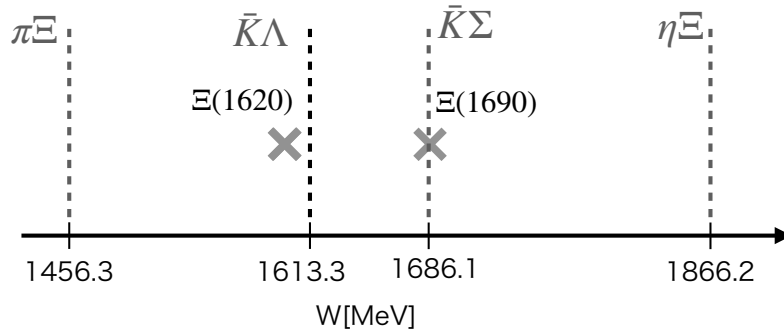


図 1.1 $\Xi(1620)$ 共鳴、 $\Xi(1690)$ 共鳴と、結合する $\pi\Xi$ 、 $\bar{K}\Lambda$ 、 $\bar{K}\Sigma$ 、 $\eta\Xi$ の閾値エネルギーの模式図。

1.4 本研究の目的

1.3 節で記したように Belle 実験や ALICE 実験で新しいデータが得られたこと、理論ではこの実験データを考慮したモデルが存在せず、内部構造や物理的性質の解明が進んでいないことから、本研究では実験データに基づいて $\Xi(1620)$ 及び $\Xi(1690)$ の物理的性質を解明することを目的とする。そのため、本研究では Ξ 励起状態を共鳴状態として記述できるカイラルユニタリー法を用いて、実験データを再現するモデルを探索する。まずは Belle 実験で得られた $\Xi(1620)$ の質量 M_R と崩壊幅 Γ_R からポールの位置を $M_R - i\Gamma/2$ と仮定して理論モデルを構築する。一方で、ALICE 実験で得られた散乱長を再現する理論モデルも構築し、両者を比較する。モデルをもとに Ξ 励起状態の物理的性質の解明を目指す。

$\Xi(1620)$ 及び $\Xi(1690)$ を調べる上で、閾値の効果に注目することが重要である。図 1.1 に Ξ と同じフレーバー量子数を持つ 4 つの結合チャンネル ($\pi\Xi$ 、 $\bar{K}\Lambda$ 、 $\bar{K}\Sigma$ 、 $\eta\Xi$) の閾値を示す。これらの閾値エネルギーと Belle 実験で得られたスペクトル (図 2.3) を比較すると、 $\Xi(1620)$ のピークは $\bar{K}\Lambda$ の閾値 (1613.3 MeV) の近く、 $\Xi(1690)$ のピークは $\bar{K}\Sigma$ の閾値 (1686.1 MeV) の近くに現れている。一般に閾値に近いエネルギーではスペクトルが閾値の影響を受けることが知られているため、Belle 実験のスペクトルについても閾値効果を考慮する必要がある。本研究ではカイラルユニタリー模型を用いることで自然に閾値の効果を取り込むことができるため、閾値効果を検証できる。

一方で、 $\bar{K}\Sigma$ の近傍に位置する $\Xi(1690)$ の受ける閾値効果は、アイソスピン対称性の破れから $K^-\Sigma^+$ 、 $\bar{K}^0\Sigma^0$ の二つの閾値が存在し、近傍に一つの $\bar{K}^0\Lambda$ の閾値しかない

$\Xi(1620)$ とは異なることが期待される。実際に WA89 実験での質量はこの二つの閾値に挟まれたエネルギー領域に存在しており [15]、スペクトルは異なる二つの閾値から影響を受けることが考えられる。本研究では $\Xi(1690)$ の性質について調べた先行研究 [16] をもとに、カイラルユニタリー法による数値計算を用いてアイソスピンの破れによる閾値効果の確認を行う。

本論文は以下のように構成される。まず、第 2 章では $\Xi(1620)$ および $\Xi(1690)$ に関する実験、理論解析の現状についてまとめる。第 3 章では本論文で主に議論することになる共鳴状態の基礎について、量子力学、散乱理論の観点から触れ、第 4 章では本研究で用いる理論モデルであるカイラルユニタリー法について説明する。第 5 章では Belle および ALICE の実験データに基づいた $\Xi(1620)$ に関する理論モデルを構築し、閾値効果について議論する。このうち、5.2 の準備的な内容は研究会プロシーディングス [17] で報告されている。第 6 章では $\bar{K}\Sigma$ のアイソスピンの破れを考慮した数値計算を行い、 $\Xi(1690)$ のピークに対する閾値効果について議論する。第 7 章では第 5 章及び第 6 章で行なった理論解析の結果と、今後の展望についてまとめる。

第 2 章

Ξ 励起状態の研究の現状

本章では Ξ 励起状態の先行研究についてまとめる。2.1 節では実験研究について、2.2 節では理論研究についてまとめる。

2.1 実験の現状

Ξ の励起状態は Ξ(1530) と Ξ(1820) が古くから知られており、Ξ(1620) 及び Ξ(1690) は Ξ(1530) の次に位置する励起状態として考えられていた。表 1.2 に示すように Ξ(1530) は****で性質が十分に解明されていて、Ξ(1820) も***であるもののスピン・パリティは確定しているのに対し、Ξ(1690) はスピン・パリティが未確定であるほか、Ξ(1620) は*が一つしかなく、性質の解明があまり進んでいないことがわかるが、本節冒頭でも触れたように、近年まで詳細な実験データが得られなかった Ξ(1620)、Ξ(1690) だが、その存在を示唆する実験データが得られたのはかなり昔のことであった。

Ξ(1620) の存在を示唆する最古の実験データは 1969 年に行われた Bubble Chamber による 2.87 GeV での $K^-p \rightarrow \Xi^- \pi^+ K^0$ 反応の観測であった [18, 19]。同様の装置を用いた 1606 MeV での $K^-p \rightarrow \Xi^- \pi^+ K^0$ 反応の観測 [20] や、2210 MeV、2435 MeV での $K^-p \rightarrow \Xi^- \pi^+ K^0$ 反応の観測 [21] でも Ξ(1620) の存在が示唆された。観測では $\pi^+ \Xi^-$ スペクトルの 1620 MeV 付近にピーク構造が存在することが確かめられたが、当時の実験では分解能が低く、共鳴の質量と崩壊幅は十分に判別できなかった。1972 年に 2.18 GeV での $K^-p \rightarrow \Xi^- \pi^+ K^0$ 反応の観測が行われ [22]、1981 年には 6.5 GeV での $K^-p \rightarrow \Xi^- \pi^+ K^0$ 反応が観測された [23]。しかし、文献 [22, 23] の実験で得られた $\pi^+ \Xi^-$ 不変質量分布中に Ξ(1620) とみなせるピーク構造は確認できなかったことから、Ξ(1620) は確実に存在する状態とは見做されなくなってしまった。

一方でその頃には、 $\Xi(1690)$ の存在を示唆する実験結果も現れ始めた。1978 年、Bubble Chamber 実験での 4.2 GeV における K^-p 反応の複数の崩壊モード ($K^-p \rightarrow \Sigma^+K^-K^+\pi^-$, $K^-p \rightarrow \Sigma^0K^-K_s^0\pi^+$, $K^-p \rightarrow \Sigma^+K^-K_s^0\pi^0$, $K^-p \rightarrow \Lambda K^-K_s^0\pi^+$, $K^-p \rightarrow \Lambda K_s^0K^+\pi^-$ の 5 つ) の観測 [24] によって、 $\Xi(1690)$ の実験的な根拠が示された。中性 ($Q = 0$)、荷電 ($Q = -1$) の両方の $\bar{K}\Lambda$ のスペクトルの $\bar{K}\Sigma$ 閾値付近に大きなピークを、 $\bar{K}\Lambda$ の閾値付近に小さなピークを観測した。この実験では、これらのピークは単なる閾値による効果であるという解釈が排除できないが、 $\bar{K}\Sigma$ - $\bar{K}\Lambda$ 結合チャンネル解析の結果は共鳴状態であると結論づけた。

その後、しばらくして $\Xi(1690)$ の実験データが集まり始める。 $\Xi(1690)$ の実験による初めての直接的な観測は 1997 年に行われた WA89 実験で、345 GeV の Σ^- ビームを銅と炭素の原子核標的へ照射し得られた $\pi^+\Xi^-$ 不変質量分布内に $\Xi(1690)$ のピークが初めて観測された [15]。図 2.1 に観測されたスペクトルを示す。このピークは実験の解像度 σ を Gauss 分布で考慮した不変質量 m の Breit-Wigner 分布

$$f_{\text{BWG}}(m, M_R, \Gamma_R, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\Gamma_R}{4(\mu - M_R)^2 + (\Gamma_R)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-\mu}{\sigma}\right)^2} d\mu \quad (2.1)$$

を用いて fit されている。結果として、 $\Xi(1690)$ の質量、崩壊幅が

$$\begin{aligned} M_R &= 1686 \pm 4 \text{ MeV}, \\ \Gamma_R &= 10 \pm 6 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

と報告された。式 (2.2) の WA89 実験による結果は今日においても PDG に最も詳細な値として載っており、信頼度の高いデータと言える。

また、 $\Xi(1690)$ の不変質量分布は近い時期に他の実験でも観測されている。2002 年、Belle によって $\Lambda_c^+ \rightarrow \Sigma^+K^-K^+$ 崩壊が観測され、その際に得られた Σ^+K^- 不変質量分布中に $\Xi^0(1690)$ のピークが観測された (図 2.2) [25]。この実験ではピークは Breit-Wigner 分布で Fit されており、質量 M_R 及び崩壊幅 Γ_R は

$$\begin{aligned} M_R &= 1688 \pm 2 \text{ MeV}, \\ \Gamma_R &= 11 \pm 4 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

と報告された。式 (2.3) に示した Belle 実験の結果は、崩壊過程が異なるものの式 (2.2) に示した WA89 実験の結果と矛盾していない。

$\Xi(1690)$ については実験データが集まる一方で、 $\Xi(1620)$ の観測は長らく進まなかった。2019 年になり、Belle 実験により $\Xi_c^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\Xi^-$ 崩壊の $\pi^+\Xi^-$ 不変質量分布が観測され、 $\Xi(1620)$ と $\Xi(1690)$ の詳細なデータが得られた [11]。図 2.3 に $\pi^+\Xi^-$ の不

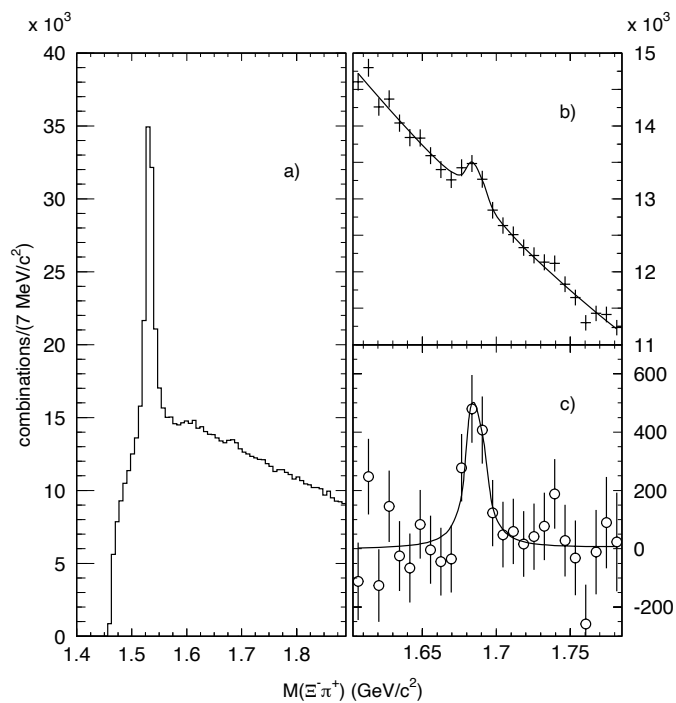


図 2.1 WA89 実験で得られた $\pi^+\Xi^-$ 不変質量分布 [15]

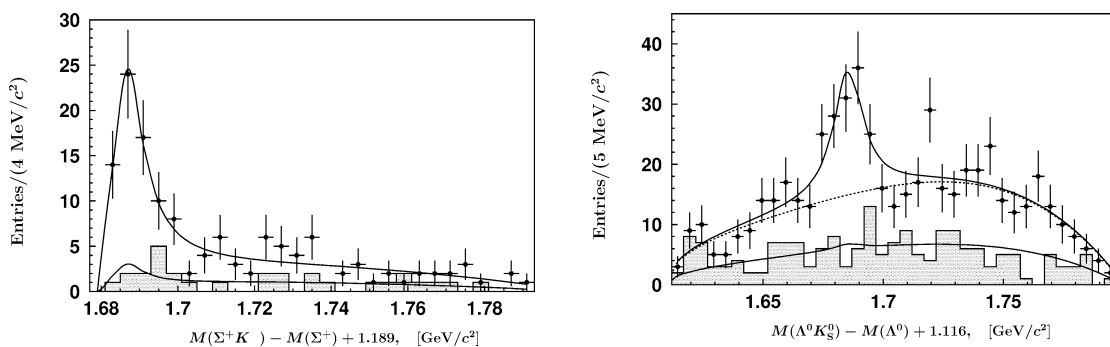


図 2.2 2001 年に行われた Belle 実験で得られた Λ_c 崩壊での Σ^+K^- (左) および ΛK (右) 不変質量分布 [25]

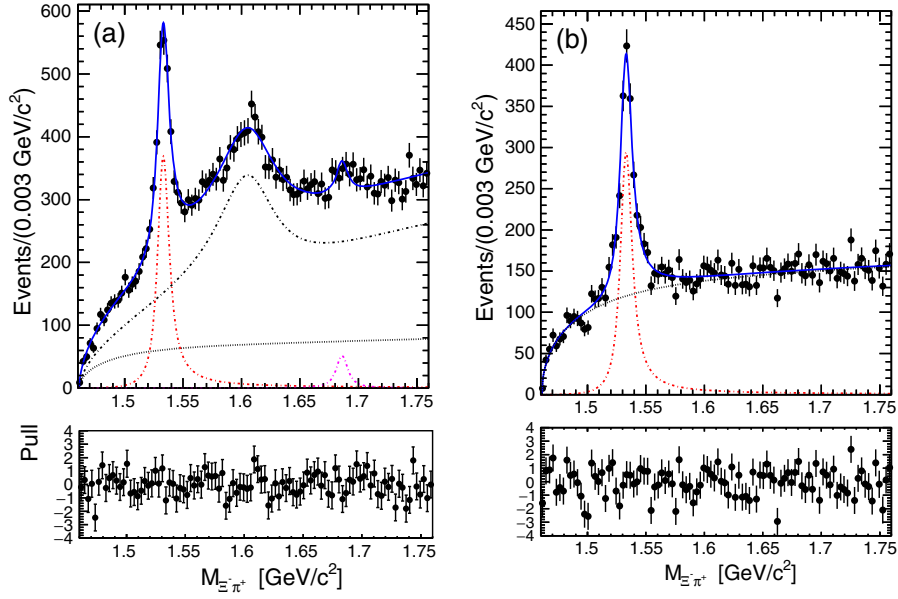


図 2.3 Bell 実験で得られた $\Xi_c \rightarrow \pi\pi\Xi$ 崩壊での $\pi^+\Xi^-$ 不変質量分布 [11]

変質量分布を示す。左は $\pi\pi\Xi$ が Ξ_c を通して観測された時のスペクトルで、右は $\pi\pi\Xi$ が Ξ_c を通さずに生じた時のスペクトルである。両方のスペクトルに共通して現れている、 $M_{\Xi-\pi^+} = 1.53\text{GeV}$ 付近の大きな鋭いピークは $\Xi(1530)$ である。左のスペクトルの $M_{\Xi-\pi^+} = 1.6\text{GeV}$ 付近にあるピークは $\Xi(1620)$ と解釈され、s 波の相対論的 Breit-Wigner 分布の fit により、質量 M_R と崩壊幅 Γ_R が

$$\begin{aligned} M_R &= 1610.4 \pm 6.0(\text{stat.})_{-4.2}^{+6.1}(\text{syst.}) \text{ MeV}, \\ \Gamma_R &= 59.9 \pm 4.8(\text{stat.})_{-7.1}^{+2.8}(\text{syst.}) \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

と得られた。左側のスペクトルの 1.7 GeV 付近にある小さなピークは $\Xi(1690)$ と解釈され、式 (2.2) で示した WA89[15] の質量と崩壊幅で実験データが再現されている。 $\Xi(1620)$ および $\Xi(1690)$ のピークは右の Ξ_c を経由しない崩壊には現れていない。

ここまでは不変質量分布によるスペクトルが主なデータだったが、近年になり、散乱長という形でのデータも得られている。2021 年、ALICE 実験により 1 核子あたりの衝突エネルギーが 2.76 TeV となる Pb-Pb 衝突による ΛK^- 相関関数が観測された [12]。得られた相関関数を Lednický and Lyuboshitz モデルで fit することで $K^- \Lambda$ 散乱長 f_0 並びに有効レンジ d_0 が

$$\text{Re } f_0 = 0.27 \pm 0.12(\text{stat.}) \pm 0.07(\text{syst.}) \text{ fm}, \quad (2.5)$$

$$\text{Im } f_0 = 0.40 \pm 0.11(\text{stat.}) \pm 0.07(\text{syst.}) \text{ fm}, \quad (2.6)$$

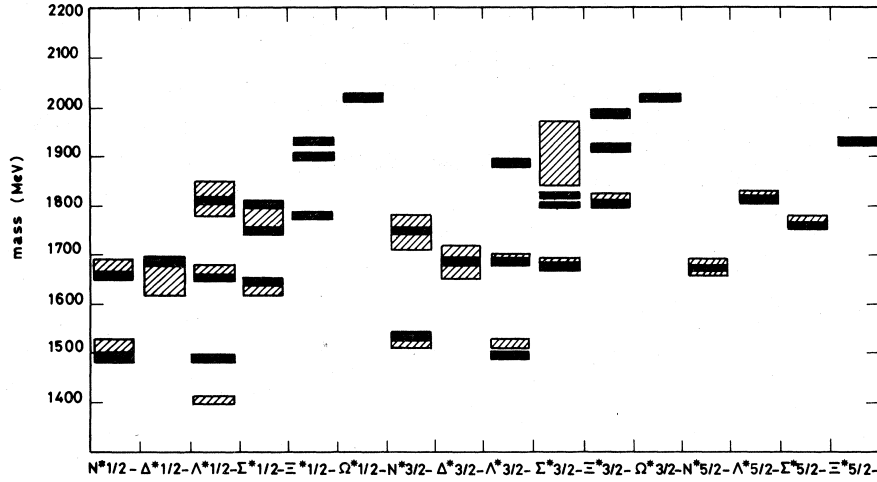


図 2.4 構成子クォーク模型による負パリティを持つバリオン励起状態の質量の予言 [13]。実線が予言値で、斜線部が実験値である。大部分のハドロンではバリオン励起状態のスペクトルが良い精度で再現されていることがわかる。一方で、 $J^P = 1/2^-$ の Ξ 励起状態を見ると、低く見積もっても 1780 MeV 程度と予言されており、近年の測定結果と矛盾していることがわかる。

$$d_0 = -5.23 \pm 2.13(\text{stat.}) \pm 4.80(\text{syst.}) \text{ fm}, \quad (2.7)$$

と得られた。

2.2 理論の現状

前節では、 Ξ 励起状態についての実験での観測が長らく進まなかったことについて触れた。では、 Ξ 励起状態についての理論解析はどのような進展があったのだろうか。理論においても、近年まで $\Xi(1530)$ よりも重い質量を持つ $S = -2$ のバリオンの性質の解析はあまり進んでいなかった。これは前節で説明したように実験データが揃わなかったことも大きいですが、ハドロンを考える上で基本的なクォーク模型では励起スペクトルをうまく説明できないことにも起因している。以下では、最初にクォーク模型を用いた Ξ 励起状態の研究について触れ、他の手法による結果も紹介する。

クォーク 3 つで記述するクォーク模型では励起状態はクォークの内部励起として表現される。実際にクォーク模型を用いた先行研究 [13] では $J^P = 1/2^-$ の Ξ 励起状態は一番軽い質量が 1780 MeV に出るとされている (図 2.4)。少なくとも、通常の 3 クォーク状態のバリオン励起状態であると解釈すると、これまでの実験で示唆された Ξ 励起状態の性

質を満たさないことがわかる。

QCD の第一原理計算である格子 QCD を用いた解析では $J^P = 1/2^\pm, 3/2^\pm$ のスピン・パリティを持つ Ξ について π の質量が 225 MeV 程度での体系的な計算が行われている [26]。この計算では基底状態や $\Xi(1530)$ ははっきりと現れているが、その他の励起状態のシグナルは誤差が大きいためにはっきりと現れていない。

次にカイラル SU(3) 対称性によって構築される動力学的な散乱モデルであるカイラルユニタリー法での Ξ 共鳴状態を考える (4 章を参照)。カイラルユニタリー法の長所としては、カイラル対称性による Weinberg-Tomozawa 項が S 波メソン-バリオン相互作用をモデル非依存な形で与えることがあげられる。しかし、パラメーターとして無次元のカットオフに相当する subtraction constant が導入され、原則として実験データに基づいて決める必要があるが、実験データが十分に得られていない状況では別の方針をとらなければならない。そのため、カイラルユニタリー法を用いた先行研究 [14, 27] では、理論的な考察から subtraction constant を定めている。

2002 年に行われた先行研究 [14] では、物理的に自然なくりこみスケール [28] である $\mu_{reg} = 630$ MeV での subtraction constant(-2) を採用している。subtraction constant とメソン崩壊定数に多少の変化を許容し、複数のモデルでの計算を行った結果、いずれも 1600 MeV 付近に幅の広い共鳴状態が見つかった。全てのチャンネルの subtraction constant を -2 とした Set 1 では、複素エネルギー平面上の $1607 - 140i$ MeV の位置にポールがある。また、ポールの留数の解析から、この共鳴状態は $\pi\Xi$ と $\bar{K}\Lambda$ と強く結合していることも分かった。これらの結果は得られた共鳴が $\Xi(1620)$ であることを示しており、実際に質量に関しては近年の実験データと近い値を示している。また、この先行研究では、s 波相互作用を考慮したため、この共鳴状態が $\Xi(1620)$ であるならば、 $1/2^-$ のスピン・パリティを持つと予想している。

2004 年に行われた先行研究 [27] では、ループ関数の有限部分を指定する $T(\sqrt{s} = \mu) = V(\mu)$ のくりこみ条件を適用し、subtraction constant を決定した。スケール μ は各セクターのバリオンの基底状態の質量から定められた。このスケール μ は、ユニタリー化された振幅がカイラル摂動論の振幅に帰着するエネルギースケールであり、交差対称性から予想される振幅の振る舞いを再現する。この条件のもとで、 Ξ セクターの散乱振幅の $1556 - 123i$ MeV と $1663 - 2i$ MeV の位置に共鳴のポールが発見され、それぞれ $\Xi(1620)$ 、 $\Xi(1690)$ と解釈された。低いエネルギーを持つ共鳴の結合は先行研究 [14] で見つかったものに近い性質を示した一方、高いエネルギーを持つ共鳴は $\Xi(1690)$ の分岐比に従い、 $\pi\Xi$ にはあまり結合していない。

2015 年の先行研究 [16] 節では、 $\Xi(1690)$ について詳細に解析している。2.1 でも触れ

たように、 $\Xi(1690)$ については比較的早期から実験データが集まっており、この段階では PDG にも載せられている信頼度の高い実験データ [15] が既に存在した。実験での観測から、 $\Xi(1690)$ は $\bar{K}\Sigma$ の閾値の近傍に存在することが分かっており、ピークは $\bar{K}\Sigma$ のアイソパートナーである $K^-\Sigma$ および $\bar{K}^0\Sigma^0$ の二つの閾値から影響を受けることが考えられた。そのため、文献 [16] ではアイソスピン対称性を考慮しない物理基底を用いた。subtraction constant の決定は、 $\mu = M_\Lambda, M_\Sigma, M_\Xi$ の質量スケールで $G(\mu) = 0$ とした自然なくりこみの手法 [29] で行われた。また、 Λ_c 崩壊の Belle のデータ [25] に Fit したモデルでは、 $\Xi(1690)$ の極が $\bar{K}\Sigma$ 閾値の近傍にあらわれることが示された。

第 3 章

共鳴状態と散乱振幅

1.2 節でもふれたように、今日までにハドロンは 300 種類程度観測されているが、大半は励起状態であり、励起状態も大部分は不安定な共鳴状態である。そのため、ハドロン分光学においてハドロン散乱中の共鳴状態を扱うことは避けられない。本章では、非相対論的量子力学を用いて、共鳴状態が物理的な散乱の観測量にどのように現れるかについて議論する。

3.1 量子力学での共鳴状態

1.2 節でもふれたように、共鳴状態は高いエネルギーを持った不安定な状態であり、最終的には 2 つ以上の粒子へと崩壊する。伝統的に共鳴は散乱断面積中の散乱エネルギーの関数のピークを基準に定められている。共鳴の質量 M_R と崩壊幅 Γ_R はそれぞれピークの最大値をとるエネルギーと、ピークの半値幅に対応している。具体的な例としては、1.2 節でも触れた Breit-Wigner 振幅があり、共鳴に寄与しないバックグラウンド項を取り除くと散乱振幅 $f_{\text{BW}}(E)$ は

$$f_{\text{BW}}(E) \propto \frac{1}{E - M_R + \frac{i\Gamma_R}{2}}, \quad (3.1)$$

と書ける。式 (3.1) の虚部のピークは $E = M_R$ にあるが、一般的な反応でのスペクトラムのピークは、非共鳴的な寄与や閾値効果に依存しているため、この定義では共鳴を一意的に定めることが難しい。

理論的に良い定義とされる共鳴の描写は散乱振幅のポールに基づく定義であり、散乱振幅のポールは一意的に定まる。実際に PDG のバリオンの部分では共鳴のポール位置をまとめる際に式 (3.1) で表した Breit-Wigner 分布の質量と崩壊幅よりも散乱振幅でのポー

ルを優先して表に載せている。本節では安定な束縛状態と不安定な共鳴状態が外向き境界条件を課すことによって、単一の方法で扱うことができることも示す。3.2節では散乱振幅のポールがハミルトニアン固有状態を生成することを示す。

3.1.1 量子力学での束縛状態

系としては区別できる二つの粒子 (質量 m_1 、 m_2) の量子力学的散乱を考える。系のハミルトニアンは

$$H = H_0 + V \quad (3.2)$$

で与えられる。 H_0 は運動項で、 V はポテンシャルである。空間三次元で非相対論的、スピンやフレーバーといった内部自由度はないものとして考える。散乱は始状態と終状態が同じである弾性散乱であり、回転対称性を持つことからポテンシャル V は球対称ポテンシャルとし、ハドロン間相互作用を考えて、短距離力が働くものとする。 μ は換算質量であり、その定義は

