

有限レンジ補正を考慮した弱束縛関係式による
エキゾチックハドロンの構造

Internal structure of exotic hadrons by
the weak-binding relation with finite range correction

東京都立大学理学研究科 物理学専攻
衣川友那

2022年5月

概要

通常のバリオン（クォーク3つ）やメソン（クォーク反クォーク対）以外の内部構造を持つ状態をエキゾチックハドロンと呼ぶ。エキゾチックハドロンはQCDで排除されない状態であるにもかかわらず、実験で長い間観測されなかったが、近年、加速器実験の進展によってエキゾチックハドロンの候補が見つかるようになり、注目を集めている。エキゾチックハドロンの内部構造の解明は強い相互作用の非摂動的な理解につながると期待され、理論と実験の双方から盛んに研究されている。

エキゾチックハドロンのとりうる内部構造の1つとして、ハドロンが構成要素となり、性質を保ったまま束縛したハドロン分子状態があげられる。束縛状態のハドロン分子成分の割合は、複合性と呼ばれる指標で定量的にあらわされる。本研究では弱束縛状態の複合性をモデル非依存に解析できる弱束縛関係式に注目する。弱束縛関係式は低エネルギー普遍性に基づいており、弱束縛状態であればハドロン系以外にも原子核系や原子系等、異なる長さスケールを持つ物理系にも適用できる強力な手法である。現在までに、弱束縛関係式を用いて重陽子や $\Lambda(1405)$ 等の内部構造の解析が行われてきた。

しかし、弱束縛関係式は系の最も大きな長さスケールが相互作用距離であると仮定して導出されたため、系の特徴的長さスケールの1つである有効レンジの効果は考えられていない。実際に、重陽子が結合する2核子散乱の有効レンジは1.75 fmであり、相互作用距離1.43 fmに比べて無視できず、有効レンジの効果による有限レンジ補正を弱束縛関係式に対して考える必要がある。

本研究ではまず、低エネルギー普遍性と弱束縛関係式の関係について議論する。次に、有効レンジと相互作用距離を持つモデルを用いて、弱束縛関係式のレンジ補正の方法を提案する。また、数値計算により、レンジ補正が弱束縛関係式の適用可能範囲を広げることが示す。さらに、レンジ補正を施した弱束縛関係式を実際の物理系に適用し、複合性を見積もることで束縛状態の内部構造を議論する。最後に、不安定状態の弱束縛関係式のレンジ補正を議論する準備として、不安定状態の有効的な記述方法について触れる。

目次

第 1 章	導入	5
1.1	エキゾチックハドロン	6
1.2	弱束縛関係式	10
1.3	低エネルギー普遍性	13
1.4	本研究の目的	16
第 2 章	有効場の理論と弱束縛関係式	18
2.1	ゼロレンジモデル	18
2.2	有効レンジモデル	22
2.2.1	散乱振幅の計算	23
2.2.2	散乱長と有効レンジ	28
2.2.3	くりこみ	29
2.2.4	ゼロレンジ極限	31
2.3	共鳴モデル	32
2.4	束縛状態に対する弱束縛関係式の導出	34
2.4.1	有効場の理論	35
2.4.2	散乱振幅	37
2.4.3	複合性	38
2.4.4	弱束縛関係式	39
2.4.5	有効レンジ展開による改良	41
2.5	不安定状態における弱束縛関係式	42
第 3 章	弱束縛関係式とレンジ補正	45
3.1	弱束縛関係式の有効レンジによるレンジ補正	45
3.1.1	弱束縛関係式と低エネルギー普遍性	45

3.1.2	有効場の理論での束縛状態の複合性と有効レンジ	47
3.1.3	有効レンジモデルを用いたレンジ補正の議論	49
3.1.4	有効レンジ展開の高次項	53
3.2	有効レンジの起源	55
3.2.1	有効場の理論と有効レンジ	55
3.2.2	有効レンジと弱束縛関係式	58
3.3	弱束縛関係式の改良	59
第 4 章	数値計算によるレンジ補正の妥当性の検証	60
4.1	弱束縛関係式の適用可能性の評価	61
4.1.1	誤差の評価	61
4.1.2	有用性の評価	62
4.2	有効レンジモデルでの数値計算	63
4.2.1	有効レンジモデルにおけるベアパラメタ ρ_0 と r_e の範囲	65
4.2.2	弱束縛関係式による X の評価	68
4.2.3	弱束縛関係式が有用であるパラメタ領域	69
4.3	有効レンジ展開による改良の検証	72
第 5 章	物理系への応用	76
5.1	物理系の散乱長と有効レンジ	76
5.2	有効レンジモデルでの適用可能範囲との比較	80
5.3	複合性の見積もり	82
第 6 章	不安定状態への拡張	86
6.1	不安定状態の有効的な記述方法	86
6.2	ゼロレンジ極限の有効レンジモデルの X の中心値の特徴	89
6.3	ゼロレンジ極限での有効レンジモデルの不安定状態の複合性	90
第 7 章	まとめと展望	91
付録 A	解析計算	94
A.1	運動量積分	94
A.1.1	I_0 の計算	94
A.1.2	I_{2n} の計算	96

A.2	有効レンジモデルの計算	97
A.2.1	相互作用 Hamiltonian の書き換え	97
A.2.2	LS 方程式の行列表示	99
A.2.3	行列式の計算	101
A.2.4	$N(E, k', k)$ の計算	103
A.2.5	H_{free} の固有エネルギーの計算	104
A.2.6	弱束縛関係式の計算	107
付録 B	数値計算	110
B.1	複合性 X の中心値と誤差	110
参考文献		113

第 1 章

導入

素粒子は、物質の基本的な構成要素であり、強い相互作用をする素粒子にはクォークとグルーオンがある。強い相互作用は、自然界における 4 つの力の 1 つである基本的な相互作用であり、量子色力学 (QCD) で記述される。QCD は低エネルギーで結合定数が増大して摂動計算が破綻し、様々な興味深い現象を引き起こす。特に、カラー閉じ込めのために、クォーク、グルーオンは単体では観測されず、クォーク