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.3)$$

である。

簡単のために、軌道角運動量 $l = 0$ の s 波相互作用を扱う。物理的な散乱を表すエネルギー領域である $E > 0$ では、運動量 $p = \sqrt{2\mu E}$ は正の実数である。動径シュレディンガー方程式を $p > 0$ の範囲で解くことによって、動径波動関数の散乱解 $\chi_{0,p}(r)$ を得る。この $\chi_{0,p}(r)$ は原点 $r \rightarrow 0$ において $\chi_{0,p}(r) \rightarrow 0$ を満たす。 $r \rightarrow \infty$ での境界条件がないため、任意の $p > 0$ に対応する固有状態と連続スペクトラムを作り出す散乱状態が得られる。ポテンシャルの消える r の大きな点では、波動関数は

$$\chi_{0,p}(r) \rightarrow A^-(p)e^{-ipr} + A^+(p)e^{+ipr} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (3.4)$$

のように平面波の重ね合わせによって与えられる。係数 $A^-(p)$ および $A^+(p)$ はそれぞれ、内向き波および外向き波の振幅を表しており、これらの $A^\pm(p)$ の具体形は与えられたポテンシャルに依存している。例えば、幅 b と深さ $-V_0$ を持つ

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r \leq b \\ 0 & b < r \end{cases} \quad (3.5)$$

のような井戸型のポテンシャルを考えてみよう。このとき、 $A^\pm(p)$ は、

$$A^\pm(p) = \frac{C}{2} \left[\sin(b\sqrt{p^2 + 2\mu V_0}) \mp i \frac{\sqrt{p^2 + 2\mu V_0}}{p} \cos(b\sqrt{p^2 + 2\mu V_0}) \right] e^{\mp ipb}. \quad (3.6)$$

の形で得られる。なお、散乱解は規格化できないので、係数 C は任意に定められる。

一方、束縛状態の固有エネルギーは負で、 $E < 0$ の領域にある。この場合、固有運動量 $p = \sqrt{2\mu E}$ は純虚数となる。Branch cut が入ることから、負のエネルギー E に対応する運動量変数である $p = \sqrt{-2\mu|E|}$ は不定となり、正の E から解析接続する経路を指定しなければならない。束縛状態においてはエネルギー平面の上半面を通る経路を選択する。つまり、固有運動量 p を $p = \sqrt{-2\mu|E| + i0^+} = i\sqrt{2\mu|E|}$ と定義するのと同様である。 $\kappa > 0$ である κ を用いて $p = i\kappa$ と定義すると、動径波動関数の一般解は

$$\chi_{0,i\kappa}(r) \rightarrow A^-(i\kappa)e^{+\kappa r} + A^+(i\kappa)e^{-\kappa r} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (3.7)$$

と書ける。束縛状態の波動関数は遠方 ($r \rightarrow \infty$) で存在確率が 0 となる必要があるため、 r に対して増大する $e^{+\kappa r}$ を取り除く。すなわち

$$A^-(i\kappa) = 0. \quad (3.8)$$

という条件が課される。つまり、 κ が式 (3.8) の条件を満たすときのみ解が得られることから、束縛状態は離散固有状態である。また、束縛状態の波動関数 $\chi_{0,i\kappa}(r)$ は

$$\int_0^\infty dr |\chi_{0,i\kappa}(r)|^2 < \infty \quad (3.9)$$

の様に二乗可積分関数となる。実際に、式 (3.6) の $A^-(p)$ の具体形を用いることにより、井戸型ポテンシャルにおける束縛状態の条件

$$\tan(b\sqrt{-\kappa^2 + 2\mu V_0}) = -\frac{\sqrt{-\kappa^2 + 2\mu V_0}}{\kappa} \quad (3.10)$$

を得ることができる。

3.1.2 量子力学での共鳴状態

ここまでで式 (3.8) のもとで得られる束縛状態の条件について確認した。式 (3.8) は散乱解において実数であった運動量変数 p を純虚数 $i\kappa$ に解析接続し、 $A^-(p) = 0$ 、すなわち遠方で外向き波となる境界条件を課したものとして考えることもできる。

共鳴状態の解についても上記と同様の手法で得られる。共鳴状態は束縛状態において純虚数としていた運動量変数 p を複素エネルギー平面へと解析接続し、境界条件を

$$A^-(p_R) = 0, \quad p_R \in \mathbb{C} \quad (3.11)$$

と課すことで固有運動量 $p = p_R$ を持った共鳴状態が得られる。もし、虚軸から離れた位置に解 p_R を見つけた場合、波動関数 $\chi_{0,p_R}(r)$ は共鳴状態を表す。実際に式 (3.6) の井戸型ポテンシャルの場合、式 (3.11) の条件は複素エネルギー平面上に無限個の共鳴解を与える。運動量 p_R が複素数であった場合、対応するエネルギーも複素数となり、

$$E_R = \frac{p_R^2}{2\mu} \equiv M_R - \frac{i}{2}\Gamma_R \quad (3.12)$$

のようにあらわせる。

ここで時間に依存するシュレディンガー方程式の解となる波動関数 $\psi(t, \mathbf{r})$

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \exp(-iEt)\phi(\mathbf{r}) \quad (3.13)$$

を考える。 $\phi(\mathbf{r})$ は時間に依存しないシュレディンガー方程式の解である。式 (3.12) を $\psi(t, \mathbf{r})$ に代入すると

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \exp(-iM_R t) \exp\left(-\frac{\Gamma_R}{2}t\right) \phi(\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

となることから、この状態の波動関数 $\psi(t)$ の時刻 t での存在確率は

$$\begin{aligned} \int |\psi(t, \mathbf{r})|^2 d^3r &= \int \psi(t, \mathbf{r})^* \psi(t, \mathbf{r}) d^3r \\ &= \exp(iM_R t) \exp\left(-\frac{\Gamma_R}{2}t\right) \exp(-iM_R t) \exp\left(-\frac{\Gamma_R}{2}t\right) \int \phi^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3r \\ &= \exp(-\Gamma_R t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

として表すことができる。ここで波動関数 ϕ は規格化されているとする。式 (3.12) において、 $M_R > 0$ および $\Gamma_R > 0$ であるとき、 M_R は共鳴の質量、 Γ_R は共鳴の崩壊幅として解釈できる。図 3.1 に $\Gamma_R = 3$ および $\Gamma_R = 0.6$ の場合の存在確率 $\exp(-\Gamma_R t)$ を t の関数として示す、図より崩壊幅 Γ_R が大きいほど早く存在確率が 0 に収束する、すなわちより不安定であることがわかる。

通常の量子力学ではハミルトニアンのような物理量を表す演算子はエルミート演算子であり、その固有状態は実数であるが、本節で導出した共鳴状態での固有値 E_R は複素数である。また、共鳴状態における波動関数は式 (3.4) の波動関数に式 (3.11) の条件を課す、つまり $p_R = \text{Re}[p_R] + i\text{Im}[p_R]$ と $A^-(p_R) = 0$ を式 (3.4) に代入することで、

$$\begin{aligned} \chi_{0,p_R}(r) &\rightarrow A^+(p_R) e^{+ip_R r} \\ &= A^+(p_R) e^{i\text{Re}[p_R]r} e^{-\text{Im}[p_R]r} \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.16)$$

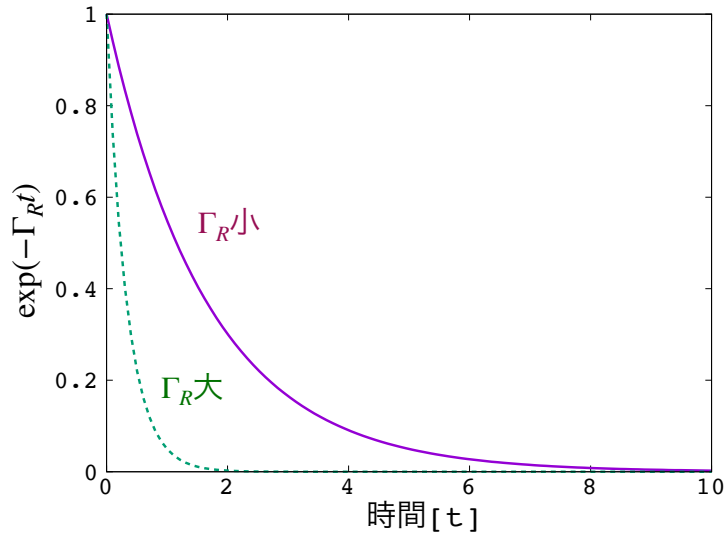


図 3.1 $\Gamma_R = 3$ (点線) のときと $\Gamma_R = 0.6$ (実線) のときの存在確率 $\exp(-\Gamma_R t)$ の比較

の漸近形を持つことが分かる。この波動関数は $\text{Im}[p_R] > 0$ では二乗可積分関数となるため、複素 p 平面の上半面では複素エネルギー解を持たない。本節前半で導出した束縛解での固有エネルギー $E = -\kappa^2/(2\mu)$ は $\text{Im}[p_R] = \kappa > 0$ であることから実数となっている。一方で、 $\text{Im}[p_R] < 0$ では二乗可積分にならず、複素エネルギー解が許される。そのため、共鳴解は $\text{Im}[p_R] < 0$ の領域に存在する。すなわち、共鳴状態の波動関数は式 (3.11) の境界条件を課したものであり、束縛状態と同様に扱うことができる。また、共鳴状態の波動関数は複素エネルギー固有値を持ち、遠方で波動関数が収束しない。

3.2 散乱理論での共鳴状態

本節では 3.1 節でのハミルトニアン固有状態としての共鳴状態に散乱の S 行列と散乱振幅を導入することで、散乱理論における共鳴状態を議論する。

まず、散乱理論における系の定義は 3.1 節と同じとする。散乱の運動学は相対運動量で指定する。始状態の運動量を \mathbf{p} 、終状態の運動量を \mathbf{p}' とする。重心系では粒子 1 の運動量が \mathbf{p} 、粒子 2 の運動量が $-\mathbf{p}$ となる。先述した通り、今回は弾性散乱を考えることから、始状態と終状態の運動量の大きさは不変

$$p \equiv |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|, \quad (3.17)$$

である。散乱過程を特徴づけるパラメーターには散乱角 θ と、散乱エネルギー E (もしくは

は散乱運動量 p) の二種類があり、それぞれ

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{p^2}, \quad (3.18)$$

$$E = \frac{p^2}{2\mu}, \quad (3.19)$$

と定義される。物理的な散乱は $E > 0$ 、 $p > 0$ の範囲で起こり、波動関数は時間非依存なシュレディンガー方程式を解いて得られる。

次に計算で用いる状態ベクトルについて見ていこう。状態ベクトルは運動量表示と角運動量表示の二つがあり、運動量表示は始状態を $|\mathbf{p}\rangle$ 、終状態を $\langle \mathbf{p}'|$ と表し、規格化は

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (3.20)$$

とする。なお、 $|\mathbf{p}'\rangle$ および $|\mathbf{p}\rangle$ はいずれも H_0 の固有状態である。

角運動量表示は始状態を $|E, l, m\rangle$ 、終状態を $\langle E', l', m'|$ と表し、規格化は

$$\langle E', l', m' | E, l, m \rangle = \delta(E' - E) \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \quad (3.21)$$

とする。運動量表示と角運動量表示の関係は

$$\langle \mathbf{p}' | E, l, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \delta(E' - E) Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}), \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad (3.22)$$

で与えられる。なお式中の $Y_l^m(\hat{\mathbf{p}})$ は球面調和関数である。

では、一般の角運動量での遠方での波動関数の漸近形を調べていこう。先述した通り、ここでは短距離力を考えるので、十分な遠方ではポテンシャルは消えると仮定できる。この仮定のもとで、距離 r が十分に大きい場合の動径シュレディンガー方程式は

$$\left[-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] \chi_l(r) = E \chi_l(r), \quad (3.23)$$

と書ける。この方程式 (3.23) の一般の角運動量 l 、運動量 $p = \sqrt{2\mu E} > 0$ での解は

$$\chi_{l,p}(r) \rightarrow A \hat{j}_l(pr) + B \hat{n}_l(pr) = C \hat{h}_l^-(pr) + D \hat{h}_l^+(pr), \quad (3.24)$$

であり、Riccati-Bessel 関数 $\hat{j}_l^-(z)$ と Riccati-Neumann 関数 $\hat{n}_l^-(z)$ の重ね合わせ、もしくは Riccati-Hankel 関数 $\hat{h}_l^\pm(z) = \hat{n}_l(z) \pm i \hat{j}_l(z)$ の重ね合わせで書ける。Riccati-Hankel 関数の漸近形は

$$\hat{h}_l^\pm(z) \rightarrow \exp[\pm i(z - l\pi/2)] \quad (r \rightarrow \infty), \quad (3.25)$$

であるので、 $\hat{h}_l^+(pr \sim e^{ipr})$ は外向きの波に、 $\hat{h}_l^-(pr \sim e^{-ipr})$ は外向きの波に対応する。
始状態から終状態への遷移は散乱演算子 S を用いて表される。

$$S = \Omega_-^\dagger \Omega_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} [e^{iH_0 t} e^{-iHt}] \lim_{t \rightarrow -\infty} [e^{iHt} e^{-iH_0 t}], \quad (3.26)$$

ここでの Ω_\pm は Møller 演算子である。 S 行列要素 $s_l(p) \in \mathbb{C}$ (これを S 行列と呼ぶこともある) は状態ベクトルの角運動量表示を用いて

$$\langle E', l', m' | S | E, l, m \rangle = \delta(E' - E) \delta_{l'l} \delta_{m'm} s_l(E), \quad (3.27)$$

と書けるほか、部分波 l での遠方の波動関数の内向き波の振幅を 1 とした場合の外向き波の振幅として

$$\chi_{l,p}(r) \rightarrow \hat{h}_l^-(pr) - s_l(p) \hat{h}_l^+(pr) \quad (r \rightarrow \infty), \quad (3.28)$$

と定義される。この S 行列は散乱演算子 S のユニタリー性 (確率の保存)

$$S^\dagger S = 1, \quad (3.29)$$

から

$$s_l^*(p) s_l(p) = |s_l(p)|^2 = 1, \quad (3.30)$$

を満たす。そのため、 $s_l(p)$ は絶対値が 1 の複素数である。位相差 $\delta_l(E) \in \mathbb{R}$ を用いて

$$s_l(E) = \exp\{2i\delta_l(E)\}, \quad (3.31)$$

と表される。

Møller 演算子の相関関係 $H\Omega_\pm = \Omega_\pm H^0$ を用いると、 $[H_0, S] = 0$ の交換関係を示すことができる。これは運動量表示の状態ベクトルによって与えられた S 演算子の行列要素がエネルギー保存を満たすことを示唆している。また、式 (3.26) の定義から、散乱演算子 S は相互作用のない場合、 $S = 1$ に帰着する。こうした事実から on-shell T 行列 ($t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \in \mathbb{C}$) は

$$\langle \mathbf{p}' | (S - 1) | \mathbf{p} \rangle = -2\pi i \delta(E' - E) t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}), \quad (3.32)$$

と定義され、相互作用の正味の効果を表す。 $-2\pi i$ の規格化因子は $\langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle$ で与えられる T 行列のボルン近似から定められる。

散乱振幅 $f(E, \theta) \in \mathbb{C}$ は on-shell T 行列から

$$f(E, \theta) = -(2\pi)^2 \mu t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}), \quad (3.33)$$

と定義される。この散乱振幅 $f(E, \theta)$ の定義は散乱波動関数に入射平面波の境界条件を課して

$$\psi_{\mathbf{p}}^+(\mathbf{r}) \propto e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} + f(E, \theta) \frac{e^{ipr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty), \quad (3.34)$$

とする定義と等価である。

散乱振幅の部分波展開は、ルジャンドル多項式 $P_l(\cos \theta)$ を用いて

$$f(E, \theta) = \sum_l (2l + 1) f_l(E) P_l(\cos \theta), \quad (3.35)$$

となり、 l 番目の部分波展開における散乱振幅 $f_l(E)$ と S 行列の関係が

$$f_l(E) = \frac{s_l(E) - 1}{2ip}, \quad (3.36)$$

と得られる。なお、 s_l および f_l は部分波 l ごとに存在する E のみに依る関数である。すなわち、散乱実験での観測量は散乱振幅 $f_l(E)$ もしくは S 行列要素 $s_l(E)$ のいずれかから計算することが可能である。

なお、式 (3.33) の $f(E, \theta)$ は散乱角 θ における外向き波の振幅を表している。よって、散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(E, \theta)|^2, \quad (3.37)$$

と定義される。式 (3.37) より全断面積 $\sigma(E)$ は

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \int d\Omega |f(E, \theta)|^2 \\ &= \sum_l 4\pi(2l + 1) |f_l(E)|^2, \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。なお、二行目への変形は式 (3.35) とルジャンドル多項式の直交性を用いた。式 (3.38) に式 (3.36) を代入すると

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \sum_l 4\pi(2l + 1) |f_l(E)|^2 \\ &= \sum_l \frac{2\pi(2l + 1)}{\mu E} \sin^2 \delta_l(E) \end{aligned} \quad (3.39)$$

となる。(具体的な計算は Appendix に示す。) ここで、部分波 l の断面積 σ_l を

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \sum_l \sigma_l(E) \\ \sigma_l(E) &= \frac{2\pi(2l + 1)}{\mu E} \sin^2 \delta_l(E), \end{aligned} \quad (3.40)$$

と定義する。 $\sin^2 \delta_l(E) \leq 1$ であるので、散乱断面積には上限が存在する。これをユニタリリティ限界と呼び、

$$\sigma_l(E) \leq \frac{2\pi(2l+1)}{\mu E}, \quad (3.41)$$

と表される。等号成立は $\sin \delta_l = \pm 1$ 、すなわち $\delta_l = \pi/2 + n\pi$ (n : 整数) となる。なお、 $E \rightarrow 0$ のとき、 $\sigma_l(E)$ の上限は ∞ となる。これをユニタリー極限と呼ぶ。

一般に離散的な固有値を持つ束縛状態の波動関数を得るためには、動径シュレディンガー方程式の一般解に $r \rightarrow 0$ および $r \rightarrow \infty$ の二つの境界条件を課す。一方の散乱波動関数は連続固有状態となるために $r = 0$ の一点のみ境界条件を定めている。散乱波動関数では $r \rightarrow \infty$ の境界条件を定めていないために二乗可積分関数とならず、一般の規格化条件も適用できない。

ヨスト関数 $\mathcal{J}_l(p)$ を定義するために、動径波動関数の原点での規格化を行う。固有運動量 p を持つ動径波動関数 $\chi_{l,p}(r)$ が原点 $r = 0$ で

$$\chi_{l,p}(r) \rightarrow \hat{j}_l(pr) \quad (r \rightarrow 0), \quad (3.42)$$

と、Riccati-Bessel 関数で表されるように規格化したものを、regular solution と呼ぶ。すなわち、

$$\frac{\chi_{l,p}(r)}{\hat{j}_l(pr)} \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow 0), \quad (3.43)$$

となる。式 (3.42) の条件は原点 $r \rightarrow 0$ で波動関数 $\chi_{l,p}(r)$ が 0 になるという条件に加えて、原点での傾きが制限されているため、 $\chi_{l,p}(r)$ は一意に定まる。波動関数に対する Lippmann-Schwinger 方程式を用いることで、具体的に $\chi_{l,p}(r)$ を構成できる。式 (3.42) の境界条件を課した regular solution の $r \rightarrow \infty$ での漸近形は

$$\chi_{l,p}(r) \rightarrow \frac{i}{2} [\mathcal{J}_l(p) \hat{h}_l^-(pr) - \mathcal{J}_l(-p) \hat{h}_l^+(pr)] \quad (r \rightarrow \infty), \quad (3.44)$$

と Riccati-Hankel 関数の重ね合わせで書ける。内向き波の係数 $\mathcal{J}_l(p)$ は内向き波の振幅であり、ヨスト関数と呼ばれている。ハミルトニアンが固有状態を持つ場合、外向きの境界条件が必要であり、ヨスト関数のゼロ点が外向きの境界条件に対応している。このヨスト関数 $\mathcal{J}_l(p)$ は動径波動関数を用いて、

$$\mathcal{J}_l(p) = 1 + \frac{2\mu}{p} \int_0^\infty dr \hat{h}_l^+(pr) V(r) \chi_{l,p}(r), \quad (3.45)$$

と書ける。外向き波の振幅は式 (3.45) に $-p$ を代入すると得られる。このヨスト関数は本節のように遠方で十分早く消えるポテンシャルに対しては、原点を含む複素 p 平面上で p の解析関数として書くことができる。つまり、 $\mathcal{J}_l(p)$ は特異性を持たない。

p が十分小さいとして、式 (3.45) より $\mathcal{J}_l(p)$ を展開すると、

$$\mathcal{J}_l(p) = 1 + [\alpha_l + \beta_l p^2 + \mathcal{O}(p^4)] + i[\gamma_l p^{2l+1} + \mathcal{O}(p^{2l+3})], \quad \alpha_l, \beta_l, \gamma_l \in \mathbb{R}, \quad (3.46)$$

となる。ヨスト関数の複素共役は式 (3.46) より

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}_l(p)]^* &= \{1 + [\alpha_l + \beta_l p^2 + \mathcal{O}(p^4)] + i[\gamma_l p^{2l+1} + \mathcal{O}(p^{2l+3})]\}^* \\ &= 1 + [\alpha_l + \beta_l (p^*)^2 + \mathcal{O}((p^*)^4)] - i[\gamma_l (p^*)^{2l+1} + \mathcal{O}((p^*)^{2l+3})] \\ &= \mathcal{J}_l(-p^*), \end{aligned} \quad (3.47)$$

となるので、

$$[\mathcal{J}_l(p)]^* = \mathcal{J}_l(-p^*) \quad (3.48)$$

の関係を持つことが分かる。

このヨスト関数は S 行列及び散乱振幅と関係付けることができる。S 行列は入射波 (内向き波) で規格化された散乱波 (外向き波) の振幅、すなわち $\mathcal{J}_l(p)$ に対する $\mathcal{J}_l(-p)$ の比であり、

$$s_l(p) = \frac{\mathcal{J}_l(-p)}{\mathcal{J}_l(p)}, \quad (3.49)$$

となる。またユニタリー性の条件は式 (3.48) を用いて、

$$s_l^*(p)s_l(p) = \frac{[\mathcal{J}_l(-p)]^* \mathcal{J}_l(-p)}{[\mathcal{J}_l(p)]^* \mathcal{J}_l(p)} = \frac{\mathcal{J}_l(p^*) \mathcal{J}_l(-p)}{\mathcal{J}_l(-p^*) \mathcal{J}_l(p)} = 1, \quad (3.50)$$

と確認できる。また、式 (3.36) の S 行列と散乱振幅の関係より

$$f_l(p) = \frac{s_l(E) - 1}{2ip} = \frac{\mathcal{J}_l(-p) - \mathcal{J}_l(p)}{2ip \mathcal{J}_l(p)}, \quad (3.51)$$

と表される。この手法では散乱波動関数の漸近解から散乱観測量を計算できる。ここで、式 (3.44) の s 波の場合の regular solution の漸近形と式 (3.7) の動径波動関数の一般解を比較すると、内向き波の係数 $A^-(p)$ がヨスト関数 $\mathcal{J}_0(p)$ に比例していることが分かる。式 (3.11) の共鳴状態がハミルトニアン固有状態になる境界条件では、内向き波の係数を 0 としていたことから、共鳴状態をハミルトニアン固有状態に持つ場合は

$$\mathcal{J}_l(p_R) = 0 \quad (3.52)$$

となることが分かる。このとき、ヨスト関数 \mathcal{J}_l は共鳴状態の固有運動量 p_R でゼロ点を持ち、式 (3.49) および式 (3.51) よりヨスト関数 \mathcal{J}_l を分母に持つ散乱振幅 $f_l(p)$ および S 行列 $s_l(p)$ は発散し、ポールを持つことが分かる。

なお、散乱振幅 $f_l(p)$ および S 行列 $s_l(p)$ は p の有理型関数であることから、ヨスト関数のゼロ点に当たるポール以外には特異性を持たない。

3.3 リーマンシート

本節では、3.2 節で物理的な領域である $p > 0$ で定義したヨスト関数 $\mathcal{J}_l(p)$, S 行列 $s_l(p)$, 散乱振幅 $f_l(p)$ を複素 p 平面に解析接続する。複素運動量 p 並びに複素エネルギー E の位相 θ_p と θ_E を

$$p = |p|e^{i\theta_p}, \quad E = |E|e^{i\theta_E}, \quad (3.53)$$

と定義する。この複素エネルギー E と複素運動量 p の関係は

$$E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{|p|^2}{2\mu} e^{2i\theta}, \quad (3.54)$$

であるので、

$$|E| = \frac{|p|^2}{2\mu} \quad 2\theta_p = \theta_E, \quad (3.55)$$

の関係が得られる。つまり、 θ_p が $0 \rightarrow 2\pi$ の範囲で変化する時、 θ_E は $0 \rightarrow 4\pi$ の範囲で変化する。そのため、 $p = \theta_p$ と $-p = \theta_p + 2\pi$ は同じ E で写像される。

3.2 節に登場した p の有理関数である散乱振幅 $f_l(p)$ および S 行列要素 $s_l(p)$ は E の二枚のリーマンシート上で定義される。

$0 \leq \theta_E < 2\pi$ E の第 1 リーマンシート (以下、[t] シートと表記) (p の上半面)

$2\pi \leq \theta_E < 4\pi$ E の第 2 リーマンシート (以下、[b] シートと表記) (p の下半面)

なお、散乱振幅 $f_l(p)$ および S 行列要素 $s_l(p)$ がどの p 領域にポールを持つかによって固有状態の解釈が異なる。その区別について次の節で説明する。

3.3.1 固有状態の分類

ハミルトニアン固有状態がヨスト関数 $\mathcal{J}_l(p)$ のゼロ点に対応することを 3.2 節で説明した。式 (3.48) より、 $\mathcal{J}_l(p) = 0$ のとき、

$$\mathcal{J}_l(-p^*) = [\mathcal{J}_l(p)]^* = 0, \quad (3.56)$$

となる。つまり、 p が解であるとき、その複素共役 $-p^*$ も解となる。このとき、 $-p^*$ は複素 p 平面上で虚軸に対して p の対称な点となる。

まず、 $p = -p^*$ となる解を持つ場合について考える。このとき、解は p 平面の虚軸上に存在する。虚軸上に解を持つ場合、束縛状態になることを量子力学的な共鳴状態について触れた 3.1 節で説明したが、ここでは p が二枚の E のリーマンシート上に存在しているために、虚軸上に存在する解 p は p 平面のどの領域に存在するかによって、二通りの物理状態をとりうる。うち片方は束縛状態であるが、もう一つの解は束縛状態ではない状態に対応する。束縛状態ではない物理状態については後ほど議論することにして、まずは束縛状態について考える。

束縛状態になりうる運動量 p_B の条件は

$$\operatorname{Re} [p_B] = 0, \quad \operatorname{Im} [p_B] > 0, \quad (3.57)$$

であり、複素 p 平面の上半面に存在していることが分かる。式 (3.54) の関係から、 p_B に対する E_B は負の実数であることが分かる。また、 $\theta_p = \pi/2$ つまり $\theta_E = \pi$ より E_B は E 平面の [t] シート上に存在する。

次に束縛状態ではない解について考える。この解は束縛状態に対して、anti-bound state と呼ばれているが、ここでは Virtual 状態とする。Virtual 状態を与える運動量 p_V の条件は虚軸上かつ式 (3.57) 以外の値をとることから、

$$\operatorname{Re} [p_V] = 0, \quad \operatorname{Im} [p_V] < 0, \quad (3.58)$$

となり、束縛状態の時と同様に p_V に対する E_V は負の実数である。ただし、 $\theta_p = 3\pi/2$ つまり $\theta_E = 3\pi$ なのでポールは E 平面上の [b] シートに存在しており、散乱振幅のポールの留数（ノルム）は負である。

ここまでは $p = -p^*$ となる解を持つ場合について考えたが、以下では $p \neq -p^*$ の場合を考える。複素 E 平面に拡張すると、式 (3.56) で論じたように、この解は必ず対になって表れる。

波動関数が二乗可積分でない場合のみ、複素 E を解に持つことが許されるため、解は複素 p 平面の下半面のみ存在する。複素 E を持つことから、対になった解のうち運動量 p_R が

$$\operatorname{Re} [p_R] >, \quad \operatorname{Im} [p_R] < 0, \quad (3.59)$$

となる解を考える。複素 p 平面の下半面にあることから、この解は複素 E 平面の [b] シートにあらわれ、式 (3.54) より $3\pi < \theta_E < 4\pi$ となることから、 $\operatorname{Im} E_R < 0$ となる。

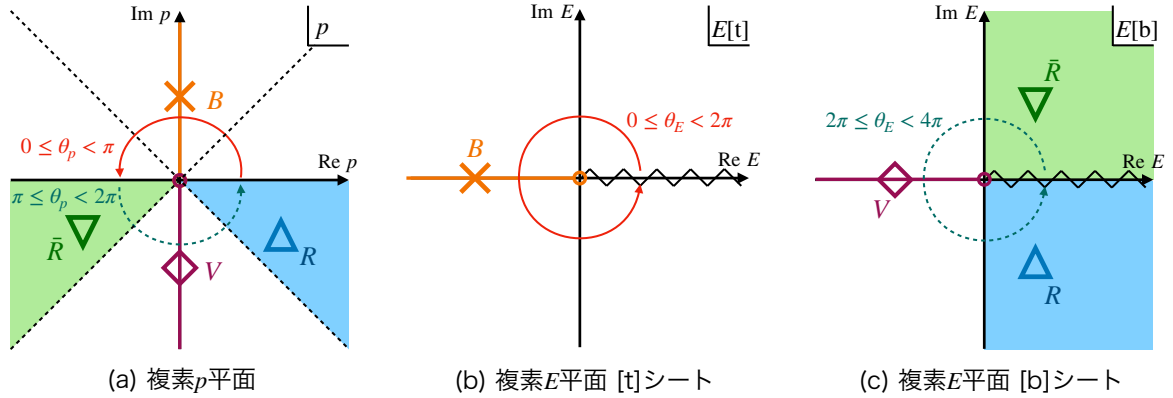


図 3.2 複素 p 平面および複素 E 平面 ([t] 及び [b] シート) 上の極。図中の B 、 V 、 R 、 \bar{R} はそれぞれ束縛状態、Virtual 状態、共鳴状態、Anti-resonance を表している。

対になる解の運動量を運動量 $p_{\bar{R}} = -p_R^*$ と定義する。運動量 $p_{\bar{R}}$ の存在範囲は

$$\text{Re} [p_{\bar{R}}] < 0, \quad \text{Im} [p_{\bar{R}}] < 0, \quad (3.60)$$

である。複素 E 平面 [b] シート上において、

$$E_{\bar{R}} = \frac{(p_{\bar{R}})^2}{2\mu} = \frac{(-p_R^*)^2}{2\mu} = \frac{(p_R^*)^2}{2\mu} = \frac{(p_R^2)^*}{2\mu} = E_R^*, \quad (3.61)$$

E_R 及び $E_{\bar{R}}$ は実軸に対して対称である。

物理的な領域が複素 p 平面の実軸上の正の領域にあることから、複素 E 平面の [t] シートの $E + i0^+$ 及び複素 E 平面の [b] シートの $E - i0^-$ が物理的な領域に対応している。そのため、 E_R のうち、物理的な散乱に直接影響を与える $\text{Re} E_R > 0$ の範囲にあるものを共鳴状態と呼ぶ。そして、対になった \bar{R} を Anti-resonance と呼ぶ。そのため、 $M_R > 0$ かつ $\Gamma_R > 0$ とした場合に共鳴極が $E_R = M_R - i\Gamma_R/2$ と書けることに対応しているほか、式 (3.15) より Anti-resonance は $\text{Im} E > 0$ であるため、波動関数が時間と共に増大することがわかる。

3.4 共鳴状態と観測量

3.2 節および 3.3 節では散乱理論における共鳴状態とその扱いについて議論し、複素 p 平面もしくは複素 E 平面におけるポールとしてあらわれることを確認した。しかし、実

験で観測できるのは実エネルギーのみである。では、散乱理論において複素 E 平面にあらわれる共鳴極は実験においてどのように観測されるのだろうか。

実験で観測できる実エネルギーは複素 E 平面上の実軸に対応しており、実験で観測される共鳴状態のスペクトルは、部分波 l にある $E = E_R = M_R - i\Gamma_R/2$ の共鳴極が実軸に対して影響を与えることによると解釈できる。散乱振幅 f_l を $E = E_R$ の周りでローラン展開すると、

$$f_l(E) = f_{l,BW}(E) + f_{l,BG}(E) \quad (3.62)$$

と書ける。このうち、 $f_{l,BW}(E)$ は共鳴極の寄与を表しており、簡単な形式は式 (1.4) に示している。その具体形は

$$f_{l,BW}(E) = \frac{Z_R}{E - E_R} = \frac{Z_R(E - M_R - i\Gamma_R/2)}{(E - M_R)^2 + \Gamma_R/4}, \quad Z_R = -\frac{\Gamma_R}{2p_R}, \quad (3.63)$$

である。一方の $f_{l,BG}(E)$ は非共鳴散乱であり、共鳴に直接依らない散乱振幅である。この $f_{l,BG}(E)$ は $E = E_R$ で解析的になり、具体形は

$$f_{l,BG}(E) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (E - E_R)^n, \quad (3.64)$$

である。

共鳴の質量 M_R に近い実エネルギーにおいては、 $f_{l,BW}(E)$ の寄与が大きくなり、ピークとしてあらわれる。特に Γ_R が狭いとより広くあらわれる。特に非共鳴散乱振幅 $f_{l,BG}(E)$ が小さく、無視できると仮定すると、散乱振幅 $f_l(E)$ は

$$f_l(E) \sim f_{l,BW}(E) \quad (3.65)$$

と近似できる。この近似のもとで $f_{l,BG}(E)$ を無視した場合の実エネルギーで観測される共鳴状態にはいくつかの特徴がある。

まず、 $E = M_R$ で散乱振幅の実部 $\text{Re}[f_l(E)]$ が 0 になり、 $\text{Im}[f_l(E)]$ が極大になるという特徴を持つ。

次に散乱断面積 $\sigma_l(E)$ が $E = M_R$ でピークを持つという特徴がある。これは光学定理

$$\text{Im}f(E, \theta = 0) = \frac{p}{4\pi} \sigma(E) \quad (3.66)$$

と $E = M_R$ で散乱振幅の実部 $\text{Re}[f_l(E)]$ が 0 になり、 $\text{Im}[f_l(E)]$ が極大になるという特徴によるものである。

位相差 $\delta_l(E)$ が急速に増加し $E = M_R$ で

非共鳴散乱振幅 $f_{l,BG}(E)$ が無視できない場合は

$$|f_l(E)|^2 = |f_{l,BW}(E)|^2 + |f_{l,BG}(E)|^2 + 2\text{Re}[f_{l,BW}(E)f_{l,BG}^*(E)] \quad (3.67)$$

での干渉項 $2\text{Re}[f_{l,BW}(E)f_{l,BG}^*(E)]$ による影響が考えられる。

こうした事情から、高エネルギー実験でのハドロンの観測では、Breit-Wigner 分布が多用されているが、実際にはカuspや triangle singularity など共鳴極の物理的な影響によらず、運動学的にピークが生成されることがある。そのため、単にスペクトルにおけるピークを fit するだけでなく、精密な解析での共鳴極の決定が重要である。

3.5 有効レンジ展開

散乱振幅 $f_l(p)$ での低エネルギーの性質は式 (3.36) を用いて

$$\begin{aligned} f_l(E) &= \frac{s_l(E) - 1}{2ip} \\ &= \frac{p^{2l}}{p^{2l+1} \cot \delta_l(p) - ip^{2l+1}}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

と書ける。また、ヨスト関数 $\mathcal{J}_l(p)$ についても式 (3.46) で示した p が小さい時の展開をもとに p^2 の関数として

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_l(p) &= 1 + [\alpha_l + \beta_l p^2 + \mathcal{O}(p^4)] + i[\gamma_l p^{2l+1} + \mathcal{O}(p^{2l+3})] \\ &= F_l(p^2) + ipG_l(p^2), \end{aligned} \quad (3.69)$$

を定めると

$$F_l(p^2) = \mathcal{O}(p^0), \quad G_l(p^2) = \mathcal{O}(p^{2l}), \quad (3.70)$$

と書き換えられる。このとき、外向き波に対応するヨスト関数は

$$\mathcal{J}_l(-p) = F_l(p^2) - ipG_l(p^2), \quad (3.71)$$

である。式 (3.51) のヨスト関数 $\mathcal{J}_l(p)$ と散乱振幅 $f_l(p)$ の関係から、

$$\begin{aligned} f_l(p) &= \frac{\mathcal{J}_l(-p) - \mathcal{J}_l(p)}{2ip \mathcal{J}_l(p)} \\ &= \frac{p^{2l}}{-p^{2l} F_l(p^2)/G_l(p^2) - ip^{2l+1}}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

と散乱振幅 $f_l(p)$ を書くことができる。ここで、式 (3.70) と式 (3.72) の右辺を比較すると分母の第一項を除いて全く同じであることから、

$$p^{2l+1} \cot \delta_l(p) = -p^{2l} \frac{F_l(p^2)}{G_l(p^2)} \quad (3.73)$$

の関係が得られる。この式の右辺は p^2 の関数で $p \rightarrow 0$ のとき $\mathcal{O}(p^0)$ とふるまう。つまり、テイラー展開を行うと、

$$p^{2l+1} \cot \delta_l(p) = -\frac{1}{a_l} + \frac{r_l}{2} p^2 + \mathcal{O}(p^4), \quad (3.74)$$

となる。これは有効レンジ展開と呼ばれている。式 (3.74) を (3.70) に代入すると散乱振幅 $f_l(p)$ は

$$f_l(p) = \frac{p^{2l}}{-\frac{1}{a_l} + \frac{r_l}{2} p^2 + \mathcal{O}(p^4) - ip^{2l+1}}, \quad (3.75)$$

と書ける。

最後に有効レンジ展開の具体形を見ていこう。3.2 節で考えていた軌道角運動量 $l = 0$ の s 波相互作用の場合の有効レンジ展開は

$$f(p) = \frac{1}{-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2} p^2 + \mathcal{O}(p^4) - ip}, \quad (3.76)$$

と書くことができる。 s 波の場合、式 (3.76) 中の a_0 は散乱長、 r_e が有効レンジである。なお、本論文では、 s 波の場合は起動角運動量 l の記載を省略する。また、低エネルギー散乱をした場合、 p が小さくなるために p の高次項が効かないとして、

$$f(p) \simeq \frac{1}{-\frac{1}{a_0} - ip}, \quad (3.77)$$

の形に近似することが可能である。式 (3.77) の散乱振幅はポールを

$$p = \frac{i}{a_0}, \quad (3.78)$$

の位置に持つ。なお、 $a_0 > 0$ の場合は複素 p 平面の上半面に極を持つことから束縛状態となり、 $a_0 < 0$ の場合は複素 p 平面の下半面に極を持つので Virtual 状態になる (3.3.1 節参照)。

最後に散乱長の定義について一度整理しておく。一般に散乱長と呼ばれるものは式 (3.76) で定義された a_0 である

$$a_0 = -f(p = 0) \quad (3.79)$$

を用いるが ALICE 実験での femtscopy での散乱長 f_0 は $f_0 = -a_0$ であり、

$$f_0 = f(p = 0) \quad (3.80)$$

となっていることに注意すること。

3.6 散乱長を用いたポール位置の導出

前節までは、散乱振幅に共鳴状態が存在する場合、複素平面上にポールが現れること、共鳴状態ならば [b] シート上にポールが出現し、実軸上の散乱振幅にポールの影響が及ぶことで、実エネルギーでのピークとなって観測されることをそれぞれ説明してきた。しかし、実際のハドロン散乱には 1.4 節に示したようにチャンネル結合が存在するため、これまで説明してきた 1 チャンネル散乱を拡張して考える必要がある。また、チャンネル結合散乱では実軸上の散乱振幅が閾値で強いカusp構造を持ち、複素平面上のポールが物理的な散乱に直接影響を及ぼす位置に存在しない場合もある。

一般にチャンネル結合散乱の場合、各チャンネルごとに与えられたエネルギーに対応する運動量が決まり、3.3 節と同様に運動量とエネルギーの関係から、各結合チャンネルにリーマンシートは 2 枚ずつ ([t],[b]) 存在することがわかる。 n 個の結合チャンネルを持つ場合はリーマンシートの枚数は 2^n となり、リーマンシートを閾値エネルギーの低いチャンネルから順に [bbtt...] と表記する。以下では、散乱長とポールの関係を与える (3.78) 式が 2 チャンネル結合の場合に固有状態の性質がどのように分類できるかについて議論する。

2 チャンネル結合散乱では二つの閾値エネルギーが存在するが、本節では高い閾値エネルギーを持つ結合チャンネル付近に存在する固有状態について考える。具体例として、 $\pi\Xi$ と $\bar{K}\Lambda$ の二つの結合チャンネルと、 $\bar{K}\Lambda$ 近傍に存在する $\Xi(1620)$ を念頭におく。チャンネル結合の場合に散乱振幅のポールがどのリーマンシートに存在するかによって、3.3 節と同様に固有状態を分類する。固有状態の分類に向けて、以下では 2 チャンネル結合でのリーマンシートについて整理する。二つの結合チャンネルでそれぞれ 2 枚ずつリーマンシートを選ぶことからリーマンシートは [tt], [tb], [bt], [bb] の 4 通り存在する。

1 チャンネルの場合の散乱における固有状態の分類を示した 3.3.1 節を振り返ると、物理的な散乱は実数かつ正の運動量 p で起こっていることがわかる。これを複素エネルギー平面で考えると、物理的な散乱はエネルギーの虚部が負の [b] シート及びエネルギーの虚部が正の [t] シートに挟まれた領域に存在している。そのため物理的な散乱に最も近いリーマンシートは、複素エネルギー平面の上半面では全てのチャンネルで [t] シートであ

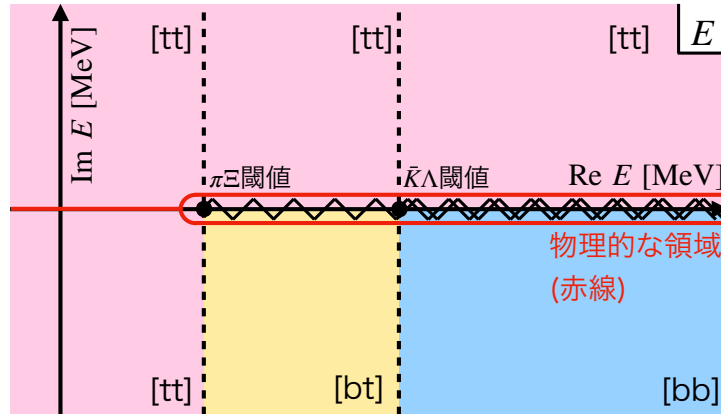


図 3.3 複素 E 平面上における 2 チャンネル結合の場合に物理的に直接影響のあるリーマンシート。赤線は物理的なエネルギー領域を表す。

り、下半面ではエネルギーの実部で閾値が開いているチャンネルで $[b]$ シート、閉じているチャンネルで $[t]$ シートとなる。これを以下では「物理的に直接影響のあるリーマンシート (Physically relevant Riemann sheet)」と呼ぶ。2 チャンネル結合の場合の物理的に直接影響のあるリーマンシートを図 3.3 に示す。

図 3.3 でポールが存在できるのは、 πE の閾値エネルギーより低いエネルギーでの実軸上と、 πE の閾値エネルギーより高いエネルギーでの複素エネルギー平面の下半面である。 πE の閾値エネルギーより下のエネルギーで実軸上に現れるポールが束縛状態を表し、 πE の閾値エネルギーより上のエネルギーでの複素エネルギー平面の下半面に現れるポールが共鳴状態を表す。ここでは、 πE の閾値エネルギーと $\bar{K}\Lambda$ の閾値エネルギーの間に存在するポールは、 $\bar{K}\Lambda$ の 1 チャンネル散乱として考えた場合に束縛状態であったポールが、 πE との結合により崩壊幅を持った状態と考えられるため、準束縛状態 (Quasibound-state, QB) と呼ぶ。準束縛状態は πE 散乱で考えると、閾値エネルギーよりも高いエネルギーを持っていることから、共鳴状態としても解釈できる。

準束縛状態 (QB) は $[bt]$ シート上に存在しており、 $[bb]$ シート上に存在する共鳴状態 (R) とは異なるリーマンシート上にあることがわかる。閾値近傍に存在するポールであっても、エネルギー実部と閾値エネルギーの関係によってリーマンシートが異なることから、 QB と R は連続的に繋げることができない。以下では、準束縛状態と共鳴状態がどのように遷移するかについて議論する。

図 3.4 に、 $\bar{K}\Lambda$ の閾値エネルギーを原点とした複素エネルギー平面における各リーマンシートを示す。2 チャンネル散乱であることから $[tt]$, $[tb]$, $[bt]$, $[bb]$ の 4 枚が存在する。

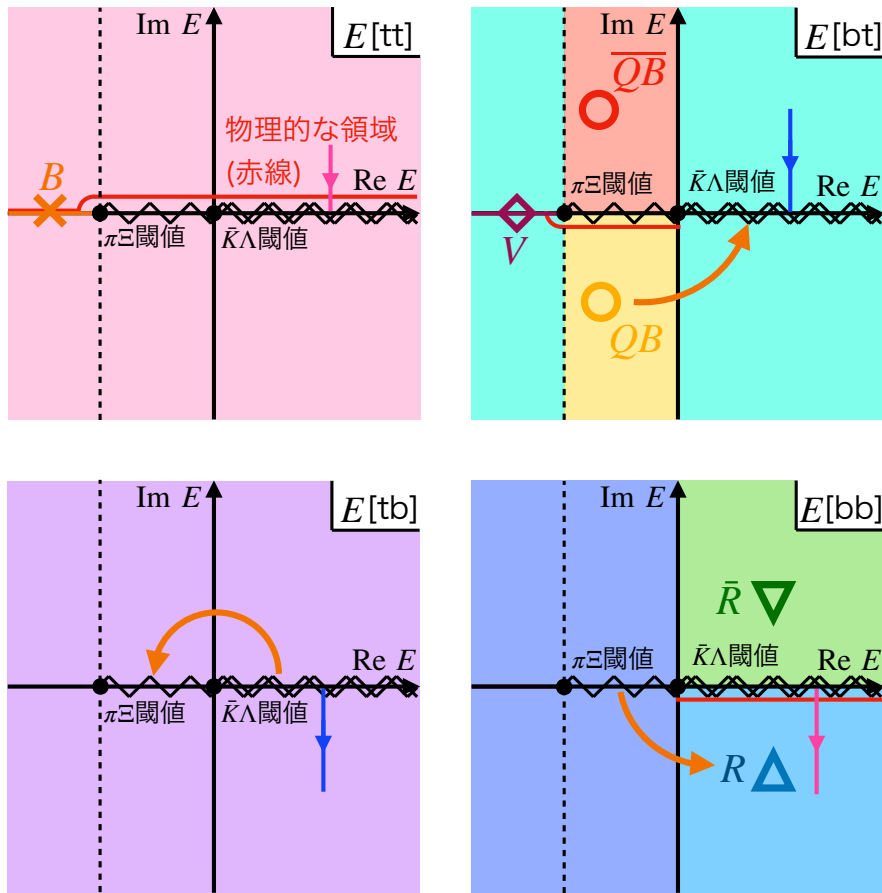


図 3.4 複素 p 平面上における 2 チャンネル結合の場合のリーマンシートと固有状態の存在範囲。赤線は物理的なエネルギー領域を表す。

物理的な散乱はカットの上側 ($E + i0^+$) では $\pi\Xi$ の閾値より上で [tt] シートを通っており、カットの下側 ($E - i0^+$) では $\pi\Xi$ の閾値と $\bar{K}\Lambda$ の閾値の間で [bt] シートを、 $\bar{K}\Lambda$ の閾値より上では [bb] シートを通る。

続いて固有状態の分類を行う。図 3.4 と同様に束縛状態 (B) は $\pi\Xi$ の閾値エネルギーよりも低い、複素エネルギー平面の [tt] シート実軸上に存在する。共鳴状態 (R) は $\bar{K}\Lambda$ の閾値よりも高いエネルギーをもつ [bb] シートの下半面に存在しており、準束縛状態 (QB) は $\pi\Xi$ の閾値エネルギーと $\bar{K}\Lambda$ の閾値エネルギーに挟まれたエネルギー領域の [bt] シート下半面に現れる。共鳴状態 (R) 及び準束縛状態 (QB) についてはそれぞれシュバルツの反転定理から実軸対称な位置の上半面にもう一つのポールが現れる。共鳴状態について実軸対称に現れるポールを反共鳴状態 (\bar{R}) と呼び、準束縛状態 (QB) に対して対称な

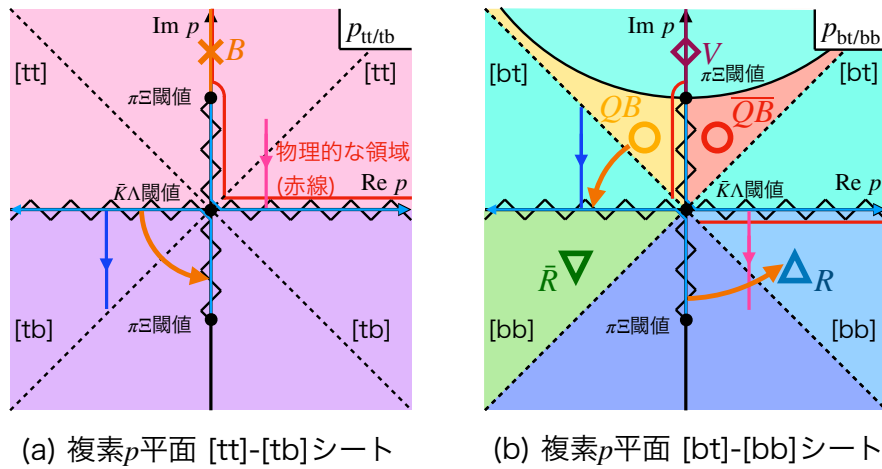


図 3.5 複素 p 平面上における 2 チャンネル結合の場合のリーマンシートと固有状態の存在範囲。赤線は物理的なエネルギー領域を表す。青矢印はカットの入る方向を表している。

ポールを反準束縛状態 (\overline{QB}) と呼ぶ。virtual 状態は $\pi\Sigma$ 閾値より下の [bt] シート実軸上にあるものを指す。 QB と \overline{QB} および R と \overline{R} はいずれも実軸対称であることから、実軸から等距離に存在しているが、物理的な散乱は図 2 に示すようにカットの下側を通ることから、複素エネルギー平面の下半面に存在する QB 及び R が散乱に直接影響を与えることがわかる。

ポールの遷移をより見やすくするために、 $\overline{K}\Lambda$ の運動量 p の複素平面での関係について見ていく。 $\overline{K}\Lambda$ の複素運動量平面では、 $\overline{K}\Lambda$ のリーマンシート [t], [b] を上半面、下半面でそれぞれ表すことができるが、もう一つの結合チャンネルである $\pi\Sigma$ のリーマンシートについては平面中の位置では指定できない。そのため、 $\pi\Sigma$ のリーマンシート [t], [b] を指定するために、2 枚の $\overline{K}\Lambda$ の複素運動量平面を用意する必要がある。

図 3.5 に 2 枚の $\overline{K}\Lambda$ の複素運動量平面を示す。ここでは、(a) で $\pi\Sigma$ のリーマンシートを [t] シートに、(b) で $\pi\Sigma$ を [b] シートに固定する。運動量とエネルギーの関係は $p = \pm\sqrt{2\mu E}$ であり、 $\pi\Sigma$ の閾値は $\overline{K}\Lambda$ を基準としたエネルギーでは負の値を持っていることから、 $\pi\Sigma$ の閾値エネルギーを $E = -\Delta$ とすると $p = \pm i\sqrt{2\mu\Delta}$ と純虚数の運動量が対応する。そのため、 $\overline{K}\Lambda$ の運動量平面では $\pi\Sigma$ の閾値エネルギーに対応する運動量が虚軸上に二つ存在することとなる。

複素エネルギー平面で見たように、閾値より上の実エネルギーにはカットが走っている。図 3.5 の複素運動量平面上でも $\pi\Sigma$ 閾値から原点を通過して、実軸の無限遠までカット

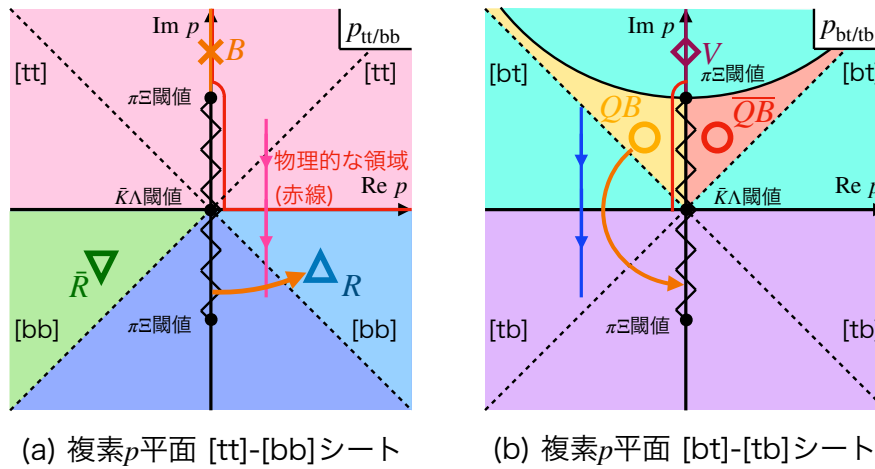


図 3.6 複素 p 平面上における 2 チャンネル結合の場合のリーマンシートと固有状態の存在範囲。赤線は物理的なエネルギー領域を表す。

が走っている。図 3.5(a) では上半面が [tt], 下半面が [tb] シートであり、(b) では上半面が [bt], 下半面が [bb] シートとなっている。よって (a) を複素 $p_{tt/tb}$ 平面、(b) を複素 $p_{bt/bb}$ 平面と呼ぶ。図 3.5(a) の実軸上のカットは [tt] シートと [tb] シートが直接繋がっていないことをあらわしている (図 3.3, 図 3.4 参照)。同様に (b) のカットで仕切られている [bt] シートと [bb] シートも繋がっていない。

図 3.5 ではカットが縦横の両方向に走っていることから、ポールの遷移が連続的に表現されていない。そのため、(a), (b) の下半面を入れ替えた複素運動量平面を図 3.6 に示す。複素 $p_{tt/bb}$ 平面は上半面が [tt], 下半面が [bb] であり、 $p_{bt/tb}$ が上半面が [bt], 下半面が [tb] である。このとき、連続的に繋がる面である [tt], [bb] が上下に連なったことで実軸上のカットがなくなっている。そのため、虚軸上の有限区間のみにはカットがあることから、ポールの遷移を連続的に表現できる。

先の複素エネルギー平面上で分類された固有状態が複素運動量平面上でどのように現れるかについて確認する。まず [bt] シート上に存在する QB (準束縛状態) 及び \overline{QB} (反準束縛状態) は図 3.6 の $p_{bt/tb}$ の上半面に存在することがわかる。ここで、複素運動量 p と、複素エネルギー E の位相をそれぞれ

$$p = |p|e^{i\theta_p}, \quad E = |E|e^{i\theta_E}, \quad (3.81)$$

と定義すると、式 (3.55) より

$$2\theta_p = \theta_E, \quad (3.82)$$

の関係が得られる。図 3.4 の複素エネルギー平面の [bt] シートに注目すると、 QB の持つエネルギーの位相 θ_E の範囲は $\pi \leq \theta_E \leq 3/2\pi$ である。式 (3.82) より対応する運動量の位相は

$$QB: \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta_p \leq \frac{3}{4}\pi \quad [\text{bt}], \quad (3.83)$$

である。また、 QB は $\pi\Xi$ の閾値エネルギーより高いエネルギーを持っているので、その条件も課す必要がある。図 3.4 の $\pi\Xi$ の閾値エネルギーを $-\Delta$ と定義すると、

$$-\Delta \leq \text{Re } E, \quad (3.84)$$

と表される。これを複素運動量 p の条件で表したいので、実部 γ と虚部 κ を用いて $p = \gamma + i\kappa$ と定義すると、 $E = p^2/2\mu$ と式 (3.84) より

$$-\Delta \leq \text{Re} \frac{p^2}{2\mu} = \frac{\gamma^2 - \kappa^2}{2\mu}, \quad (3.85)$$

と表せる。この式は

$$-\sqrt{\gamma^2 + 2\mu\Delta} \leq \kappa \leq \sqrt{\gamma^2 + 2\mu\Delta}, \quad (3.86)$$

とも表せるため、 QB の存在できる領域は $p_{\text{bt}/\text{bb}}$ 平面で (3.83) を満たしかつ双曲線 $\kappa = \sqrt{\gamma^2 + 2\mu\Delta}$ より下の図 3.6(b) に示す領域になる。 \overline{QB} は QB の虚軸対称であるため、図 3.6(b) に示す通りになる。

共鳴状態 R は複素エネルギー平面の [bb] シート上に存在することから、 $p_{\text{tt}/\text{bb}}$ の下半面に存在する。 $\bar{R}\Lambda$ の閾値エネルギーより高いエネルギーの領域の下反面に存在する。そのため、複素エネルギーの位相で表すと、

$$\frac{7}{2}\pi \leq \theta_E \leq 4\pi, \quad (3.87)$$

となる。運動量の位相で表すと、

$$R: \quad \frac{7}{4}\pi \leq \theta_p \leq 2\pi \quad [\text{bb}], \quad (3.88)$$

となる。同様に反共鳴状態 (\bar{R}) は

$$\bar{R}: \quad \pi \leq \theta_p \leq \frac{5}{4}\pi \quad [\text{bb}], \quad (3.89)$$

となる。

準束縛状態と共鳴状態が連続的に遷移する場合にポールがどのような軌跡を描くかを図 3.6 で考える。まず、 R と QB は異なるシート $p_{tt/bb}$ および $p_{bt/tb}$ に存在していることから、遷移するためには 1 回カットを超える必要がある。 QB の位置から上半面でカットを越えたとすると、 $[tt]$ シートに幅を持つポールが現れることとなり、波動関数の二乗可積分性からこれは許されない。そうすると、カットを超えるのは $p_{bt/tb}$ の下半面のみ可能で、 QB と R をつなぐ軌跡が図 3.6 に示されるように $p_{bt/tb}$ シートの上半面 ($[bt]$ シート) から下半面 ($[tb]$ シート) に向かい、カットを越えて、 $p_{tt/bb}$ シートの下半面 ($[bb]$ シート) で共鳴状態 R に達することが期待される。これを複素エネルギー平面で描くと、図 3.4 に示すように $[bt] \rightarrow [tb] \rightarrow [bb]$ とシートを変えながら、 $\bar{K}\Lambda$ 閾値の周りを一周回る経路になる。以上より、 QB が R に遷移するためには $[tb]$ シートを經由する必要があることがわかる。

次にポールがあらわす固有状態の性質と散乱長の関係を考える。高いエネルギーを持つ結合チャンネルの弾性散乱振幅は式 (3.76) と同様に有効レンジ展開を行うことができ、散乱長 a_0 が定義される。ただし、1 チャンネル散乱の際 a_0 は実数であるが、閾値よりも低いエネルギー領域のチャンネルとの結合がある場合は a_0 は複素数となる。

$\bar{K}\Lambda$ 散乱長 a_0 の絶対値が十分に大きい場合、散乱振幅は閾値近傍で式 (3.77) と近似することができ、このときのポールの位置は $f(p)$ を発散させる複素運動量 p である

$$p = \frac{i}{a_0}, \quad (3.78)$$

で与えられる。 p は $\bar{K}\Lambda$ の運動量であるため、対応するエネルギー E は

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2\mu} \\ &= \frac{-1}{2\mu a_0^2}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

となる。 μ は $\bar{K}\Lambda$ の換算質量である。質量エネルギーを含む形で表す場合は

$$W = \frac{-1}{2\mu a_0^2} + m_{\bar{K}} + M_{\Lambda}, \quad (3.91)$$

とすれば良い。式 (3.91) のエネルギーは散乱長 a_0 から予測されるポール位置として解釈できる。複素散乱長と物理状態の分類を関係付けるために、複素数である a_0 の位相を

$$a_0 = |a_0|e^{i\theta_{a_0}}, \quad (3.92)$$

と定義する。式 (3.78) より位相の関係は

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{i}{p} \\
 \implies |a_0| e^{i\theta_a} &= e^{i\pi/2} e^{-i\theta_p} \frac{1}{|p|} \\
 \implies \theta_a &= \frac{\pi}{2} - \theta_p,
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

と表される。式 (3.83) および式 (3.88) の関係から散乱長の位相の範囲は

$$\begin{aligned}
 QB : \frac{7\pi}{4} &\leq \theta_a \leq 2\pi, \\
 R : \frac{\pi}{2} &\leq \theta_a \leq \frac{3\pi}{4},
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

となる。つまり、散乱振幅が準束縛状態 (QB) を持つ時、散乱長は実部が正、虚部が負かつ絶対値が実部より小さくなり、共鳴状態 (R) を持つ時は散乱長は実部は負、虚部が正となり、実部の絶対値が虚部よりも小さくなることがわかる:

$$\begin{aligned}
 QB : \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Im} a < 0, \quad |\operatorname{Im} a| < \operatorname{Re} a, \\
 R : \operatorname{Re} a < 0, \quad \operatorname{Im} a > 0, \quad |\operatorname{Re} a| < \operatorname{Im} a.
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

散乱長の位相が $3\pi/4 \leq \theta_a \leq 7\pi/4$ に入っている場合は、物理的に直接影響のあるリーマンシートにはポールがない場合に対応する。この位相を持つ散乱長では、散乱振幅が閾値エネルギーで顕著なカスプを持つことが期待される。

散乱長の位相とポールが存在するリーマンシートの関係は

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{2} &\leq \theta_a \leq \pi : [\text{bb}], \\
 \pi &\leq \theta_a \leq \frac{3}{2}\pi : [\text{tb}], \\
 \frac{3\pi}{2} &\leq \theta_a \leq 2\pi : [\text{bt}],
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

となる。散乱長の実部、虚部の符号で表すと、

$$\begin{aligned}
 [\text{bb}] \operatorname{Re} a < 0, \quad \operatorname{Im} a > 0, \\
 [\text{tb}] \operatorname{Re} a < 0, \quad \operatorname{Im} a < 0, \\
 [\text{bt}] \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Im} a < 0,
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

となる。

最後に有効レンジまで考えた場合のポールの位置について考える。式 (3.76) の高次項である $\mathcal{O}(p^4)$ を無視し、

$$f(p) = \frac{1}{-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}p^2 - ip}, \quad (3.98)$$

が発散する運動量 p がポールに対応する。つまり、

$$-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}p^2 - ip = 0, \quad (3.99)$$

を p について解けばよい。二次方程式の解の公式から

$$\begin{aligned} p &= \frac{i \pm \sqrt{(-i)^2 - 4 \times \frac{r_e}{2} \times \left(\frac{-1}{a_0}\right)}}{r_e} \\ &= \frac{i \pm \sqrt{-1 + \frac{2r_e}{a_0}}}{r_e}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

となり、エネルギーで表すと換算質量 μ を用いて

$$E = \frac{p^2}{2\mu}, \quad (3.101)$$

と書ける。

第 4 章

カイラルユニタリー模型

本章では Ξ 共鳴をメソン・バリオン散乱によって動的に生成するカイラルユニタリー模型を紹介する。4.1 節では、カイラルユニタリー模型の概要について記し [30]、4.4 節では、実エネルギーでの散乱振幅について定式化を行う。4.5 節では、極を探索するために散乱振幅の複素エネルギー平面への解析接続を行なう。カイラルユニタリー模型を用いた $\Xi(1620)$ 及び $\Xi(1690)$ の理論解析は 4.7 節にまとめる。

4.1 カイラルユニタリー模型とは

低エネルギー QCD はカイラル対称性の破れとカラーの閉じ込めによって、ハドロンの複雑な動力学と、様々なハドロンを含む豊富なスペクトルを示している。カイラル対称性の自発的破れによって、軽い擬スカラーメソンとしての NG ボソンが出現し、ハドロンは質量を獲得する。これらの静的な性質に加えて、NG ボソンの動力学は低エネルギー定理によってカイラル対称性で制限される。例えば、NG ボソンと標的のハドロンの散乱長はワインバーグ友沢定理 [31, 32] によって符号と強度まで定められる。この定理は $\pi\pi$ 、 πN チャンネルでは実験結果とよく一致している。ハドロンの動力学と NG ボソンは、系統的な power counting 手法を伴ったカイラル摂動論によって簡潔にまとめられている。カイラル摂動論では展開の LO(Leading Order) の結果が、正しく低エネルギー定理を再現している。まとめると、カイラル摂動論はメソン・バリオン散乱振幅の低エネルギー極限を記述する。

一方で、物理的な散乱振幅は系の時間発展における確率の保存から従う S 行列のユニタリー性を満足しなければならない。非摂動的な散乱方程式はユニタリー条件を満たすが、摂動計算を行うと、ユニタリー条件が破られる。例えば、カイラル摂動論における散乱振

幅は NG ボソンのエネルギーのべきで展開されるので、エネルギーの増加に伴い、散乱振幅は短調増加し、あるエネルギースケールで最終的に散乱断面積のユニタリティー上限 (式 (3.41)) を破る。これは低エネルギーでの散乱振幅の振る舞いを記述するにあたっては問題がないが、共鳴を明白な自由度として取り入れられない限り、摂動計算でハドロン共鳴を扱うことができない。よって、高エネルギー領域への摂動散乱振幅のナイーブな外挿は正当化されない。ユニタリー性と非摂動的な動力学の重要性は強いハドロン間相互作用がはたらくと考えられている $\bar{K}N$ - $\pi\Sigma$ 系で指摘されていた [33]。低エネルギーカイラル相互作用を共鳴のエネルギー領域に拡張するために、何らかのユニタリー化する手法と相互作用をつなげる必要がある。

このように、低エネルギー NG ボソン動力学におけるカイラル対称性と、散乱振幅のユニタリー性はハドロンの散乱振幅を構築するための重要な基本原理である。カイラル摂動論とユニタリー条件をつなげる試みはメソン散乱セクターでの inverse amplitude method [34, 35, 36] を、バリオンセクターでは Lippmann-Schwinger 方程式 [37, 38] を用いることによって始められた。最近のバリオン共鳴の解析の発展は N/D 法に基づいた枠組み [28] によっている。カイラルユニタリー法はハドロン散乱の実験データをよく再現することが示されている。以下ではこのカイラルユニタリー法を具体的に説明する。

4.2 QCD におけるカイラル対称性の自発的破れ

強い相互作用は基本場の粒子としてクォークをもち、ゲージ場の粒子としてグルーオンを持つカラー SU(3) ゲージ理論である QCD によって記述される。 u 、 d 、 s の 3 つのフレーバーを持つ QCD のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \bar{q}(i\not{D} - m_q)q, \quad (4.1)$$

と与えられ、場の強さテンソル $G_{\mu\nu}^a$ と共変微分 D_μ は

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (4.2)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a T^a, \quad \not{D} = \gamma^\mu D_\mu, \quad (4.3)$$

である。式 (4.1) 中の q はクォーク場で、 A_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) はグルーオン場である。 T^a はカラー SU(3) 群の生成元で Gell-Mann 行列 λ^a を用いて

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2}, \quad (4.4)$$

と書ける。 g はゲージ結合定数である。クォーク場 q はフレーバー空間内の 3 成分 (u, d, s) を用いて、カラー空間内の 3 成分ベクトルとして書くことができる。

なお、式 (4.1) のラグランジアン \mathcal{L}_{QCD} はいくつかの対称性を持っており、厳密な対称性としては時空に関するローレンツ対称性とゲージ変換に対するカラー SU(3) 対称性がある。また、 \mathcal{L}_{QCD} は粒子と反粒子の入れ替えにあたる荷電共役 C 、空間反転にあたるパリティ変換 P 、時間の向きを反転させる時間反転 T のそれぞれの離散的変換に対して不変である。上記の厳密な対称性の他にも \mathcal{L}_{QCD} は近似的な対称性を持っており、カイラル対称性、フレーバー対称性、ヘビークォーク対称性がある。以下ではこのうちのカイラル対称性に着目する。

カイラル対称性は質量のないディラック粒子の右巻き成分と左巻き成分に関する対称性であり、ディラック場 q は右巻き成分 q_R と左巻き成分 q_L に

$$q = q_L + q_R, \quad q_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} q, \quad q_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} q, \quad (4.5)$$

のように分解できる。式 (4.5) を用いると (4.1) で示される \mathcal{L}_{QCD} のクォーク部分は

$$\begin{aligned} \bar{q}(i\not{D} - m_q)q &= (\bar{q}_L + \bar{q}_R)(i\not{D} - m_q)(q_L + q_R) \\ &= \bar{q}_R i\not{D} q_R + \bar{q}_L i\not{D} q_L - (\bar{q}_L m_q q_R + \bar{q}_R m_q q_L), \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。計算は Appendix に示す。運動項にあたる $\bar{q}\not{D}q$ は右巻きと左向きの成分の和に分離できているが、質量項 $\bar{q}m_q q$ は右巻きと左巻きが混在している。

もし、質量 m が十分に小さく、質量項 $\bar{q}m_q q$ を無視できた場合、 q_L および q_R は互いに独立であり、ラグランジアンは左巻きおよび右巻きクォーク場に対するユニタリー変換のもとで不変である。この場合、 N_f フレーバーの QCD は $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ のグローバル対称性を持つ。

N_f フレーバーのカイラル対称性は q_L と q_R のそれぞれに独立に作用するユニタリー変換

$$q_R \rightarrow R q_R, \quad R = e^{i\theta_R^i T^i} \in U(N_f)_R \quad i = 0, \dots, N_f^2 - 1, \quad (4.7)$$

$$q_L \rightarrow L q_L, \quad R = e^{i\theta_L^i T^i} \in U(N_f)_L, \quad (4.8)$$

として定義される。 R, L はフレーバー空間での $N_f \times N_f$ ユニタリー行列であり、右巻き、左巻き成分を独立に回転する。実数のパラメーター θ_R^i および θ_L^i は回転変換の角度を表す。

右巻き、左巻きの変換からベクトル変換 $(R, L) = (V, V)$ と軸性ベクトル変換 $(R, L) =$

(A, A^\dagger) は

$$q_R \rightarrow V q_R, \quad q_L \rightarrow V q_L, \quad V = e^{i\theta_V^i T^i} \in U(N_f)_V, \quad (4.9)$$

$$q_R \rightarrow A q_R, \quad q_L \rightarrow A^\dagger q_L, \quad A = e^{i\theta_A^i T^i} \in U(N_f)_A, \quad (4.10)$$

と定義される。すなわち、ベクトル変換は右巻きと左巻きクォークの同じ角度での回転に、軸性ベクトル変換は逆向きでの回転に対応する。また、一般にユニタリー群が $U(N) = U(1) \otimes SU(N)$ と分解できることを用いると、 N_f フレーバーのカイラル対称性 $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ は

$$U(N_f)_R \times U(N_f)_L = U(1)_V \otimes U(1)_A \otimes SU(N_f)_R \otimes SU(N_f)_L, \quad (4.11)$$

と表記することができる。このうち $U(1)_A$ 対称性は量子効果による軸性アノマリーによって破れるが、式 (4.6) の運動項はそれ以外のカイラル変換に対して不変である。一方で $U(1)_V$ 対称性は式 (4.6) の質量項でも不変であることから、QCD には厳密な $U(1)_V$ 対称性があり、強い相互作用におけるクォーク数保存という形で表れている。これらの $U(1)$ 対称性を持つ部分群を取り除いた

$$SU(N_f)_R \otimes SU(N_f)_L, \quad (4.12)$$

を QCD でのカイラル対称性と呼び、これは N_f 個のクォーク質量が小さい場合に近似的に成立する。

このカイラル対称性は低エネルギーの真空中で自発的に破れていることが知られている。クォーク凝縮は $q\bar{q}$ 演算子の QCD 真空による期待値であるが、低エネルギーでは

$$\langle 0|q\bar{q}|0\rangle \neq 0, \quad (4.13)$$

と、有限の値を持つ。また、 $q\bar{q}$ は

$$\langle 0|q\bar{q}|0\rangle = \langle 0|\bar{q}_R q_L + \bar{q}_L q_R|0\rangle, \quad (4.14)$$

と右巻きと左巻きのクォークが混在することにより、一般的なカイラル対称性である $SU(N_f)_R \otimes SU(N_f)_L$ 対称性の下で不変ではない。一方で、右巻きと左巻きクォーク場を同時に同じ方向へと回す変換である $SU(N_f)_V = \{(e^{i\theta_V^i T^i}, e^{i\theta_V^i T^i})\}$ の対称性の元では不変量である。この $SU(N_f)_V$ 対称性はフレーバー対称性と呼ばれる。このようにクォーク凝縮が真空期待値を持つことで

$$SU(N_f)_R \otimes SU(N_f)_L \rightarrow SU(N_f)_V, \quad (4.15)$$

で表されるカイラル対称性の自発的破れを導く。

また、破れた対称性に付随する生成子ごとに無質量のボソンが現れる。これらは南部ゴールドストーンボソン (NG ボソン) と呼ばれており、カイラル対称性の自発的破れの重要な帰結の一つである。フレーバー数 N_f のカイラル対称性の場合、自発的に破れる軸性ベクトル変換の生成子の数に対応する $N_f^2 - 1$ 個の NG ボソンがあらわれ、2 フレーバーの場合は $2^2 - 1 = 3$ 個の NG ボソン (π^-, π^0, π^+) が、3 フレーバーの場合は $3^2 - 1 = 8$ 個の NG ボソン ($\pi^-, \pi^0, \pi^+, K^-, \bar{K}^0, K^0, K^+, \eta$) が存在する。

4.3 カイラル摂動論と低エネルギーメソン-バリオン相互作用

本節では運動量空間における s 波メソン・バリオン相互作用についてカイラル摂動論に基づいて議論する。 u, d, s の 3 フレーバーが存在する場合、チャンネル添え字 i で分類される複数のメソンバリオンチャンネルが散乱に関与することになる。チャンネル i から j への散乱振幅は重心系でのメソン・バリオンの全エネルギー W と、散乱の立体角 Ω 、チャンネル i でのバリオンのスピン σ を用いて $V_{ij}(W, \Omega, \sigma_i, \sigma_j)$ と表すことができる。なお、スピンのない NG ボソンとスピン 1/2 のバリオンの散乱を扱うことから、角度依存性はなく、スピン反転過程は偏極を考慮しない散乱には寄与しない。よって、 s 波相互作用は

$$V_{ij}(W) = \frac{1}{8\pi} \sum_{\sigma} \int d\Omega V_{ij}(W, \Omega, \sigma_i, \sigma_j), \quad (4.16)$$

のように、単に重心系でのメソン・バリオンの全エネルギー W のみに依存する。

メソン・バリオン系のカイラル摂動論では、 $n = 1$ が最低次の項となり、メソン・バリオン相互作用は、

$$V_{ij} = V_{ij}^{\text{WT}} + V_{ij}^{\text{s}} + V_{ij}^{\text{u}} + V_{ij}^{\text{NLO}} + \mathcal{O}(p^3), \quad (4.17)$$

と展開される。このうち、 $\mathcal{O}(p^2)$ の項までの相互作用は、それぞれ図 4.1 に示す 4 つのダイアグラムに対応する。式 (4.17) の摂動項のうち、 s 波相互作用で最も支配的な項は V_{WT} で与えられる Weinberg-Tomozawa 項であり、これはメソンとバリオンの 4 点接触相互作用である。本節では s 波相互作用で最も支配的な Weinberg-Tomozawa 相互作用 V_{WT} に着目する。

カイラル摂動論では、NG ボソン場 Φ は行列形式で

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

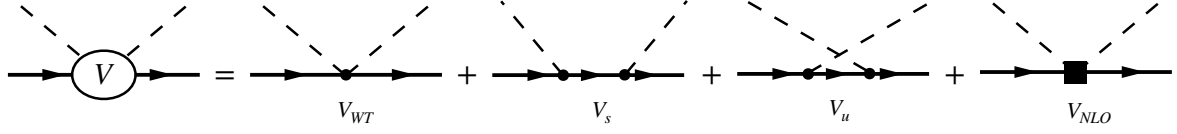


図 4.1 カイラル摂動論での相互作用 V を表現するファインマン図。ここでは $\mathcal{O}(p^2)$ までのオーダーのものを表している。

と書ける。また、式 (4.18) を用いてカイラル場は

$$U(\Phi) = \exp \left\{ \frac{i\sqrt{2}\Phi}{f} \right\}, \quad u(\Phi) = \exp \left\{ \frac{i\Phi}{\sqrt{2}f} \right\}, \quad U(\Phi) = u^2(\Phi) \quad (4.19)$$

と定義される。なお、式 (4.19) 中の f はメソン崩壊定数で、メソンの弱崩壊から決定される。8 重項バリオン場は

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

と定義される。

カイラル摂動論の最低次のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_1^{MB} = \text{Tr} \left(\bar{B}(i\not{D} - M_0)B + \frac{D}{2}(\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5\{u_\mu, B\}) + \frac{F}{2}(\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5[u_\mu, B]) \right) \quad (4.21)$$

と書ける。式 (4.21) のメソン場 Φ の共変微分項のべきを展開することによって、

$$\mathcal{L}^{\text{WT}} = \frac{1}{4f^2} \text{Tr}(\bar{B}i\gamma^\mu[\Phi\partial_\mu\Phi - (\partial_\mu\Phi)\Phi], B) \quad (4.22)$$

のメソンバリオン 4 点バーテックスを得る。この項から得られる tree-level の散乱振幅は

$$V_{ij}^{\text{WT}}(W) = -\frac{C_{ij}}{4f_i f_j} \sqrt{\frac{M_i + E_i}{2M_i}} \sqrt{\frac{M_j + E_j}{2M_j}} \\ \times (\chi^{\sigma_i})^T \left[2W - M_i - M_j + (2W + M_i + M_j) \frac{\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j + i(\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j) \cdot \boldsymbol{\sigma}}{(M_i + E_i)(M_j + E_j)} \right] \chi^{\sigma_j}, \quad (4.23)$$

と与えられる。チャンネル i のバリオンの運動量を \mathbf{q}_i 、質量を M_i 、エネルギーを E_i と表し、チャンネル i のバリオンの二成分系スピノルを χ^{σ_i} と表す。非相対論近似の高次項

を落とすと Weinberg-Tomozawa 相互作用は

$$V_{ij}^{WT}(W) = -\frac{C_{ij}}{4f_i f_j} (2W - M_i - M_j) \sqrt{\frac{M_i + E_i}{2M_i}} \sqrt{\frac{M_j + E_j}{2M_j}}, \quad (4.24)$$

と書ける。係数 C_{ij} はこのチャンネルにかかる相互作用の符号と大きさを表すものであり、フレーバー対称性のみで決まる群論的係数である。SU(2) の場合は標的ハドロンのアイソスピンを I_T 、 π を組み合わせた全系のアイソスピンを I_α として

$$C = -[I_\alpha(I_\alpha + 1) - I_T(I_T + 1) - 2], \quad (4.25)$$

で与えられる。SU(3) の場合はやや複雑な表式となる ([30] 参照)。

Weinberg-Tomozawa 相互作用の重要な特徴としては、全エネルギー W にのみ依存していることである。このエネルギー依存性は s 波相互作用を議論する上で重要な性質である。

4.4 散乱理論における非摂動散乱振幅

本節では、散乱方程式に基づいて非摂動的な散乱振幅を構築する。量子力学ではあるポテンシャル V が与えられると、Lippmann-Schwinger 方程式を解くことで、散乱振幅を得ることができる。カイラルユニタリー法ではカイラル摂動論で得られる二体相互作用を散乱方程式のポテンシャルとみなす。同じ量子数を持つメソンバリオンチャンネル間の遷移を考慮するために、チャンネル空間で張られる行列方程式である結合チャンネル散乱方程式を考える。

以下では非相対論的振幅と、部分波展開を行った後の s 波 ($l = 0$) の S 行列について考える。エネルギー E の関数である二対散乱振幅 t に対応する Lippmann-Schwinger 方程式は演算子形式で

$$t(E) = v + vg(E)t(E), \quad (4.26)$$

と表せる。ここでの v はポテンシャルで、 g は二体散乱自由グリーン関数である。式 (4.26) を図式的に表すと、図 4.2 のようになる。式 (4.26) の右辺の全てを演算子 t に代入する作業を繰り返し行っていく、逐次代入を行うと、散乱振幅は

$$t = v + vgv + vgvgv + \dots, \quad (4.27)$$

と図 4.2 に表すように v と g の無限次までの和の形で表せる。式 (4.26) の解は多重散乱の非摂動和を含むため、束縛状態及び共鳴状態を動的に生成することができる。

チャンネル i の散乱状態を on-shell 三次元運動量 $k_i = \sqrt{2\mu_i(E - E_i^0)}$ によって分類する。 μ_i はチャンネル i の換算質量になる。散乱状態 $|k_i\rangle$ と中間状態の完全系を入れることによって式 (4.26) の行列要素を取ると、散乱振幅の積分方程式

$$\langle k_i | t(E) | k_j \rangle = \langle k_i | v | k_j \rangle + \sum_k \int d^3 q_k \frac{\langle k_i | v | q_k \rangle \langle q_k | t(E) | k_j \rangle}{E - E_{q_k} + i\epsilon}, \quad (4.28)$$

を得る。なお、 $E_{q_k} = q_k^2/2\mu_k + E_k^0$ である。ここでは、中間状態の運動量 E_q は off-shell になることに注意すること。 t 行列要素 T_{ij} 、相互作用カーネル V_{ij} とエネルギー分母 \tilde{G}_k は

$$T_{ij}(E; k_i, k_j) = \langle k_i | t(E) | k_j \rangle, \quad V_{ij}(k_i, k_j) = \langle k_i | v | k_j \rangle, \quad \tilde{G}_k(E; q_k) = \frac{1}{E - E_{q_k} + i\epsilon}, \quad (4.29)$$

として定義すると、式 (4.28) から散乱方程式は

$$T_{ij}(E; k_i, k_j) = V_{ij}(k_i, k_j) + \sum_k \int d^3 q_k V_{ik}(k_i, k_k) \tilde{G}_k(E; q_k) T_{kj}(E; k_k, k_j), \quad (4.30)$$

と書くことができる。これは散乱振幅 $T_{ij}(E; k_i, k_j)$ の積分方程式である。しかしながら、ある特定の状況では扱いやすい代数方程式に帰着する。簡単のために、 $V_{ij}(k_i, k_j)$ が運動量に依存しない定数であるとして考えると、式 (4.26) の因数 V_{ij} は q_k 積分の外側へ出すことができる。また、式 (4.27) の展開形式で T_{kj} が外線の運動量に依存しないことを示しており、式 (4.26) の q_k 積分はエネルギー分母多項式 \tilde{G}_k にのみ作用することがわかる。

よって、運動量積分を分離して行うことができることから

$$T_{ij}(E) = V_{ij} + \sum_k V_{ik} G_k(E) T_{kj}(E), \quad G_k = \int d^3 q_k \tilde{G}(E; q_k), \quad (4.31)$$

を得る。この方程式の解は

$$T(W) = (V^{-1} - G)^{-1}, \quad (4.32)$$

と行列形式で書ける。同様の因子化の手法がカイラルユニタリー法においても開発されているので、以下に示す。

ここまでの流れをメソン-バリオン散乱に適用するために、式 (4.24) の tree-level カイラル振幅を全体エネルギー W の関数である相互作用カーネル V_{ij} であるとみなす。さらに、軽い NG ボソンの動力学を説明するためには相対論的運動学が必要となる。よって、

重心系の全エネルギーを W と示し、

$$\begin{aligned}
E &\rightarrow W, \quad V_{ij}(k_i, k_j) \rightarrow V_{ij}(W; k_i, k_j), \\
\tilde{G}_k(E; q_k) &\rightarrow \tilde{G}_k(W; q_k) = \frac{2M_k}{(P-q)^2 - M_k^2 + i0^+} \frac{1}{q^2 - m_k^2 + i0^+}, \\
\int d^3 q_k &\rightarrow i \int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4},
\end{aligned} \tag{4.33}$$

と置き換える。ここでの M_k 及び m_k はチャンネル k のバリオンおよびメソンの質量であり、重心系の全運動量は $P^\mu = (W, \mathbf{0})$ である。なお、運動量変数 q_k^μ はここでは 4 元運動量であり、バリオンプロパゲーターの空間成分についてはないものとする。式 (4.33) で置き換えた相対論的な散乱方程式を書くと

$$T_{ij}(W; k_i, k_j) = V_{ij}(W; k_i, k_j) + \sum_k i \int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4} V_{ik}(W; k_i, k_k) \tilde{G}_k(W; q_k) T_{kj}(W; k_k, k_j), \tag{4.34}$$

となる。ここでは始状態および終状態の運動量はそれぞれ k_i, k_j であり、いずれも on-shell である。一方で中間体状態の運動量 q_k は off-shell である。この中間体状態の off-shell 運動量は T が q_k 積分の外に出ることを防いでいる。

ここでは論文 [38] に従って on-shell factorization を考える。メソンに働く相互作用カーネル V の on-shell 部分は $q_j^2 = m_j^2$ を満たすので off-shell 部分は $(q_j^2 - m_j^2)$ に比例する。従って相互作用カーネルは

$$V_{ij}(W; k_i, q_j) = V_{ij}^{on}(W; k_i, q_k^2 = m_k^2) + \beta_{ij}(q_j^2 - m_j^2), \tag{4.35}$$

のように on-shell 部分である V_{ij}^{on} と係数部分である β_{ij} に分解できる。このうち β_{ij} は off-shell 部分の寄与の大きさを司る係数である。運動量積分に代入すると、

$$\begin{aligned}
&i \int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4} V_{ik}(W; k_i, k_k) \frac{2M_k}{(P-q)^2 - M_k^2 + i0^+} \frac{1}{q^2 - m_k^2 + i0^+} \\
&= V_{ij}^{on}(W; k_i, q_k^2 = m_k^2) i \int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4} \frac{2M_k}{(P-q)^2 - M_k^2 + i0^+} \frac{1}{q^2 - m_k^2 + i0^+} \\
&+ i\beta_{ij} \int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m_k^2 + i0^+},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

となる。右辺の第一項は相互作用カーネルの on-shell 部分であり、第二項はバリオンの tad pole に対応する。つまり、相互作用カーネルに存在する off-shell 部分はメソンプロパゲーターを縮約する。同様の手法では、バリオンの off-shell 部分はバリオンプロパゲーター

ターに縮約し、メソンの tad pole ダイアグラムを導く。これらの tad pole の寄与は摂動項のメソン-バリオン頂点のくりこみに吸収できる。

この手法では、相互作用カーネル V_{ij} の off-shell 部分を取り除くことで、on-shell での V_{ij} 計算できる。ループ関数を

$$G_k(W) = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2M_k}{(P - q_k)^2 - M_k^2 + i0^+} \frac{1}{q_k^2 - m_k^2 + i0^+}, \quad (4.37)$$

と定義すると、散乱方程式は最終的に

$$T_{ij}(W) = V_{ij}(W) + \sum_k V_{ik}(W) G_k(W) T_{kj}(W), \quad (4.38)$$

と表せる。これは on-shell 運動量 k_i が全エネルギー W の関数となっているため W のみの関数である。これは代数的な方程式であり、その解はカーネル V_{ij} のエネルギー依存性を用いて式 (4.32) のように表せる。式 (4.37) のループ関数の積分は対数的に発散するので、何らかのくりこみの手法が必要である。基本的な対称性を破らない次元正則化を適用すると、ループ関数の有限部分は

$$\begin{aligned} G_k(W) \rightarrow G_k(W; a_k(\mu)) &= \frac{2M_k}{16\pi^2} \left[a_k(\mu_{reg}) + \ln \frac{m_k M_k}{\mu_{reg}^2} + \frac{M_k^2 - m_k^2}{2W^2} \ln \frac{M_k^2}{m_k^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^{1/2}}{2W^2} \left\{ \ln(W^2 - m_k^2 + M_k^2 + \lambda^{1/2}) + \ln(W^2 + m_k^2 - M_k^2 + \lambda^{1/2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln(-W^2 + m_k^2 - M_k^2 + \lambda^{1/2}) - \ln(-W^2 - m_k^2 + M_k^2 + \lambda^{1/2}) \right\} \right], \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\lambda^{1/2} = \sqrt{W^4 + m_k^4 + M_k^4 - 2W^2 m_k^2 - 2m_k^2 M_k^2 - 2M_k^2 W^2}, \quad (4.40)$$

と書ける。ここで $P_\mu = (W, \mathbf{0})$ は重心系での全運動量、 μ_{reg} はくりこみスケール、 $a_i(\mu_{reg})$ は subtraction constant となっている。式 (4.39) の $G(W; a_i(\mu))$ は全エネルギー W と subtraction constant $a_k(\mu)$ の関数となり、このうち $a_k(\mu)$ はくりこみスケール μ におけるループ関数の有限部分を定める。

各チャンネルごとに一つのくりこみパラメーターが存在し、subtraction constant の変化は $a_k(\mu') - a_k(\mu) = 2 \ln(\mu'/\mu)$ として、くりこみスケールの変化に吸収される。よって、4.3 節で導出した Weinberg-Tomozawa 相互作用を用いたカイラルユニタリー法では、各チャンネルに存在する $a_k(\mu)$ が唯一のフリーパラメーターとなる。この subtraction constant は実験データとのフィットによく用いられるが、その選定は共鳴の起源と深く結びつく [29]。

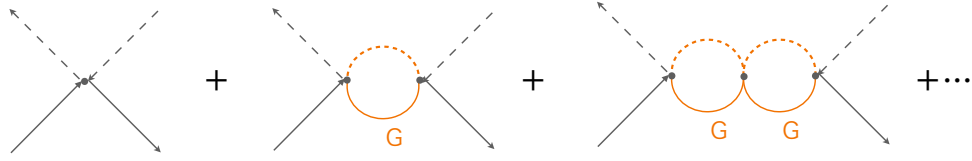


図 4.2 無限次までの足し合わせのファインマンダイアグラム

4.5 複素エネルギーへの解析接続

4.4 節ではカイラル摂動論で得られる二体相互作用をポテンシャルとして、Lippmann-Schwinger 方程式に導入して解くことにより、カイラルユニタリー法での散乱振幅が得られることを示した。一方で、量子力学での共鳴状態から議論をはじめ、散乱理論を導入した散乱振幅では、共鳴状態が存在する場合は複素平面上にポールが存在し、複素エネルギー E と複素運動量 p の関係から、リーマンシートを考慮する必要があることを 3.3 節で議論した。つまり、共鳴状態の散乱振幅を計算するには複素エネルギー平面への解析接続が必須である。

本節ではカイラルユニタリー法における複素エネルギー平面への解析接続についての議論を行う。なお、リーマンシートの定義は 3.3 節と同様とし、複素エネルギー平面の第 1 リーマン面を [t] シート、第 2 リーマン面を [b] シートとする。

カイラルユニタリー法における散乱振幅は式 (4.38) の Lippmann-Schwinger 方程式を解くことで得られ、式 (4.32) の形で得られる。ただし、この解である T は式 (3.51) の散乱振幅 F

$$T(W) = (V^{-1} - G)^{-1}, \quad (4.32)$$

$$F_{ij}(W) = -\frac{\sqrt{M_i M_j}}{4\pi W} T_{ij}(W), \quad (4.41)$$

と関係している。よって、カイラルユニタリー法の散乱振幅は式 (4.24) に示した相互作用カーネル V と、式 (4.37) で示したループ関数で書けることが分かる。散乱振幅に寄与する二つの式のうち、ループ関数 G は式 (4.37) からわかるようにメソンおよびバリオンプロパゲーターのループで発散する。閾値より上の領域ではこの発散を避けるべく、エネルギーを W から $W + i0^+$ もしくは $W - i0^+$ のいずれかに置き換える。これは発散を避ける向きに対応しており、通常のループ関数ではエネルギーを $W + i0^+$ と置き換えた $G(W) = G(W + i0^+)$ で定義されており、この $G(W + i0^+)$ を複素数に解析接続した

ループ関数は [t] シートで定義された $G_I(W)$ となる。

また、ループ関数 G は閾値前後で不連続となっている。ここで、次元正則化を行ったループ関数 (式 (4.39) および式 (4.40)) を見てみよう。このうち式 (4.40) は実数のエネルギー W に対して、 $W < M + m$ では実数になり、 $W > M + m$ では複素数になることから、微分不連続性が存在する。そこで閾値で微分が連続となるように [b] シートを定義して再度解析接続を行う。

では、ループ関数の虚部はどのように表れるのだろうか。ここで

$$q(W) = \frac{[\lambda(W)]^{1/2}}{2W}, \quad (4.42)$$

を定義し、Cutkosky rule を導入する。ループ図の非連続性はカットで切れるプロパゲーターを

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i0^+} \rightarrow -(2\pi i)\delta(q^2 - m^2), \quad (4.43)$$

と on-shell 条件を課す δ 関数を導入することで得られる。非連続性 (disc) は虚部と

$$\text{Disc } G(W) = 2i\text{Im } G(W) \quad (4.44)$$

$$\text{Im } G(W) = -\frac{i}{2}\text{Disc } G(W), \quad (4.45)$$

の関係を持つので、Cutkosky rule を式 (4.37) に適用すると

$$\begin{aligned} \text{Im } G(W) &= -\frac{i}{2} \left[i \int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4} [-(2\pi i)\delta((P - q)^2 - M^2)] [-(2\pi i)\delta(q^2 - M^2)] \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta((P - q)^2 - M^2)(2\pi)\delta(q^2 - M^2), \end{aligned} \quad (4.46)$$

ここで

$$1 = \int d^4 k \delta^4(P - q - k) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(P - q - k), \quad (4.47)$$

を利用すると、バリオンの運動量を K に書き直すことができ、

$$\begin{aligned} \text{Im } G(W) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(P - q - k) (2\pi)\delta((P - q)^2 - M^2) (2\pi)\delta(q^2 - m^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(P - q - k) (2\pi)\delta(k^2 - M^2) (2\pi)\delta(q^2 - m^2), \end{aligned} \quad (4.48)$$

となる。 $\delta(k^2 - M^2)$ および $\delta(q^2 - m^2)$ はバリオン、メソンが on-shell であるという条件なので、

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(q^2 - M^2) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q}, \quad (4.49)$$

を用いると、

$$\text{Im } G(W) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (2\pi)^4 \delta^2(P - q - k), \quad (4.50)$$

となる。これは位相体積の積分であり、具体的に評価すると

$$\text{Im } G(W) = -\frac{1}{8(2\pi)^2} \int d^3 q \int d^3 k \frac{1}{\omega_q E_k} \delta(W - \omega_q - E_k) \delta^3(-\mathbf{q} - \mathbf{k}), \quad (4.51)$$

であり、 $d^3 k$ 積分を行うと $k = -\mathbf{q}$ となるが、 E_k は \mathbf{q} の符号に依存しないことから、

$$\begin{aligned} \text{Im } G(W) &= -\frac{1}{32\pi^2} \int d^3 q \frac{1}{\omega_q E_q} \delta(W - \omega_q - E_q) \\ &= -\frac{1}{32\pi} \int d\Omega \int_0^\infty dq \frac{q^2}{\omega_q E_q} \delta(W - \omega_q - E_q) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \frac{q(W)}{W}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

となる。

$$\rho = \frac{q(W)}{4\pi W}, \quad (4.53)$$

とすると、

$$\text{Im} G(W) = -\frac{(\rho(W))}{2} = -\frac{\lambda^{1/2}}{16\pi W^2}, \quad (4.54)$$

と定義できる。

式 (4.54) より

$$\begin{aligned} G_{\text{II}}(W + i0^+) &= G_{\text{I}}(W - i0^+) \\ &= G_{\text{I}}(W + i0^+) + i\rho(W + i0^+), \end{aligned} \quad (4.55)$$

とでき、このことにより上半面 $\text{Im} z > 0$ では

$$G_{\text{II}}(z) = G_{\text{I}}(z) + i\rho_{\text{I}}(z) \quad (4.56)$$

とすることができる。

一方で λ は閾値より上で正、閾値より下で負となるため $\rho_I(W)$ は閾値より下でカットを持つ。そのため、先の $G_{II}(W)$ をそのまま下半面に適用すると、閾値より下で不連続になってしまう。これを避けるには $\rho_I(z)$ のカットを閾値より上に定義し直す必要がある。

$\rho_I(z)$ は閾値より上では実数であるためシュバルツの反転定理を満たし、[b] シートでの $\rho_{II}(z)$ は $W < M + m$ の $W + i0^+$ で $\rho_I(W - i0^+)$ と連続に定義されるので

$$\rho_{II}(W + i0^+) = \rho_I(W - i0^+) \quad (4.57)$$

$$\operatorname{Re}\rho_{II}(W + i0^+) + i\operatorname{Im}\rho_{II}(W + i0^+) = \operatorname{Re}\rho_I(W - i0^+) - i\operatorname{Im}\rho_I(W - i0^+) \quad (4.58)$$

となるが、 $W > M + m$ で $\rho(W - i0^+)$ は純虚数なので、

$$\operatorname{Re}\rho_{II}(W + i0^+) = 0 \quad (4.59)$$

$$i\operatorname{Im}\rho_{II}(W + i0^+) = -i\operatorname{Im}\rho_I(W - i0^+), \quad (4.60)$$

である。これは $\rho_{II}(W + i0^+) = -\rho_I(W + i0^+)$ となることを意味し、解析接続は

$$\rho_{II}(z) = -\rho_I(z), \quad (4.61)$$

となる。この時、 $\rho_I(z)$ と $\rho_{II}(z)$ は $W < M + m$ で連続、 $W > M + m$ で不連続であるので、上半面の $\rho_I(z)$ と下半面の $\rho_{II}(z)$ を

$$\tilde{\rho}(z) = \begin{cases} \rho_I(z) & (\operatorname{Im} z \geq 0) \\ \rho_{II}(z) = -\rho_I(z) & (\operatorname{Im} z < 0), \end{cases} \quad (4.62)$$

といった具合に組み合わせることにより、 $W > M + m$ にカットを持ち、上半面の $\rho_I(z)$ と連続な関数を定義できる。

これにより全ての範囲で連続に解析接続を行うことが可能となった。

$$G_{II}(z) = G_I(z) + i\tilde{\rho}(z) \quad (\text{全平面}) \quad (4.63)$$

4.6 ユニタリー性

本章ではここまでカイラルユニタリー法の散乱振幅の構築、解析接続を行ってきた。散乱理論での共鳴状態では S 行列のユニタリー性が存在していたが、それはカイラルユニタリー法でも成立するのだろうか。これを受けて、本節ではカイラルユニタリー法におけるユニタリー性について議論する。

まず、式 (3.32) の定義から、 S 行列および T 行列は

$$s = 1 - iT \quad (4.64)$$

$$s^\dagger = 1 + iT^\dagger \quad (4.65)$$

の関係を持っている。この s と s^\dagger の積をとると、

$$\begin{aligned} ss^\dagger &= (1 - iT)(1 + iT^\dagger) \\ 1 &= 1 - i(T - T^\dagger) + TT^\dagger \\ 1 - 1 + i(T - T^\dagger) &= TT^\dagger \\ i(T - T^\dagger) &= TT^\dagger, \end{aligned} \quad (4.66)$$

となる。

ここで、カイラルユニタリー法における T 行列の定義を振り返る。カイラルユニタリー法では、 T 行列は Lippman-Schwinger 方程式の解であり、式 4.38 の形で

$$T_{ij}(W) = V_{ij}(W) + \sum_k V_{ik}(W)G_k(W)T_{kj}(W), \quad (4.38)$$

のように表される。行列形式で

$$T(W) = (V^{-1} - G)^{-1}, \quad (4.32)$$

のように書くことも可能であった。

すなわち、相互作用カーネル V とループ関数 G で与えられるのだが、このうち相互作用カーネル V は実数であるため、

$$\text{Im}T = \text{Im}G^{-1} \quad (4.67)$$

とみなせる。前節の議論を用いると、

$$\text{Im}T^{-1} = \text{Im}G = \frac{\rho}{2} \quad (4.68)$$

とすることができ、

$$\text{Im}T = \frac{2}{\rho} = \frac{4\pi W}{p} \quad (4.69)$$

であることから、

$$\text{Im}T \propto \frac{1}{p} \quad (4.70)$$

の関係があるといえる。

一方、光学定理

$$\text{Im}f = \frac{p}{4\pi}\sigma \quad (4.71)$$

を導入すると、式 (3.37) より、全立体角の積分で、

$$\sigma = 4\pi|f(E, \theta)|^2, \quad (4.72)$$

となるので、式 (4.71) は

$$\text{Im}f = p|f(E, \theta)|^2, \quad (4.73)$$

となる。式 (4.69) を式 (4.66) の結果に代入すると

$$i(2i\text{Im}T) \propto \frac{1}{p} \quad (4.74)$$

より、

$$TT^\dagger = |T|^2 \propto \frac{1}{p} \quad (4.75)$$

であることから、光学定理が成立する。よって、カイラルユニタリー法におけるユニタリー性が示された。

4.7 三励起状態の先行研究

本節では、節で説明してきたカイラルユニタリー法を用いた先行研究について紹介する。大まかな流れについては既に、節で説明しているが、本節ではより具体的な手法について述べる。いずれも概要については既に 2.2 節でも触れているが、ここでは実際に計算に用いられたパラメーターなどを詳細に説明する。

4.7.1 Ramos, Oset, Bennhold による研究

本節では 2002 年に行われた A.Ramos、E.Oset、C.Bennhold の 3 氏による先行研究 [14] について触れる。この研究では、 $\Xi(1620)$ 及び $\Xi(1690)$ が $\Xi(1530)$ ($J^P = 3/2^+$) の次の励起状態であると仮定して、 $1/2^-$ のスピン・パリティを持つ共鳴状態をカイラルユニタリー法で生成した。

	$\pi\Xi$	$\bar{K}\Lambda$	$\bar{K}\Sigma$	$\eta\Xi$
$\pi\Xi$	2	-3/2	-1/2	0
$\bar{K}\Lambda$	-3/2	0	0	-3/2
$\bar{K}\Sigma$	-1/2	0	2	3/2
$\eta\Xi$	0	-3/2	3/2	0

表 4.1 先行研究 [14] での群論学的係数 C_{ij} 。アイソスピン対称であるとしたため 4 チャンネル存在する。

Ξ に対応する電荷が 0 でストレンジネス $S = -2$ を持つ結合チャンネルは $\pi^+\Xi^-$ 、 $\pi\Xi^0$ 、 $\bar{K}\Lambda$ 、 $\bar{K}^0\Sigma$ 、 $K^-\Sigma$ 、 $\eta\Xi^0$ の 6 つが存在しているが、閾値に近接していない限りはアイソスピン対称性が成立するため、アイソスピン対称とした規定を用いており、このモデルでは $\pi\Xi$ 、 $\bar{K}\Lambda$ 、 $\bar{K}\Sigma$ 、 $\eta\Xi^0$ の 4 つが結合チャンネルとなっている。

相互作用カーネルは式 (4.24) を用いており、チャンネルからの結合定数である C_{ij} は表 4.1 に示す通りである。メソン崩壊定数 f は物理的に一意に定まる値であるが、全てのチャンネルで $f = 104.439(\pi\Xi, \bar{K}\Lambda, \bar{K}\Sigma, \eta\Xi)$ としたモデル (Set 1-Set 5) と、物理的なメソン崩壊定数 f である、 $f_\pi = 93 \text{ MeV}$, $f_K = 1.22f_\pi$ 、 $f_\eta = 1.3f_\pi$ を用いたモデル Set 1(physical f_i) が存在する。

subtraction constant a_i は物理的に自然なくりこみスケールである $\mu_{reg} = 670 \text{ MeV}$ をもとに定まる値の -2 を主に用いており、10% 程度変化させたモデルも作ってポールの振る舞いを確認している (表 4.2 参照)。特に $a_{\bar{K}\Lambda}$ と $a_{\pi\Xi}$ の変化に対してポール位置が大きく動いており、実際にポールの留数計算からも $\bar{K}\Lambda$ と $\pi\Xi$ の二つのチャンネルに対して強い結合があることがわかった。また、いずれの共鳴も 1600 MeV 付近に現れていたことから、これらの共鳴は $\Xi(1690)$ ではなく、 $\Xi(1620)$ であると予想している。

4.7.2 Garcia-Recio、Lutz、Nieves による研究

本節では 2004 年に Garcia-Recio、Lutz、Nieves の 3 氏によって行われた先行研究 [27] について触れる。この先行研究は s 波結合メソンバリオン散乱振幅を用いるのは同様であるが、ループ関数の有限部分に $T(\sqrt{s} = \mu) = V(\mu)$ のくりこみ条件を課すことで一意に定めている。大きな特徴としては $\Xi(1620)$ 及び $\Xi(1690)$ を同時に生成できること、通常のカイラルユニタリー法では破られる交差対称性が保存されていることが挙げられる。

	Set 1	Set 2	Set 3	Set 4	Set 5	Set 1(physical f_i)
$a_{\pi\Xi}$	-2.0	-2.2	-2.0	-2.5	-3.1	-2.0
$a_{\bar{K}\Lambda}$	-2.0	-2.0	-2.2	-1.6	-1.0	-2.0
$a_{\bar{K}\Sigma}$	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0
$a_{\eta\Xi}$	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0
M	1607	1597	1596	1604	1605	1568
$\Gamma/2$	140	117	134	98	66	122

表 4.2 先行研究 [14] での各モデルの subtraction constant と対応するポールの実部と虚部。特に $\bar{K}\Lambda$ と $\pi\Xi$ の変化にポール位置が大きく依存していることを示唆している。

	$\Xi(1620)$	$\Xi(1690)$
M_R [MeV]	1565	1663
Γ_R [MeV]	247	4

表 4.3 先行研究 [27] での Ξ 励起状態に対応するポールの実部と虚部。 $\Xi(1620)$ と $\Xi(1690)$ を同時に生成できているのが大きな特徴である。

4.7.3 Sekihara による研究

本節では 2015 年に行われた Sekihara 氏による先行研究 [16] について触れる。この研究ではカイラルユニタリー法を用いて、 Ξ 励起状態のポールの $\bar{K}\sigma$ の閾値の近くに s 波 $\bar{K}\sigma$ ハドロン分子状態として生成したものである。この時の Ξ 励起状態は $J^P = 1/2^-$ を持つ $\Xi(1690)$ であると考えられ、既に得られていた Λ_c 崩壊による $\Xi(1690)$ の実験結果 [25] と矛盾しないことを確かめている。

この研究ではアイソパートナーの存在する $\bar{K}\Sigma$ の近傍にポールが現れるため、アイソスピン対称性の破れた状態を考えている。そのため、 Ξ に対応する結合チャンネルは $\pi^+\Xi^-$ 、 $\pi\Xi^0$ 、 $\bar{K}\Lambda$ 、 $\bar{K}^0\Sigma$ 、 $K^-\Sigma$ 、 $\eta\Xi^0$ の 6 つが存在しており、チャンネルからの相互作用を与える群論的係数 C_{ij} も 6 チャンネルで記述されている。(表 4.4 参照)

ループ関数の有限部分に $T(\sqrt{s} = \mu) = V(\mu)$ のくりこみ条件を適用して subtraction constant を決定したモデル (Set Λ 、Set Σ 、Set Ξ) と、 Λ_c 崩壊を観測した実験結果とのフィットを行うことで subtraction constant (Set fit) がそれぞれ存在しており、このう

	$K^-\Sigma^+$	$\bar{K}^0\Sigma^0$	$\bar{K}^0\Lambda$	$\pi^+\Xi^-$	$\pi^0\Xi^0$	$\eta\Xi^0$
$K^-\Sigma^+$	1	$-\sqrt{2}$	0	0	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3/2}$
$\bar{K}^0\Sigma^0$	$-\sqrt{2}$	0	0	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	$\sqrt{3/4}$
$\bar{K}^0\Lambda$	0	0	0	$-\sqrt{2/3}$	$-1/2$	$-3/2$
$\pi^+\Xi^-$	0	$-1\sqrt{2}$	$-\sqrt{3/2}$	1	$-\sqrt{2}$	0
$\pi^0\Xi^0$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	$\sqrt{3/4}$	$-\sqrt{2}$	0	0
$\eta\Xi^0$	$-\sqrt{3/2}$	$\sqrt{3/4}$	$-3/2$	0	0	0

表 4.4 先行研究 [16] での群論学的係数 C_{ij} 。アイソスピン対称性の破れを考慮しているため 6 チャンネル存在する。

	Set Λ	Set Σ	Set Ξ	Fit
$a_{\bar{K}\Sigma}$	-2.23	-2.10	-2.0	-1.98
$a_{\bar{K}\Lambda}$	-2.07	-1.91	-2.2	-2.07
$a_{\pi\Xi}$	-2.08	-1.99	-1.77	-0.75
$a_{\eta\Xi}$	-2.57	-2.52	-2.43	-3.31
W_{pole}	1682.6 - 0.8i MeV	No $\Xi(1690)$ pole	No $\Xi(1690)$ pole	1684.3 - 0.5i MeV

表 4.5 先行研究 [16] での各モデルの subtraction constant と対応するポール位置。

ち、Set Λ では共鳴状態のポールが得られ、Set fit では物理的な散乱に直接寄与しないリーマンシート上にポールが存在した。図 4.3 の比較では、Set fit では実験の分解能を含めると実験結果を再現できていることがわかる。

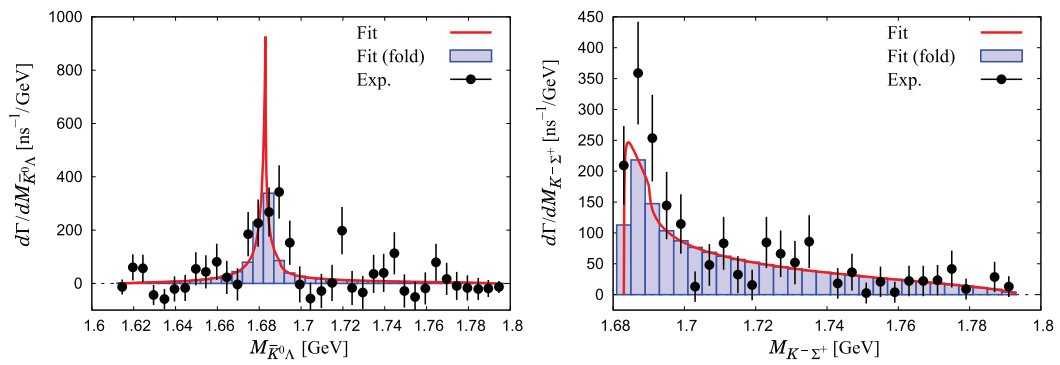


図 4.3 先行研究 [16] の Set fit における $\bar{K}^0\Lambda$ (左) 散乱振幅及び $K^-\Sigma^+$ 散乱振幅。赤線が set fit のスペクトルに係数 $C = 0.222\text{ns}^{-1}/\text{GeV}$ をかけたもので、青いヒストグラムは比較対象の実験 [25] の分解能に合わせたヒストグラム ($\bar{K}^0\Lambda$ スペクトルでは 5 MeV、 $K^-\Sigma^+$ スペクトルでは 4 MeV)。ヒストグラムとエラーバーを含む実験データを比較すると、実験データに近いスペクトルを得られていることがわかる。

第 5 章

$\Xi(1620)$ に関する研究

本章では第 4 章で触れたカイラルユニタリー法を用いた先行研究をもとに、Belle 実験で示唆された幅の狭い $\Xi(1620)$ のモデルの構築を目指す。また、ALICE 実験で観測された $K^- \Lambda$ 散乱長を満足するモデルの構築も行う。5.1 節では $\Xi(1620)$ についての先行研究 [14] の Set 1 について、実軸上における $\pi^+ \Xi^-$ 弾性散乱振幅を計算し、対応するスペクトルの形状を示す。5.2 節では、先行研究 [14] の Set 1 をもとに、Belle 実験で得られた質量および崩壊幅の中心値から予想されるポールを再現したモデル (Model 1) を構築し、 $\bar{K} \Lambda$ の閾値から受ける閾値効果について議論する。5.3 節では同様に ALICE 実験 [12] で得られた $K^- \Lambda$ 散乱長を再現するモデル (Model 2) を構築する。5.4 節では 5.3 節での解析に用いた散乱長とポールの関係性を議論し、5.5 節では実験の誤差を考慮することで、Model 1 での仮定と ALICE 実験 [12] で得られた $K^- \Lambda$ 散乱長の両方を満たす理論モデルが存在するかを確認する。

5.1 先行研究のスペクトル

カイラルユニタリー法を用いた $\Xi(1620)$ についての先行研究 [14] の Set 1 では、 $\Xi(1620)$ のポール位置が $1607 - 140i$ MeV に得られた。先行研究 [14] ではスペクトルが示されておらず、 $\Xi(1620)$ 共鳴のピークがどのように現れるかははっきりとわからない。特に、予言されているポール位置から決まる共鳴の崩壊幅が 280 MeV と広く、明瞭なピークは現れないことが考えられる。

一方で、Belle 実験では、質量および崩壊幅は以下の様に報告されている [11]

$$\begin{aligned} M_R &= 1610.4 \pm 6.0(\text{stat.})_{-4.2}^{+6.1}(\text{syst.}) \text{ MeV}, \\ \Gamma_R &= 59.9 \pm 4.8(\text{stat.})_{-7.1}^{+2.8}(\text{syst.}) \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

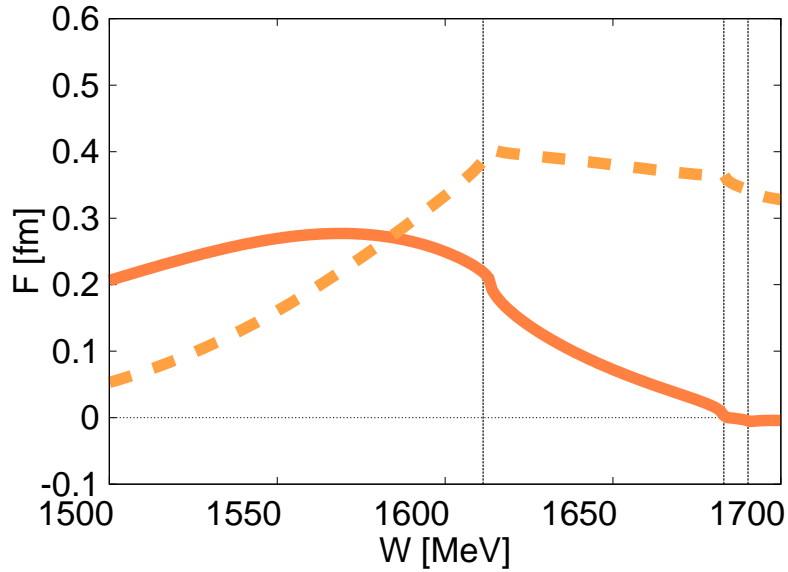


図 5.1 先行研究 [14] の Set 1 をもとに計算した $\pi^+\Xi^-$ 弾性散乱振幅。実線が散乱振幅の実部、点線が散乱振幅の虚部を表す。垂直の点線は左から順に $\bar{K}^0\Lambda$, $K^-\Sigma^+$, $\bar{K}^0\Sigma^0$ の閾値を表す。

共鳴の崩壊幅 ($\Gamma_R \sim 59.9$ MeV) は先行研究 [14] のポール位置から期待される値と比べると狭くなっている。また、 $\Xi(1620)$ 共鳴が明らかなピークとして観測されているため (図 2.3 参照)、先行研究 [14] のスペクトルを数値計算することで、ピークが現れるかを調べる。先行研究 [14] の subtraction constant を用いてアイソスピン対称性の破れを考慮した物理基底 ($Q = 0$) で数値計算を行う。

図 5.1 に式 (4.41) で表される $\pi^+\Xi^-$ 弾性散乱振幅 F

$$F_{ij}(W) = -\frac{\sqrt{M_i M_j}}{4\pi W} T_{ij}(W) \quad (4.41)$$

の実部、虚部をエネルギー W が 1500 MeV から 1700 MeV となる範囲でプロットする。一般に実験で得られるスペクトルは散乱振幅の虚部に対応する。しかし、図 5.1 の虚部を見ると、Belle の結果からピークが出ると期待される 1610 MeV 付近には明確なピークは見られない。よって Belle 実験のように明らかなピークを持つスペクトルを再現するにはモデルの改善が必要である。

5.2 幅の狭い $\Xi(1620)$ 共鳴のモデル (Model 1)

本節では、先行研究 [14] をもとにカイラルユニタリー法を用いて、Belle の実験結果を再現するモデルの構築を目指す。本来は $\Xi_c \rightarrow \pi\pi\Xi$ 中の $\pi^+\Xi^-$ スペクトル全体のフィットを行う必要があるが、カイラルユニタリー法では 2 体の散乱振幅しか得られず、スペクトルを記述するためには弱崩壊やチャンネル結合の効果も別で計算する必要があり、直接比較することはできない [39]。そのため本節では、Belle 実験で報告されたような狭い崩壊幅を持つ $\Xi(1620)$ の理論モデルを構築するため、Belle 実験で報告された結果の中心値である質量 1610 MeV 及び崩壊幅 60 MeV から、複素平面上のポールが

$$z_{\text{ex}} = 1610 - 30i \text{ MeV} \quad (5.2)$$

にあると仮定し、 z_{ex} にポールを持つモデルを探索する。

数値計算は物理的なハドロン質量を用いた物理基底で行う。このとき、電荷 $Q = 0$ の $\Xi(1620)$ の結合チャンネル (結合できるメソンとバリオンの組み合わせ) は 6 つ ($\pi^0\Xi^0, \pi^+\Xi^-, \bar{K}^0\Lambda^0, K^-\Sigma^+, \bar{K}^0\Sigma^0, \eta\Xi^0$) 存在している。メソン崩壊定数は $f_\pi = f_K = f_\eta = 1.123 \times 93 = 104.439 \text{ MeV}$ とする [14]。モデルには subtraction constant a_i が自由度として残っているので、 a_i を調整することで、 z_{ex} を再現するモデルを構築していく。なお、 a_i のアイソスピンの破れは考慮せず、 $a_{\pi^0\Xi^0} = a_{\pi^+\Xi^-}$ および $a_{K^-\Sigma^+} = a_{\bar{K}^0\Sigma^0}$ とする。すなわち、subtraction constant は自由度が 4 となる。ここで subtraction constant をアイソスピン対称としたのは、一般にアイソスピンの破れはハドロン物理のスケールに比べると十分に小さく、無視できるためである。ただし、質量はハドロンの閾値を決めており、 $\Xi(1620)$ の性質に強く影響する。よって閾値によるアイソスピン対称性の破れを考慮するため、結合チャンネルは物理基底を用いる。

まず、ポール位置の各チャンネルの subtraction constant a_i に対する依存性を確認する。全てのチャンネルで $a_i = -2$ である先行研究 [14] の Set 1 のポール位置 $1607 - 140i \text{ MeV}$ を基準にし、1 つのチャンネルの a_i を変化させ、ポールの軌跡を計算する。図 5.2 に各チャンネルの a_i を -4 から 4 まで変化させた場合のポール軌跡を示し、図示する範囲外にポールが出た場合は終端の a_i の値を図に示す。図示している $\pi^+\Xi^-$ 閾値と $\bar{K}^0\Lambda$ 閾値の間のエネルギー領域で物理的な散乱振幅に最も近接しているリーマン面である [bbtttt] シートのポールを示す。ポール位置は $\pi\Xi$ チャンネルと $\bar{K}\Lambda$ チャンネルの subtraction constant には強く依存しており、一方で $\bar{K}\Sigma$ チャンネルと $\eta\Xi$ チャンネルの subtraction constant にはあまり依存していない。これは、 $\pi\Xi$ 及び $\bar{K}\Lambda$ の二つのチャンネルの閾値が

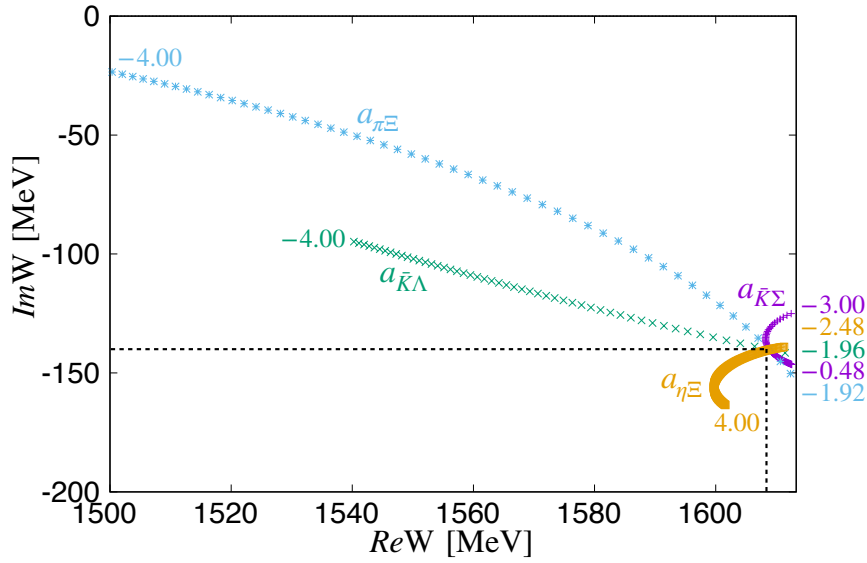


図 5.2 subtraction constant a_i を変化させたときのポール軌跡。

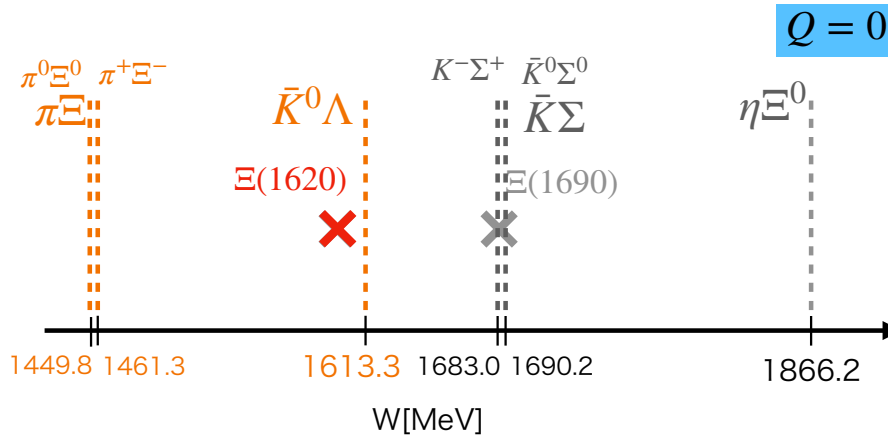


図 5.3 $Q = 0$ の電荷中性状態での Ξ 励起状態の結合チャンネル。

$\Xi(1620)$ のポールのエネルギーに近い (図 5.3) ことから、ポール位置がこれら二つのチャンネルの subtraction constant の影響を受けやすいためと考えられる。

そのため、ここでは $a_{\bar{K}\Sigma}$, $a_{\eta\Xi}$ は -2 に固定し、ポール位置に強く影響を与える $\pi\Xi$ 及び $\bar{K}\Lambda$ の subtraction constant を調整し、式 (5.2) の再現を目指す。理論計算で得られたポール位置を z_{th} とし、仮定したポール位置 (5.2) との複素エネルギー平面平面における距離を

$$\Delta z = |z_{\text{th}} - z_{\text{ex}}|$$

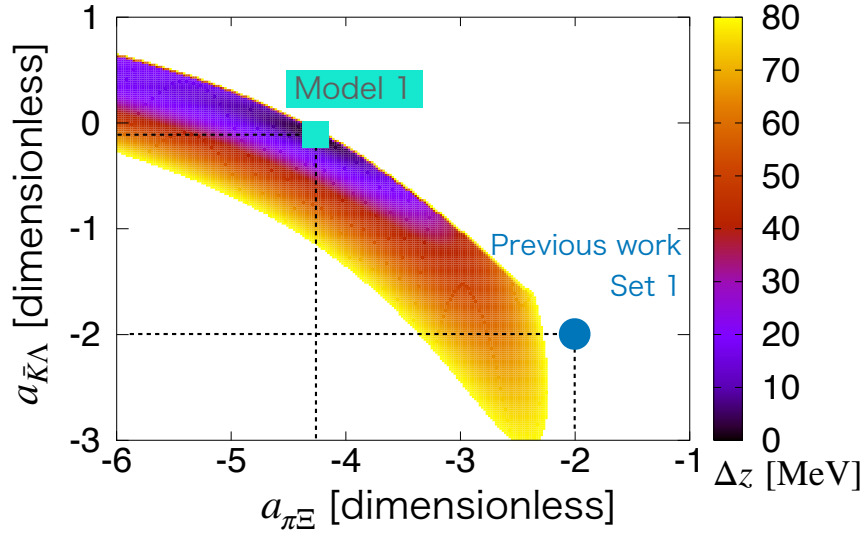


図 5.4 $a_{\pi\Xi}$ - $a_{\bar{K}\Lambda}$ 平面上の Δz の密度プロット。本研究の Model 1(正方形) と先行研究 [14] の Set 1(丸) も図示する。密度プロットの色は黄色に近いほど Δz が大きく、紫色に近いほど Δz が小さいことを示す。

とする。 z_{th} は subtraction constant に依存するため、 Δz を最小にする $a_{\pi\Xi}, a_{\bar{K}\Lambda}$ を探索する。図 5.4 に $a_{\pi\Xi}$ - $a_{\bar{K}\Lambda}$ 平面での Δz の密度プロットを示す。図より、 $a_{\pi\Xi} = -4, a_{\bar{K}\Lambda} = 0$ 付近で Δz の最小値があることがわかる。数値的には

$$a_{\pi\Xi} = -4.26, \quad a_{\bar{K}\Lambda} = -0.12 \quad (5.3)$$

で Δz が最小化されて、ポールの位置は

$$z_{\text{th}} = 1610 - 30i \text{ MeV} \quad (5.4)$$

となり、1 MeV の精度で式 (5.2) を再現する。以下では、この模型を Model 1 と呼ぶ。

Model 1 の実軸上のスペクトルがピークを持つかを確認するために、Model 1 の $\pi^+\Xi^-$ 弾性散乱振幅を図 5.5 に先行研究 [14] と比較して示す。Model 1 では先行研究 [14] の Set 1 とは異なり、1600 MeV 付近の散乱振幅の虚部に明らかなピークが現れていることがわかる。散乱振幅の実部も近いエネルギーでゼロになっており 3.4 節で議論した共鳴状態の性質が反映されている。以上よりカイラルユニタリー法を用いて Belle の実験で指摘されたような、幅の狭い $\Xi(1620)$ 共鳴のモデルを作ることができた。

ただし、Model 1 の $\Xi(1620)$ のポール位置は $\bar{K}^0\Lambda$ の閾値 (1613.1 MeV) に非常に近い。一般に閾値に近いピークは閾値の効果を受け、歪められる効果 (閾値効果) があることが知られている。Model 1 において閾値効果が現れているかを確認するため、図 5.6

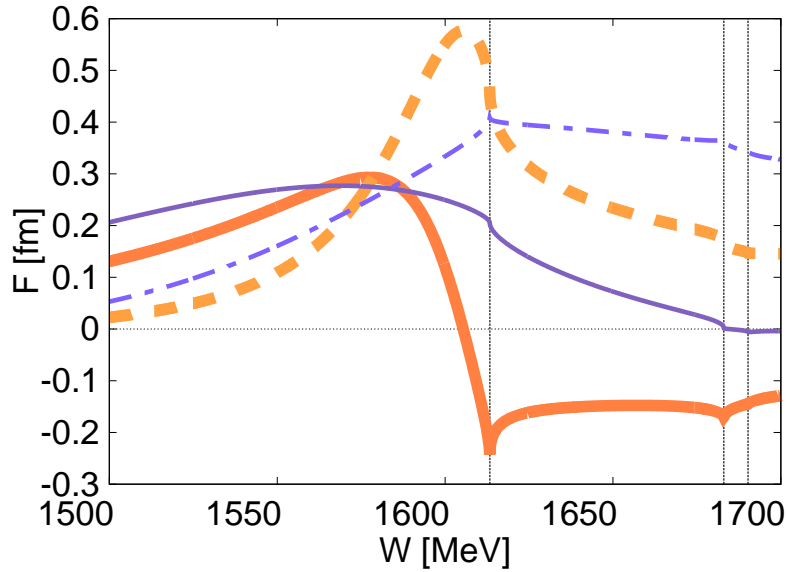


図 5.5 Model 1(太線)と先行研究 [14] の Set 1(細線)との $\pi^+\Xi^-$ 弾性散乱振幅の比較。実線が散乱振幅の実部、点線が散乱振幅の虚部を表す。垂直の点線は左から順に $\bar{K}^0\Lambda$, $K^-\Sigma^+$, $\bar{K}^0\Sigma^0$ の閾値を表す。

に Model 1 の振幅と式 (5.4) の位置にポールを持つ Breit-Wigner 分布との比較を行う。2つの振幅の虚部を比較すると、Model 1 は $\bar{K}^0\Lambda$ の影響を受けて、歪められていることがわかる。実際に Model 1 の振幅の虚部のピークは 1606 MeV にあり、ポールの実部である 1610 MeV に比べて、4 MeV 程度ピーク位置がエネルギー負方向へずれている。結果、 $\Xi(1620)$ に対して、閾値効果がどの程度現れるかについて定量的に議論することができた。これによって、閾値近傍の共鳴について、質量や崩壊幅を議論する際は閾値効果の影響を考慮する必要があることがわかる。

5.3 $\bar{K}\Lambda$ 散乱長を考慮したモデル (Model 2)

2021 年、ALICE 実験により高エネルギー重イオン衝突での運動量相関関数の測定で $K^-\Lambda$ 散乱長 f_0 が決定された。(2.1 節参照) 得られた散乱長は

$$\begin{aligned} \text{Re } f_0 &= 0.27 \pm 0.12(\text{stat.}) \pm 0.07(\text{syst.}) \text{ fm} \\ \text{Im } f_0 &= 0.40 \pm 0.11(\text{stat.}) \pm 0.07(\text{syst.}) \text{ fm} \end{aligned} \quad (5.5)$$

である [12]。散乱長は理論計算での振幅の実部と虚部に直接的な制限を与えることから、一般的なスペクトルフィットや、前節で行ったようなポール位置を仮定しての計算よりも、実験データに忠実なモデルの構築が可能になる。

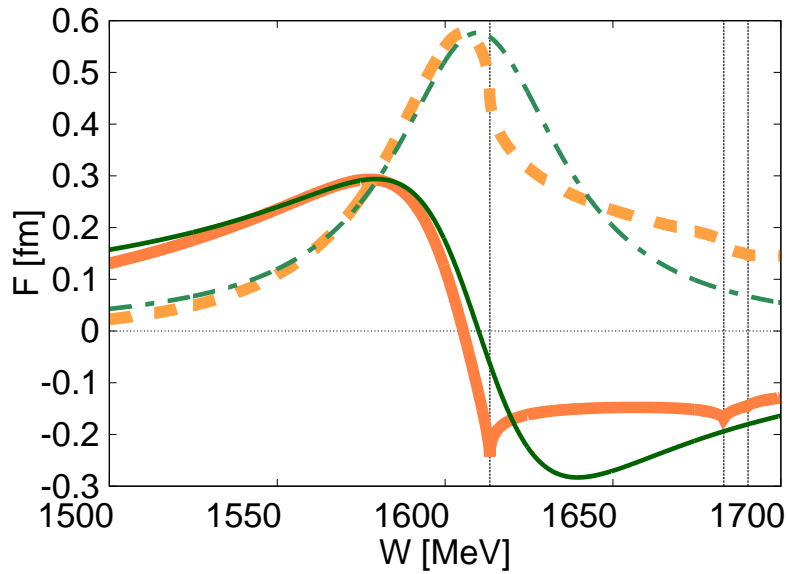


図 5.6 Model 1(太線)と同位置にポールを持つ Breit-Wigner 振幅(細線)との $\pi^+\Xi^-$ 弾性散乱振幅の比較。実線が散乱振幅の実部、点線が散乱振幅の虚部を表す。垂直の点線は左から順に $\bar{K}^0\Lambda$, $K^-\Sigma^+$, $\bar{K}^0\Sigma^0$ の閾値を表す。

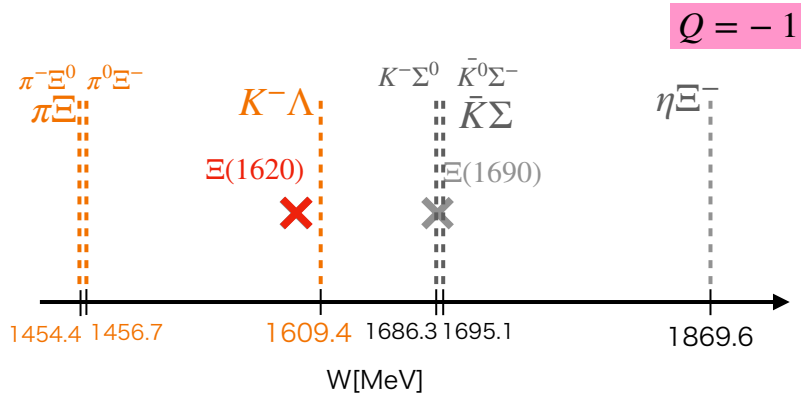


図 5.7 $Q = -1$ の荷電状態での Ξ 励起状態の結合チャンネル。 $Q = 0$ とは閾値エネルギーが異なるため、計算にあたっては注意を要する。

数値計算を行うにあたっては、ALICE 実験が $Q = -1$ の荷電状態の検出を行ったことから、それぞれの結合チャンネルを荷電状態のものに置き換える必要がある。そこで、前節の結合チャンネルである $(\pi^0\Xi^0, \pi^+\Xi^-, \bar{K}^0\Lambda^0, K^-\Sigma^+, \bar{K}^0\Sigma^0, \eta\Xi^0)$ を、図 5.7 のようにそれぞれ $(\pi^-\Xi^0, \pi^0\Xi^-, K^-\Lambda^0, K^-\Sigma^0, \bar{K}^0\Sigma^-, \eta\Xi^-)$ と置き換える。subtraction constant は前節と同様にアイソスピン対称として扱う。

なお、先行研究 [14] の Set 1 の subtraction constant を用いて $Q = -1$ の荷電規定を用いて計算した $K^- \Lambda$ 散乱長は $-0.07 + 0.21i$ fm、前節で得られた Model 1 の subtraction constant を用いて計算した $K^- \Lambda$ 散乱長は $f_0 = -0.80 + 0.92i$ fm であり、いずれも ALICE 実験の結果 (5.5) を再現できていない。本節では、得られた散乱長のうち誤差を考慮しない中央値である

$$f_{0,\text{ex}} = 0.27 + 0.40i \text{ fm} \quad (5.6)$$

を理論モデルで再現することを目指す。

前節と同様に $a_{\bar{K}\Sigma} = a_{\eta\Sigma} = -2$ とし、図 5.2 よりポール位置が大きく依存する $\pi\Sigma$, $\bar{K}\Lambda$ のふたつのチャンネルの subtraction constant を調整することで散乱長の最適化を行う。理論計算で得られた散乱長を $f_{0,\text{th}}$ とし、ALICE 実験で得られた $K^- \Lambda$ 散乱長の中央値である式 (5.6) の $f_{0,\text{ex}}$ との複素平面上における距離を

$$\Delta f_0 = |f_{0,\text{th}} - f_{0,\text{ex}}| \quad (5.7)$$

とする。 Δf_0 を最小にする $a_{\pi\Sigma}$, $a_{\bar{K}\Lambda}$ を探索するために、図 5.8 に $a_{\pi\Sigma}$ - $a_{\bar{K}\Lambda}$ 平面での Δf_0 の密度プロットを示す。図 5.8 より、 $a_{\pi\Sigma} = -3$ 、 $a_{\bar{K}\Lambda} = 0.5$ 付近で Δf_0 が最小となっていることがわかる。定量的には

$$a_{\pi\Sigma} = -2.90, \quad a_{\bar{K}\Lambda} = 0.36 \quad (5.8)$$

の点で Δf_0 が最小となり、 $K^- \Lambda$ 散乱長は、 $f_{0,\text{th}} = 0.27 + 0.40i$ fm で、 $f_{0,\text{ex}}$ を 0.01 fm の精度で再現する。以下では式 (5.8) の subtraction constant を用いたモデルを Model 2 と呼ぶ。

図 5.8 からわかるように Model 2 の subtraction constant は明らかに Model 1 及び先行研究 [14] の Set 1 と異なっている。では、実験で得られたスペクトルに当たる散乱振幅はどのような形になって現れるのだろうか？本節では、 $K^- \Lambda$ の散乱長への Fit を行なったことから、 $K^- \Lambda$ 弾性散乱振幅を実部、虚部と分けて図 5.9 に示す。 $K^- \Lambda$ 弾性散乱振幅を見ると、図 5.5 及び、図 5.6 の Model 1 の $\pi^+\Sigma^-$ 弾性散乱振幅とは明らかに異なる形状をしていること、 $K^- \Lambda$ の閾値において実験の誤差を表すエラーバーの中心を通っていることがわかる。実験で得られるスペクトルは図 5.9 の虚部に対応するが、Model 2 のスペクトルの形状は図 5.1 の虚部に近く、はっきりとしたピークのないカスプ形となっている。これは、先行研究 [14] の Set 1 のように幅の広いポールがある可能性も排除できないが、ピークに直接的に影響を及ぼすリーマン面にポールが存在しない、いわゆるバーチャルポールと呼ばれる状態であることが予測される。

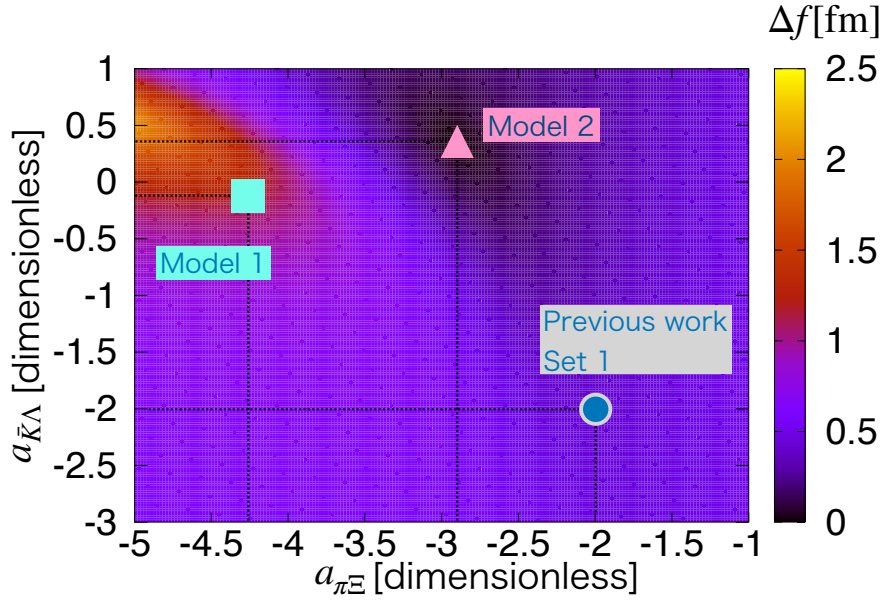


図 5.8 $a_{\pi\Xi}$ - $a_{\bar{K}\Lambda}$ 平面上の Δf_0 の密度プロット。先行研究 [14] の Set 1 が $(-2, -2)$ 、前節の Model 1 が $(-4.26, -0.12)$ 、Model 2 が $(-2.90, 0.36)$ の位置にそれぞれ対応する。密度プロットの色は黄色に近いほど Δf_0 が大きく、紫色に近いほど Δf_0 が小さいことを示す。

では、Model 2 のポールはどのような位置に存在するのか、まずは物理的に直接影響を及ぼすと考えられる、 $K^- \Lambda$ 閾値より下の [bbtttt] シート及び $K^- \Lambda$ 閾値より上の [bbbttt] シート上でポールの探索を行う。調べたエネルギー範囲は $1500 \leq \text{Re}W \leq 1700 \text{ MeV}$, $-100 \leq \text{Im}W \leq 0 \text{ MeV}$ である。結果、これらの面では $K^- \Lambda$ の閾値付近に散乱振幅のポールは発見されなかった。しかし 64 通り存在するリーマン面のうち、上記の 2 枚以外のいずれかにバーチャルポールが存在する可能性がある。

次に閾値の前後でリーマン面を変更せず、[bbtttt], [bbbttt], [ttbttt] の 3 通りのリーマンシート上で $1400 \leq \text{Re}W \leq 1700 \text{ MeV}$, $-300 \leq \text{Im}W \leq 0 \text{ MeV}$ の範囲でポールの探索を行った。結果として、[ttbttt] シート上の

$$1655 + 53i \text{ MeV} \quad (5.9)$$

の位置にポールを確認した。

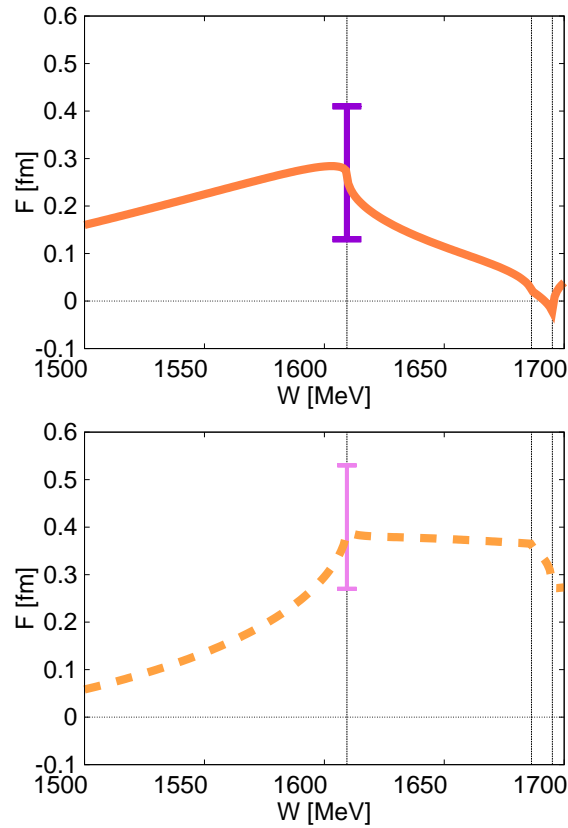


図 5.9 Model 2(太線)の $K^- \Lambda$ 弾性散乱振幅。実線が散乱振幅の実部、点線が散乱振幅の虚部を表す。ALICE 実験の $K^- \Lambda$ 散乱長をエラーバーで表す。エラーの範囲は式 (5.17) で求めた二乗和を用いる。垂直の点線は左から順に $K^- \Lambda$, $K^- \Sigma^0$, $\bar{K}^0 \Sigma^-$ の閾値を表す。

5.4 散乱長とポールの関係

Model 1 では $\bar{K} \Lambda$ の閾値の近くに $\Xi(1620)$ のポールがあるが、一方の Model 2 では $\bar{K} \Lambda$ の付近にポールが存在しなかった。3.6 節で示したように、閾値の近くのポールと散乱長には関係があるので、本節では $\bar{K} \Lambda$ 散乱長から閾値近傍のポールについて議論する。本節では 3.6 節の議論にあわせて散乱長を $a_0 = -f_0$ で表す。

Model 1 と Model 2 を比較するにあたって、Model 1 は電荷 $Q = 0$ で計算されているのに対し、Model 2 は $Q = -1$ で計算されており、直接比較ができない。Model 2 ではすでに $K^- \Lambda$ 散乱長を計算していることから、ここでは Model 1 の subtraction constant

表 5.1 Model 1、Model 2 の散乱長 a_0 とポール位置のまとめ。

モデル名	a_0 [fm]	$ a_0 $ [fm]	式 (5.11) の z [MeV]	実際の z [MeV]
Model 1	$0.80 - 0.92i$	1.21	$1615 - 38i$ [bbtttt]	$1610 - 30i$ [bbtttt]
Model 2	$-0.27 - 0.40i$	0.48	$1701 + 228i$ [ttbttt]	$1655 + 53i$ [ttbttt]

を用いて $Q = -1$ の $K^- \Lambda$ 散乱長を計算する。結果として

$$a_0 = 0.80 - 0.92i \text{ fm} \quad (5.10)$$

となった。この結果と Model 2 の散乱長および両者の絶対値を表 5.1 に示す。Model 1 の方が $|a_0|$ が大きいことがわかる。これは $\Xi(1620)$ の極が $K^- \Lambda$ の閾値の近くにあるためである。3.6 節の議論より、散乱長 a_0 の絶対値が十分に大きいという条件の時、ポールの位置 z は

$$z = \frac{-1}{2\mu_{K^- \Lambda} a_0^2} + M_\Lambda + m_{K^-} \quad (5.11)$$

と近似できる。 $\mu_{K^- \Lambda} = 1/[1/m_{K^-} + 1/M_\Lambda]$ は $K^- \Lambda$ の換算質量である。この式を使って予測された値を表 5.1 に示す。Model 1 の結果は実際のポール位置 ($1611 - 30i$ MeV) に近いものとなった。これは散乱長の絶対値が大きいことを反映している。10 MeV 程度のずれは高次項の寄与を表していると考えられる。一方で Model 2 に対する式 (5.11) の結果は、散乱長 a_0 の実部も虚部もいずれも負であるので 3.6 節の議論より、物理的な散乱に寄与するリーマン面上にポールは存在せず、[ttbttt] シートにあることを示している。これは 5.3 節で実際に [ttbttt] シート上でポールが見つかったことと整合的である。ただし、定量的なポールの位置は 180 MeV 程度ずれている。この理由は近似式 (5.11) が成立するためには、散乱長の絶対値が十分大きい必要があるが、Model 2 は散乱長の絶対値が 0.48 fm と小さいことから定量的にずれが生じているためである。

5.5 誤差を考慮した Model 1 と Model 2 の比較

5.2 節では Belle 実験に基づいた幅の狭い $\Xi(1620)$ 共鳴のモデルを構築し、5.3 節では ALICE 実験に基づいた $K^- \Lambda$ 散乱長を再現するモデルを構築した。表 5.2 にそれぞれの subtraction constant を示す。Model 1、Model 2 はどちらも実験データに基づいているが、 $a_{\pi \Xi}$ 並びに $a_{\bar{K} \Lambda}$ はいずれも大きく異なる値になっている。5.2 節、5.3 節ではいずれも実験結果の中心値に合わせていたが、実験データには誤差も含まれているため、本節で

表 5.2 先行研究 [14] の Set 1 及び Model 1、Model 2 の subtraction constant のまとめ。

	$a_{\pi\Xi}$	$a_{\bar{K}\Lambda}$	$a_{\bar{K}\Sigma}$	$a_{\eta\Xi}$
文献 [14] Set 1	-2.00	-2.00	-2.00	-2.00
Model 1	-4.19	-0.14	-2.00	-2.00
Model 2	-2.90	0.36	-2.00	-2.00

は誤差も考慮することで ALICE 実験の散乱長を再現しつつ、Belle 実験で報告された質量および崩壊幅から予測される位置に極を持つモデルを探索する。

まずは、Belle 実験で得られたデータの誤差に着目する。Belle による $\Xi(1620)$ の質量と崩壊幅は

$$\begin{aligned} M_R &= 1610.4 \pm 6.0(\text{stat.})_{-4.2}^{+6.1}(\text{syst.}) \text{ MeV}, \\ \Gamma_R &= 59.9 \pm 4.8(\text{stat.})_{-7.1}^{+2.8}(\text{syst.}) \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

であり、統計誤差と系統誤差の二乗和を取ると

$$\begin{aligned} M_R &\simeq 1610.4_{-7.3}^{+6.1} \text{ MeV} \\ \Gamma_R &\simeq 59.9_{-8.5}^{+5.6} \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.13)$$

となる。次に、ALICE による $K^-\Lambda$ 散乱長は

$$\begin{aligned} \text{Re } f_0 &= 0.27 \pm 0.12(\text{stat.}) \pm 0.07(\text{syst.}) \text{ fm}, \\ \text{Im } f_0 &= 0.40 \pm 0.11(\text{stat.}) \pm 0.07(\text{syst.}) \text{ fm}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

である。二つの誤差の二乗和を取ると、

$$\begin{aligned} \text{Re } f_0 &\simeq 0.27 \pm 0.14 \text{ fm}, \\ \text{Im } f_0 &\simeq 0.40 \pm 0.13 \text{ fm}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

となる。Belle によるデータの誤差から、 z_{th} のみたす範囲を

$$1603.1 \text{ MeV} \leq \text{Re } z_{\text{th}} \leq 1616.5 \text{ MeV}, \quad \text{and} \quad 25.7 \text{ MeV} \leq \text{Im } z_{\text{th}} \leq 32.8 \text{ MeV}, \quad (5.16)$$

とし、ALICE によるデータの誤差から $f_{0,\text{th}}$ のみたす範囲は

$$0.13 \text{ fm} \leq \text{Re } f_{0,\text{th}} \leq 0.41 \text{ fm}, \quad \text{and} \quad 0.27 \text{ fm} \leq \text{Im } f_{0,\text{th}} \leq 0.53 \text{ fm}, \quad (5.17)$$

となる。

図 5.10 に式 (5.16) を満たすポール位置 z_{th} を与える subtraction constant の領域と、式 (5.17) を満たす $K^-\Lambda$ 散乱長 $f_{0,\text{th}}$ を与える subtraction constant の領域を示す。図よ

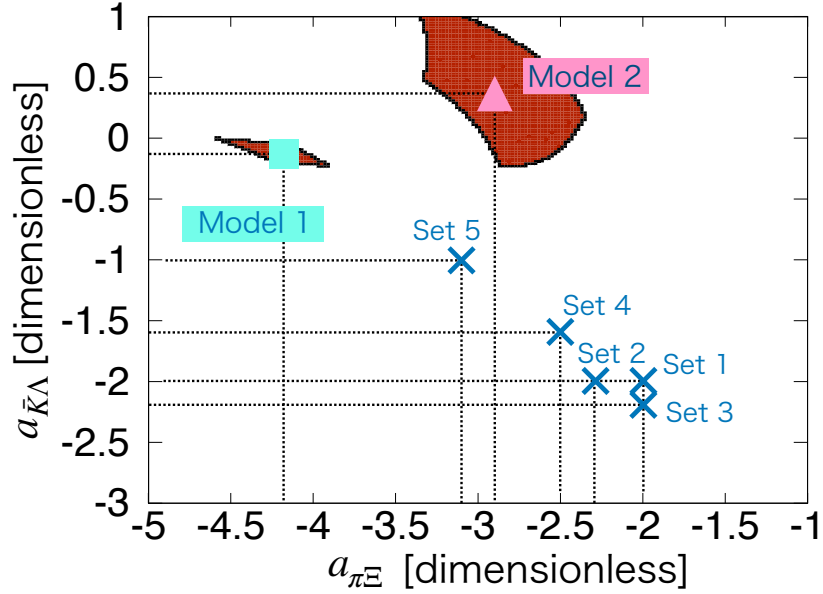


図 5.10 $a_{\pi\Xi}$ - $a_{\bar{K}\Lambda}$ 平面上で、Belle 実験で報告された質量と崩壊幅から予想される極を持つモデルの存在しうる領域と、ALICE 実験の $\bar{K}\Lambda$ 散乱長を再現するモデルの存在しうる領域の比較。図中の Model 1 は 5.2 で導出した理論モデルを、Model 2 は 5.3 で導出した理論モデルを、Set 1-Set 5 は先行研究 [14] のモデルをそれぞれ表す。

り式 (5.16) と式 (5.17) の両方を満たす subtraction constant の領域は存在しないことがわかる。ただし、Belle 実験ではポール位置は決定されておらず、Model 1 におけるポール位置もあくまで仮定したものにすぎない。そのため、ALICE 実験と Belle 実験の結果を両方満たすモデルが存在しないというわけではなく、Belle 実験の結果を分析するにあたっては、 $\pi\Xi$ スペクトラムとの比較を行うことが適切と考えられる。

第6章

$\Xi(1690)$ に関する研究

前章では $\Xi(1620)$ について閾値効果の存在を確認し、 $K^- \Lambda$ 散乱長を基にした数値計算も併せて行った。本章では、Belle 実験で $\Xi_c \rightarrow \pi \pi \Xi$ 崩壊での $\pi^+ \Xi^-$ 不変質量分布で $\Xi(1620)$ と共にピークが観測された $\Xi(1690)$ についての解析を行う。 $\Xi(1690)$ については WA89 実験によって、質量と崩壊幅が与えられており、PDG でも信頼できる値として掲載されている。6.1 節では $\Xi(1690)$ が前章の $\Xi(1620)$ とどのように異なるかについて触れ、6.2 節では先行研究 [16] をもとに、 $\Xi(1690)$ に現れる閾値効果について議論する。

6.1 $\Xi(1690)$ の特殊性

$\Xi(1690)$ の質量 M_R 及び崩壊幅 Γ_R は WA89 によって、 $\pi^+ \Xi^-$ 不変質量分布を閾値効果を Breit-Wigner 分布で fit して、

$$\begin{aligned} M_R &= 1686 \pm 4 \text{ MeV}, \\ \Gamma_R &= 10 \pm 6 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

になると報告されている。詳細については 2.1 節を参照すること。

しかし、報告された質量 M_R の位置にポールが存在すると仮定すると、 $K^- \Sigma^+$ の閾値 (1683.0 MeV) と $\bar{K}^0 \Sigma^0$ の閾値 (1690.2 MeV) の二つに非常に近いポールがあることがわかる。そのため前章の $\Xi(1620)$ とは異なり、二つの閾値からの閾値効果を受けることが考えられる。図 6.1 に実験で報告された質量 M_R 及び崩壊幅 Γ_R から予測されるポールと、 $K^- \Sigma^+$ 、 $\bar{K}^0 \Sigma^0$ の閾値を示す。図 6.1 より、ポール位置は中心値をとると $K^- \Sigma^+$ 、 $\bar{K}^0 \Sigma^0$ の二つの閾値に挟まれた位置に現れることがわかる。実験の誤差まで考慮すると、ポール位置は $K^- \Sigma^+$ の閾値より下にも現れる場合もある。ポールの至近に二つの閾値が存在する場合の閾値効果はどのように現れるのだろうか。

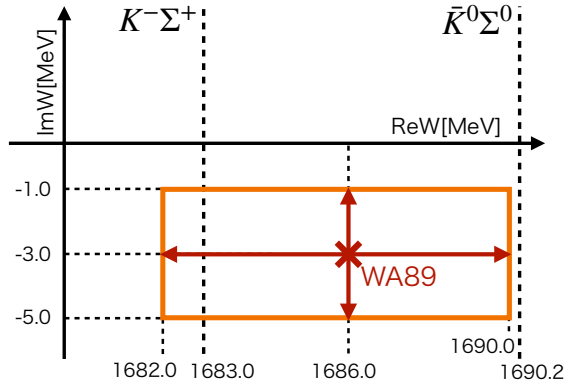


図 6.1 WA89 実験 [15] で報告された質量及び崩壊幅から予測されるポールの存在範囲。

6.2 $\Xi(1690)$ における閾値効果の検証

解析の手法は 5 章の $\Xi(1620)$ の議論と同様に、閾値効果を含むチャンネル結合メソンバリオン散乱振幅を計算できるカイラルユニタリー法を用いる。アイソスピン対称性の破れを考えるために粒子基底を取ると、 $\Xi^0(1690)$ には $\pi^0 \Xi^0$ 、 $\pi^+ \Xi^-$ 、 $\bar{K}^0 \Lambda$ 、 $K^- \Sigma^+$ 、 $\bar{K}^0 \Sigma^0$ 、 $\eta \Xi^0$ の 6 つのチャンネルが結合する。

$\Xi(1690)$ に関する閾値効果がどのように現れるかを調べるために、 $\Xi(1690)$ についての先行研究 [16] の散乱振幅の数値計算を行う。先行研究 [16] では、ループ関数 $G_i(W)$ が $W = M_\Lambda$ で 0 になるようにくりこみ条件を取った set Λ と、過去に行われた Belle による $\Lambda_c^+ \rightarrow (\bar{K}^0 \Lambda) K^+$ 、 $\Lambda_c^+ \rightarrow (K^- \Sigma^+) K^+$ 崩壊の実験データ [25] の $\bar{K}^0 \Lambda$ と $K^- \Sigma^+$ のスペクトルを fit した set fit の二つのモデルが提案された。 $\Xi(1690)$ のポールはそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{Set } \Lambda & 1682.6 - 0.8i \text{ MeV} \\ \text{Set fit} & 1684.3 - 0.5i \text{ MeV} \end{aligned} \quad (6.2)$$

の位置にあらわれている。以下ではこれら二つのモデルについて閾値効果を確認する。

図 6.2 に先行研究の set Λ ならびに set fit の $\bar{K}^0 \Lambda$ の散乱振幅を太線で示す。それぞれ同じ質量と崩壊幅を持つポールを含む Breit-Wigner 分布を細線で表し、散乱振幅と比較することで閾値効果の存在を確認する。図 6.2 左側の set Λ では、計算した $\bar{K} \Lambda$ の散乱振幅にピークがはっきりと見える。これは Set Λ のポール位置が $1682.6 - 0.8i \text{ MeV}$ と、 $K^- \Sigma^+$ の閾値 (1683.0 MeV) よりも低いエネルギー位置にあることから、5.2 節の Model 1 と同様にピークが現れると解釈できる。また、 $\bar{K} \Lambda$ の散乱振幅のピークが Breit-Wigner 分布のピークと比較して、エネルギー正方向へ 0.12 MeV ずれている。 $\Xi(1620)$ でのピー

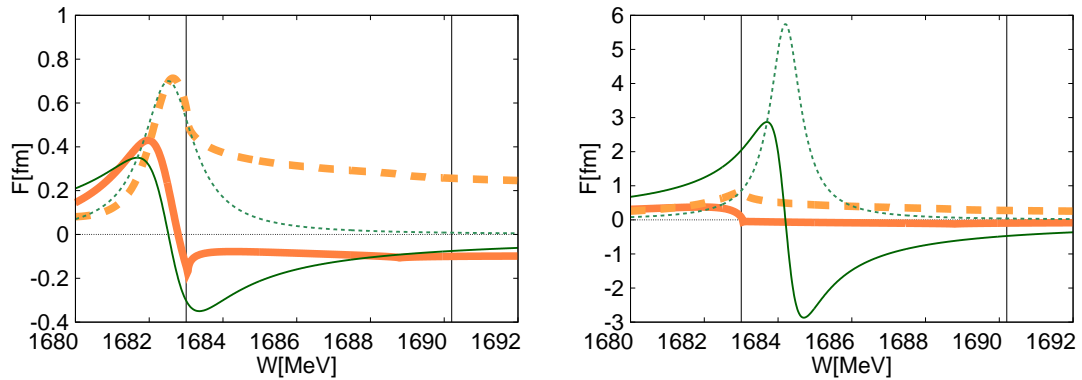


図 6.2 先行研究 [16] の $\bar{K}^0\Lambda$ の散乱振幅 (太線) と Breit-Wigner 分布 (細線) の実部 (実線) と虚部 (破線) の比較。左: set A の場合、右: set fit の場合。縦方向の破線はそれぞれ $K^-\Sigma^+$ の閾値 (1683.0 MeV) と $\bar{K}^0\Sigma^0$ の閾値 (1690.2 MeV)

ク位置のズレである 5 MeV[17] と比べると、閾値効果が小さいことがわかる。また、ずれる方向が 5.2 節の Model 1 と異なり、正方向となっている。この理由としてはチャンネルごとの閾値効果が異なって現れる可能性があるため、今後検証を行っていく。

図 6.2 右側の set fit では計算した $\bar{K}\Lambda$ の散乱振幅の虚部は閾値上でカスプとなり、閾値より上ではピークがあらわれず、Breit-Wigner 分布とは大きく異なっている。これは set fit のポールの位置が特殊なことに起因する。直接実軸上の振幅に影響するリーマン面は $K^-\Sigma^+$ の閾値より下では [bbbt]、 $K^-\Sigma^+$ の閾値より上では [bbbt] である。実際に Set A では $K^-\Sigma^+$ の閾値より下の [bbbt] 上にポールがあったことから、 $\bar{K}^0\Lambda$ 振幅でピークがはっきりと現れていた。

一方の Set fit ではポール位置が $1684.3 - 0.5i$ MeV の位置にあり、 $K^-\Sigma^+$ の閾値より上にある。そのため、実軸上のスペクトルにピークとして現れるためには [bbbt] 上にいる必要があるが、実際には [bbbt] 上にポールがあることから、ピークとしては現れなかった。しかし、ポールが $\bar{K}^0\Lambda$ の閾値に近い位置にあることから、カスプ構造を強調していると考えられる。

第7章

まとめと展望

7.1 本研究のまとめ

ハドロンは強い相互作用をする粒子を指し、特定のフレーバー量子数に対して多くの種類のハドロンが発見されている。同じフレーバー量子数を持ったハドロンの大部分は励起状態と呼ばれる高いエネルギーを持った状態であり、一部を除いて強い相互作用に対して不安定な構造を持つことから共鳴状態として扱われる。ハドロンの励起状態の中でも s クォークを二つ含む Ξ 励起状態は、実験での生成が難しく、長らく解析が進んでいなかった。近年になり、Belle 実験によって Ξ 励起状態である $\Xi(1620)$ および $\Xi(1690)$ のピークが $\pi^+\Xi^-$ スペクトラム中に観測され、ALICE 実験では $\Xi(1620)$ の近傍に存在する $K^-\Lambda$ での散乱長が決定されるなど、実験での観測が大きく進み、理論解析に必要なデータが揃いつつある。

Ξ 励起状態を通常の 3 クォーク状態のバリオンの励起状態として記述する構成子クォーク模型の予言では、負パリティの第一励起状態として考えられる $J^P = 1/2^-$ を持つ状態の質量が 1800 MeV 程度と見積もられており、1600-1700 MeV 付近に状態を観測した実験結果を再現できない。一方で、メソンとバリオンの散乱によって動力的に共鳴を生成するカイラルユニタリー法を用いた研究では、1600 MeV 程度の軽い $1/2^-$ を持つ Ξ 励起状態が記述出来ていたが、実験データがない状態で研究が行われたために、崩壊幅など最新の実験結果と定量的に一致する結果は得られていない。

こうした背景から本研究では、 Ξ 励起状態のうち実験データが揃ってきている $\Xi(1620)$ および $\Xi(1690)$ に着目し、動力的な手法であるカイラルユニタリー法を用いた数値計算を行うことで、 Ξ 励起状態の物理的性質の解明を目指す。

まず、実験結果を解析するにあたり、 $\Xi(1620)$ についての理論の先行研究 [14] がどのよ

うな $\pi^+\Xi^-$ スペクトルを持つかを調べるため、散乱振幅の計算を 5.1 節で行った。結果として、散乱振幅はポールを持つものの、幅が広いために Belle の $\pi^+\Xi^-$ スペクトルに現れていたピークが、先行研究のモデルでは再現されないことを確かめた。

次に 5.2 節では、Belle 実験で報告された質量と崩壊幅をもとに、複素エネルギー平面上での散乱振幅でのポールを仮定し、理論の先行研究をもとに、仮定したポールを再現するモデル (Model 1) を構築した。Model 1 では、実軸上の $\pi^+\Xi^-$ の散乱振幅の虚部が $\Xi(1620)$ のピークを示すことを確認した。また、Belle の報告では $\Xi(1620)$ のピークは $\bar{K}\Lambda$ の閾値 (1613.3 MeV) にかなり近い位置に存在していたが、Belle の解析ではこの閾値の影響を考慮しない Breit-Wigner 振幅によるフィットが行われていた。本研究の Model 1 と Belle 実験のスペクトラムフィットに用いられた Breit-Wigner 分布との比較を行うことで、閾値によるピークに対する影響 (閾値効果) を定量的に議論した。

5.3 節では、ALICE 実験で決定された $K^-\Lambda$ 散乱長を再現するモデル (Model 2) を構築し、閾値付近でカusp状の $K^-\Lambda$ 弾性散乱振幅を持つことを確認した。Model 2 で複素エネルギー平面上での $\Xi(1620)$ に対応するポール探索を行った結果、物理的な散乱に直接影響する位置にポールが現れないことを確認した。

Model 2 のおおよそのポール位置を見積もるために、5.4 節では、得られた $K^-\Lambda$ 散乱長から複素エネルギー平面上のポール位置を推定する計算を行った。結果として、散乱長から予測されたリーマン面上に Model 1 と Model 2 の両方のモデルのポールが出現することを確認した。一方で、散乱長の絶対値が大きい Model 1 では実際のポール位置から 10 MeV の精度で再現できていたが、Model 2 では散乱長の絶対値が小さいことからポール位置に 180 MeV 程度のずれが生じた。

5.2 節および 5.3 節を受けて、5.5 節では、Model 1 の構築に用いた、Belle 実験で得られた質量と崩壊幅から予測される位置に複素平面上のポールがあるという仮定と、Model 2 の構築に用いた、ALICE 実験で決定された $K^-\Lambda$ 散乱長が両立するかについて、双方の実験の誤差を含めた計算を行い、両立しないことを示した。ただし、Model 1 の前提となっているポール位置 $z = M_R - i\Gamma/2$ は、閾値効果があるためにピークの位置及び半値幅は必ずしも一致しないため、Belle 実験とのより詳細な比較のためには、 $\pi^+\Xi^-$ スペクトラムとのフィットが必要である。

6 節では $\Xi(1620)$ と同様に閾値近傍にピークが観測された $\Xi(1690)$ についての解析を行った。 $\Xi(1690)$ の質量と崩壊幅からポールを仮定すると、 $K^-\Sigma^+$ および $\bar{K}^0\Sigma^0$ の閾値に近く、 $\Xi(1620)$ とは異なり二つの閾値から影響を受けることが考えられる。そのため、6.2 節では二つの閾値から影響を受けるピークの閾値効果についての議論を行った。結果、先行研究 [16] の理論モデルのうち Set A では閾値効果によってピークが歪むことが確認

されたが、実験のスペクトルに合わせたモデルである Set fit ではピークが現れなかった。

これは複素平面上のポールが物理的な散乱に直接寄与しない位置に存在したことから、ピークとして現れなかったものの、 $\bar{K}^0\Sigma^0$ の閾値に近い位置に存在したことから、カスプ構造を強調したものと考えられる。この理論モデルでは過去の実験のスペクトルを再現できていたことから、実際の $\Xi(1690)$ についてもポールが物理的な散乱に寄与しないリーマン面に存在している可能性がある。

7.2 今後の展望

5章および6章の数値計算では、いずれもメソン-バリオンの二体散乱についての散乱振幅を計算し、 $\pi\Xi$ スペクトルを議論した。しかし、Belle 実験での観測は $\Xi_c \rightarrow \pi\pi\Xi$ の3体崩壊の $\pi\Xi$ スペクトルであること、 Ξ_c を経由した崩壊にのみ $\Xi(1620)$ と $\Xi(1690)$ のピークが現れていることから、 $\Xi_c \rightarrow \pi\pi\Xi$ 崩壊についての理論の先行研究 [39] をもとに数値計算を行うことで、実験結果とスペクトルを直接比較する。この手法では、 $\Xi(1620)$ の Model 1 のようにポール仮定を必要としないことから、ALICE 実験で決定された $K^-\Lambda$ 散乱長との比較にとって、より良い手法になると考えられる。また、このスペクトルから Belle の結果を用いた $\Xi(1690)$ に対する新しい理論モデルの構築も行うことができ、Belle の実験結果のように $\Xi(1620)$ と $\Xi(1690)$ の両方を同時に生成する可能性についても検証を行う。

なお、 $\Xi(1620)$ 、 $\Xi(1690)$ は構成子クォーク模型での計算で実験データを再現できていないことから、通常の3クォークではない内部構造を持つことが考えられる。本論文で作成した構築した理論モデルに基づいて Ξ 励起状態の内部構造を決定することも目指したい。内部構造を決定する手法としては、自然なくりこみ条件に基づいた内部構造の解析 [29] や留数を用いた複合性の評価 [40] を応用することが考えられる。

付録 A

付録

A.1 基底の変換

Belle 実験に基づいて Model 1 を構築した 5.2 節と、ALICE 実験に基づいて Model 2 を構築した 5.3 節では、観測した Ξ の電荷が異なることから、基底も異なっている。そのため、数値計算を行うにあたっては規定の変換が必要となる。以下では、それぞれのメソンバリオン結合チャンネルごとに基底の変換の計算を行う。

A.1.1 $\pi\Xi$ の基底変換

本節では $\pi\Xi$ のチャンネルの場合の計算を行う。まず、電荷が中性の物理規定 (Model 1 での基底) を考えると、 $\pi^0\Xi^0$ と $\pi^+\Xi^-$ がアイソパートナーとして存在する。これらに含まれる π 及び Ξ のアイソスピン I 及びその第三成分 I_3 を $|I, I_3\rangle$ の形式で表すと

$$\begin{aligned} |\pi^0\rangle &= |1, 0\rangle, |\Xi^0\rangle = |1/2, 1/2\rangle \\ |\pi^+\rangle &= -|1, 1\rangle, |\Xi^-\rangle = -|1/2, -1/2\rangle, \end{aligned} \tag{A.1}$$

と表現できる。これらの π と Ξ の線形結合によって表される状態は $|I = 1/2, I_3 = 1/2\rangle$ と $|I = 3/2, I_3 = 1/2\rangle$ の二通りが存在しており、Clebsch-Gordan 係数を用いて

$$\begin{aligned} |I = 1/2, I_3 = 1/2\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^0\Xi^0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^+\Xi^-\rangle \\ |I = 3/2, I_3 = 1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0\Xi^0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^+\Xi^-\rangle, \end{aligned} \tag{A.2}$$

と表される。

次に、 $Q = -1$ の電荷を持った状態を考える。この時の結合チャンネルは $\pi^-\Xi^0$ と $\pi^0\Xi^-$ があり、(A.1) と同様に $|I, I_3\rangle$ の形式で表すと

$$\begin{aligned} |\pi^-\rangle &= |1, -1\rangle, |\Xi^0\rangle = |1/2, 1/2\rangle \\ |\pi^0\rangle &= |1, 0\rangle, |\Xi^-\rangle = -|1/2, -1/2\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

と表現できる。Clebsch-Gordan 係数を用いると、 $I_3 = -1/2$ の状態は

$$\begin{aligned} |I = 1/2, I_3 = -1/2\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0\Xi^-\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^-\Xi^0\rangle \\ |I = 3/2, I_3 = -1/2\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0\Xi^-\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^-\Xi^0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

と表される。

この先の計算のために式 (A.4) の結果を行列形式で表してみよう。まず、電荷が 0 の中性状態は

$$\begin{pmatrix} |1/2\rangle \\ |3/2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\pi^0\Xi^0\rangle \\ |\pi^+\Xi^-\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\Omega^0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

と表され、 $Q = -1$ の電荷を持つ状態は

$$\begin{pmatrix} |1/2\rangle \\ |3/2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\pi^0\Xi^-\rangle \\ |\pi^-\Xi^0\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\Omega^- = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

と表される。

A.1.2 $\bar{K}\Sigma$ の基底変換

$\bar{K}\Sigma$ についても $\pi\Sigma$ と同様に計算を行うことができる。

$$\begin{pmatrix} |1/2\rangle \\ |3/2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\bar{K}^0\Sigma^0\rangle \\ |K^-\Sigma^+\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\Omega^0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{pmatrix} |1/2\rangle \\ |3/2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |K^-\Sigma^0\rangle \\ |\bar{K}^0\Sigma^-\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\Omega^- = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

A.1.3 C_{ij} の導出

ここまで求めてきた Ω^0 を用いて、電荷 $Q = -1$ を持つ場合の群論的係数を導出する。 $Q = 0$ での群論的係数を 2×2 の行列である M^{P0} 、 $Q = -1$ での群論的係数を 2×2 の行列で表される M^{P-} とすると、 Ω^0, Ω^- と 2×2 の行列 M^I を用いて

$$M^I = \Omega^0 M^{P0} (\Omega^0)^{-1} \quad (\text{A.13})$$

$$M^{P-} = (\Omega^-)^{-1} M^I \Omega^- \quad (\text{A.14})$$

として導出できる。以下では $\bar{K}\Sigma$ および $\pi\Sigma$ に関する群論的係数の計算を行う。

まずは $\bar{K}\Sigma$ どうし、もしくは $\pi\Sigma$ どうしの群論的係数について計算する。 $Q = 0$ の場合の群論的係数はいずれも

$$M^{P0} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

であるので、これを用いて計算すると以下の通りになる。

$$\begin{aligned}
M^I &= \Omega^0 M^{P0} (\Omega^0)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{4}{3}} & 2\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6\sqrt{\frac{1}{9}} & -\sqrt{\frac{8}{9}} + \sqrt{\frac{8}{9}} \\ \sqrt{\frac{2}{9}} - \sqrt{\frac{2}{9}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
M^{P-} &= (\Omega^-)^{-1} M^I \Omega^- \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

次に $\bar{K}\Lambda$ と $\pi\Sigma$ の二つ結合チャンネルの間の群論的係数を求める。電荷 $Q = 0$ での群論的係数は

$$M^{P0} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

であるので同様に計算すると以下の通りになる。

$$\begin{aligned}
M^I &= \Omega^0 M^{P0} (\Omega^0)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ 2\sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

表 A.1 電荷 $Q = -1$ における群論的係数

	$\bar{K}^0\Sigma^-$	$K^-\Sigma^0$	$K^-\Lambda$	$\pi^-\Xi^0$	π^0Xi^-	ηXi^-
$\bar{K}^0\Sigma^-$	1	$\sqrt{2}$	0	0	$1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3/2}$
$K^-\Sigma^0$	$\sqrt{2}$	0	0	$1/\sqrt{2}$	-1/2	$-\sqrt{3/4}$
$K^-\Lambda$	0	0	0	$-\sqrt{3/2}$	$-\sqrt{3/4}$	-3/2
$\pi^-\Xi^0$	0	$1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3/2}$	1	$\sqrt{2}$	0
π^0Xi^-	$1/\sqrt{2}$	-1/2	$-\sqrt{3/4}$	$\sqrt{2}$	0	0
ηXi^-	$-\sqrt{3/2}$	$-\sqrt{3/4}$	-3/2	0	0	0

$$\begin{aligned}
 M^{P^-} &= (\Omega^-)^{-1} M^I \Omega^- \\
 &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

A.2 チャージドにおける群論的係数

前節で求めた群論的係数を表 A.1 にまとめる。

A.3 式 (3.39) の全断面積 σ の導出

$$\begin{aligned}
\sigma(E) &= \sum_l 4\pi(2l+1)|f_l(E)|^2 \\
&= \sum_l 4\pi(2l+1) \left| \frac{s_l(E) - 1}{2ip} \right|^2 \\
&= \sum_l 4\pi(2l+1) \frac{|s_l(E)|^2 - s_l(E) - s_l^*(E) + 1}{4 \times 2\mu E} \\
&= \sum_l 4\pi(2l+1) \frac{|s_l(E)|^2 - \exp\{2i\delta_l(E)\} - \exp\{-2i\delta_l(E)\} + 1}{8\mu E} \\
&= \sum_l 4\pi(2l+1) \frac{1 - \cos 2\delta_l - i \sin 2\delta_l - \cos(-2\delta_l) - i \sin(-2\delta_l) + 1}{8\mu E} \\
&= \sum_l 4\pi(2l+1) \frac{1 - \cos 2\delta_l - i \sin 2\delta_l - \cos 2\delta_l + i \sin 2\delta_l + 1}{8\mu E} \tag{A.21} \\
&= \sum_l 4\pi(2l+1) \frac{1 - 2\cos 2\delta_l + 1}{8\mu E} \\
&= \sum_l 4\pi(2l+1) \frac{1 - 2[1 - 2\sin^2 \delta_l] + 1}{8\mu E} \\
&= \sum_l \frac{16\pi(2l+1)}{8\mu E} \sin^2 \delta_l(E) \\
&= \sum_l \frac{2\pi(2l+1)}{\mu E} \sin^2 \delta_l(E)
\end{aligned}$$

A.4 LS 方程式の導出

まず、ハミルトニアン

$$H = H_0 + V, \tag{A.22}$$

に対するシュレディンガー方程式は

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \tag{A.23}$$

であり、式 (A.23) に式 (A.22) を代入すると、

$$(H_0 + V) |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (\text{A.24})$$

となる。式 (A.4) を変形して

$$V |\psi\rangle = (E - H_0) |\psi\rangle, \quad (\text{A.25})$$

とする。このとき

$$V \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow 0 \quad (\text{A.26})$$

として、新たな波動関数

$$H_0 |\phi\rangle = E |\phi\rangle, \quad (\text{A.27})$$

を定義する。移項すると、

$$(E - H_0) |\phi\rangle = 0, \quad (\text{A.28})$$

となる。式 (A.28) は 0 と等価であるので、式 (A.25) の右辺に足して、

$$\begin{aligned} V |\psi\rangle &= (E - H_0) |\psi\rangle - (E - H_0) |\phi\rangle \\ &= (E - H_0)(|\psi\rangle - |\phi\rangle), \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

としても等号が成立する。ここで右辺を波動関数のみの形にするべく、両辺に $(E - H_0)^{-1}$ を左側からかけて、

$$\begin{aligned} V |\psi\rangle &= (E - H_0)(|\psi\rangle - |\phi\rangle) \\ (E - H_0)^{-1} V |\psi\rangle &= (E - H_0)^{-1} (E - H_0)(|\psi\rangle - |\phi\rangle) \\ (E - H_0)^{-1} V |\psi\rangle &= (|\psi\rangle - |\phi\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

とし、 G を

$$G = (E - H_0)^{-1} \quad (\text{A.31})$$

と定義すると、式 (A.30) は

$$\begin{aligned} (E - H_0)^{-1} V |\psi\rangle &= (|\psi\rangle - |\phi\rangle) \\ GV |\psi\rangle &= (|\psi\rangle - |\phi\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

となる。式 (A.32) を移項して、

$$|\psi\rangle = GV |\psi\rangle + |\phi\rangle \quad (\text{A.33})$$

とした (A.33) に、左から V をかけると、

$$V|\psi\rangle = VGV|\psi\rangle + V|\phi\rangle \quad (\text{A.34})$$

となる。ここで、

$$V|\psi\rangle = T|\phi\rangle \quad (\text{A.35})$$

として、式 (A.34) を書き換えると

$$T|\phi\rangle = VGT|\phi\rangle + V|\phi\rangle \quad (\text{A.36})$$

となる。これが演算子形式の Lippmann-Schwinger 方程式である。

A.5 \mathcal{L}_{QCD} のクォーク部分の計算

まず、計算における表記を簡単にするために式 (4.5) より、クォークの左巻きおよび右巻きを

$$q_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} q = P_R q \quad (\text{A.37})$$

$$q_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} q = P_L q \quad (\text{A.38})$$

と表す。 $\gamma_5^2 = 1$ であるので、 P_L を二乗すると

$$\begin{aligned} P_L^2 &= \frac{(1 - \gamma_5)^2}{4} \\ &= \frac{1 - 2\gamma_5 + \gamma_5^2}{4} \\ &= \frac{1 - 2\gamma_5 + 1}{4} \\ &= \frac{1 - \gamma_5}{2} \\ &= P_L, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

となる。 P_R についても同様に

$$\begin{aligned} P_R^2 &= \frac{(1 + \gamma_5)^2}{4} \\ &= \frac{1 + 2\gamma_5 + \gamma_5^2}{4} \\ &= \frac{1 + 2\gamma_5 + 1}{4} \\ &= \frac{1 + \gamma_5}{2} \\ &= P_R, \end{aligned} \tag{A.40}$$

となる。 P_L および P_R の関係は

$$\begin{aligned} P_L P_R &= \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 + \gamma_5}{2} \\ &= \frac{1 - \gamma_5^2}{4} \\ &= \frac{1 - 1}{4} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{A.41}$$

である。

また、

$$\bar{q} = q^\dagger \gamma^0 \tag{A.42}$$

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5 \tag{A.43}$$

の関係および

$$\begin{aligned} \{\gamma_5, \gamma^0\} &= 0 \\ \gamma_5 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma_5 &= 0 \\ \gamma_5 \gamma^0 &= \gamma^0 \gamma_5, \end{aligned} \tag{A.44}$$

の γ_5 と γ^0 の交換関係を用いると

$$\begin{aligned}
\bar{q}_L &= q_L^\dagger \gamma^0 \\
&= q^\dagger P_L \gamma^0 \\
&= q^\dagger \frac{1 - \gamma_5^\dagger}{2} \gamma^0 \\
&= q^\dagger \frac{\gamma^0 - \gamma_5 \gamma^0}{2} \\
&= q^\dagger \frac{\gamma^0 + \gamma^0 \gamma_5}{2} \\
&= q^\dagger \gamma^0 \frac{1 + \gamma_5}{2} \\
&= q^\dagger \gamma^0 P_R \\
&= \bar{q} P_R,
\end{aligned} \tag{A.45}$$

となる。また、

$$q = q_R + q_L \tag{A.46}$$

$$\bar{q} = \bar{q}_R + \bar{q}_L, \tag{A.47}$$

の関係を持つ。これらの前提をもとに QCD のラグランジアン \mathcal{L}_{QCD} のクォーク部分の計算を行っていく。 $\bar{q}(i\not{D} - m_q)q$ を展開すると、

$$\begin{aligned}
\bar{q}(i\not{D} - m_q)q &= (\bar{q}_L + \bar{q}_R)(i\not{D} - m_q)(q_L + q_R) \\
&= (\bar{q}_L + \bar{q}_R)i\not{D}(q_L + q_R) - m_q(\bar{q}_L + \bar{q}_R)(q_L + q_R) \\
&= (\bar{q}P_R + \bar{q}P_L)i\gamma_\mu D(qP_L + qP_R) - m_q(\bar{q}P_R + \bar{q}P_L)(qP_L + qP_R),
\end{aligned} \tag{A.48}$$

となる。以下では項ごとに分けて計算を行う。まずは第一項について見ていく。

第一項では、 γ_μ に対して P_L と P_R の両方がかかる項と、いずれか片方のみがかかる項の二つに分けられる。以下ではそれぞれについて計算する。まず、いずれか片方の P が γ_μ を挟む形でかかる場合を考えると

$$\begin{aligned}
P_R \gamma_\mu P_R &= P_R \left(\gamma_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \\
&= P_R \left(\frac{\gamma_\mu}{2} + \frac{\gamma_\mu \gamma_5}{2} \right) \\
&= P_R \left(\frac{\gamma_\mu}{2} - \frac{\gamma_5 \gamma_\mu}{2} \right) \\
&= P_R \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma_\mu \right) \\
&= P_R P_L \gamma_\mu = 0,
\end{aligned} \tag{A.49}$$

となって、消えることがわかる。一方で、異なる P が挟むようにかかる場合は

$$\begin{aligned}
P_R \gamma_\mu P_L &= P_R \left(\gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \\
&= P_R \left(\frac{\gamma_\mu}{2} - \frac{\gamma_\mu \gamma_5}{2} \right) \\
&= P_R \left(\frac{\gamma_\mu}{2} + \frac{\gamma_5 \gamma_\mu}{2} \right) \\
&= P_R \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma_\mu \right) \\
&= P_R P_R \gamma_\mu \\
&= P_R \gamma_\mu,
\end{aligned} \tag{A.50}$$

となる。つまり、異なる P のかかる項である $P_R \gamma_\mu P_L$ および $P_L \gamma_\mu P_R$ のみが残るので、第一項は

$$\begin{aligned}
(\bar{q}_L + \bar{q}_R) i \not{D} (q_L + q_R) &= (\bar{q} P_R + \bar{q} P_L) i \gamma_\mu D (q P_L + q P_R) \\
&= i \bar{q} P_L \gamma_\mu D q P_R + i \bar{q} P_R \gamma_\mu D q P_L \\
&= i \bar{q}_R \not{D} q_R + i \bar{q}_L \not{D} q_L,
\end{aligned} \tag{A.51}$$

と、右巻き成分と左巻き成分が分離した和の形で書ける。

次に $\bar{q}(i \not{D} - m_q)q$ の第二項を計算すると、

$$\begin{aligned}
m_q (\bar{q}_L + \bar{q}_R) (q_L + q_R) &= m_q (\bar{q}_L q_L + \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L + \bar{q}_R q_R) \\
&= m_q (\bar{q} P_R P_L q + \bar{q} P_R P_R q + \bar{q} P_L P_L q + \bar{q} P_L P_R q) \\
&= m_q (0 + \bar{q} P_R P_R q + \bar{q} P_L P_L q + 0) \\
&= m_q (\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L) \\
&= \bar{q}_L m_q q_R + \bar{q}_R m_q q_L,
\end{aligned} \tag{A.52}$$

となり、こちらは右巻きと左巻きが混在した形で現れる。

こうして得られた第一項と第二項を組み合わせると

$$\begin{aligned}
\bar{q}(i \not{D} - m_q)q &= (\bar{q}_L + \bar{q}_R) (i \not{D} - m_q) (q_L + q_R) \\
&= \bar{q}_R i \not{D} q_R + \bar{q}_L i \not{D} q_L - (\bar{q}_L m_q q_R + \bar{q}_R m_q q_L),
\end{aligned} \tag{A.53}$$

と書けることがわかる。

謝辞

本研究の遂行にあたり、指導教官の東京都立大学理学研究科の兵藤准教授には大変お世話になりました。ここに深謝の意を表します。同研究科の角野教授、安田教授には、本論文の作成にあたり、副査として適切なお助言を賜りました。感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Particle Data Group, R. L. Workman *et al.*, PTEP **2022**, 083C01 (2022).
- [2] Belle, S. K. Choi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 262001 (2003), hep-ex/0309032.
- [3] LHCb, R. Aaij *et al.*, Phys. Rev. Lett. **115**, 072001 (2015), 1507.03414.
- [4] LHCb, R. Aaij *et al.*, Phys. Rev. Lett. **122**, 222001 (2019), 1904.03947.
- [5] LHCb, R. Aaij *et al.*, Nature Phys. **18**, 751 (2022), 2109.01038.
- [6] LHCb, R. Aaij *et al.*, Nature Commun. **13**, 3351 (2022), 2109.01056.
- [7] A. Hosaka, T. Iijima, K. Miyabayashi, Y. Sakai, and S. Yasui, PTEP **2016**, 062C01 (2016), 1603.09229.
- [8] F.-K. Guo *et al.*, Rev. Mod. Phys. **90**, 015004 (2018), 1705.00141, [Erratum: Rev.Mod.Phys. 94, 029901 (2022)].
- [9] N. Brambilla *et al.*, Phys. Rept. **873**, 1 (2020), 1907.07583.
- [10] G. Gamow, Z. Phys. **51**, 204 (1928).
- [11] Belle, M. Sumihama *et al.*, Phys. Rev. Lett. **122**, 072501 (2019), 1810.06181.
- [12] ALICE, S. Acharya *et al.*, Phys. Rev. C **103**, 055201 (2021), 2005.11124.
- [13] N. Isgur and G. Karl, Phys. Rev. D **18**, 4187 (1978).
- [14] A. Ramos, E. Oset, and C. Bennhold, Phys. Rev. Lett. **89**, 252001 (2002), nucl-th/0204044.
- [15] WA89, M. I. Adamovich *et al.*, Eur. Phys. J. C **5**, 621 (1998), hep-ex/9710024.
- [16] T. Sekihara, PTEP **2015**, 091D01 (2015), 1505.02849.
- [17] T. Nishibuchi and T. Hyodo, EPJ Web Conf. **271**, 10002 (2022), 2208.14608.
- [18] S. Apsell *et al.*, Phys. Rev. Lett. **23**, 884 (1969).
- [19] A. d. Bellefon, A. Berthon, and P. Billoir, Nuovo Cim. A **28**, 289 (1975).
- [20] R. T. Ross, T. Buran, J. L. Lloyd, J. H. Mulvey, and D. Radojicic, Phys. Lett. B **38**, 177 (1972).

- [21] E. Briefel *et al.*, Phys. Rev. D **16**, 2706 (1977).
- [22] S. R. Borenstein *et al.*, Phys. Rev. D **5**, 1559 (1972).
- [23] J. K. Hassall *et al.*, Nucl. Phys. B **189**, 397 (1981).
- [24] Amsterdam-CERN-Nijmegen-Oxford, C. Dionisi *et al.*, Phys. Lett. B **80**, 145 (1978).
- [25] Belle, K. Abe *et al.*, Phys. Lett. B **524**, 33 (2002), hep-ex/0111032.
- [26] BGR, G. P. Engel, C. B. Lang, D. Mohler, and A. Schäfer, Phys. Rev. D **87**, 074504 (2013), 1301.4318.
- [27] C. Garcia-Recio, M. F. M. Lutz, and J. Nieves, Phys. Lett. B **582**, 49 (2004), nucl-th/0305100.
- [28] J. A. Oller and U. G. Meissner, Phys. Lett. B **500**, 263 (2001), hep-ph/0011146.
- [29] T. Hyodo, D. Jido, and A. Hosaka, Phys. Rev. C **78**, 025203 (2008), 0803.2550.
- [30] T. Hyodo and D. Jido, Prog. Part. Nucl. Phys. **67**, 55 (2012), 1104.4474.
- [31] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **17**, 616 (1966).
- [32] Y. Tomozawa, Nuovo Cim. A **46**, 707 (1966).
- [33] R. H. Dalitz and S. F. Tuan, Phys. Rev. Lett. **2**, 425 (1959).
- [34] T. N. Truong, Phys. Rev. Lett. **61**, 2526 (1988).
- [35] A. Dobado, M. J. Herrero, and T. N. Truong, Phys. Lett. B **235**, 134 (1990).
- [36] A. Dobado and J. R. Pelaez, Phys. Rev. D **47**, 4883 (1993), hep-ph/9301276.
- [37] N. Kaiser, P. B. Siegel, and W. Weise, Nucl. Phys. A **594**, 325 (1995), nucl-th/9505043.
- [38] E. Oset and A. Ramos, Nucl. Phys. A **635**, 99 (1998), nucl-th/9711022.
- [39] K. Miyahara, T. Hyodo, M. Oka, J. Nieves, and E. Oset, Phys. Rev. C **95**, 035212 (2017), 1609.00895.
- [40] T. Hyodo, D. Jido, and A. Hosaka, Phys. Rev. C **85**, 015201 (2012), 1108.5524.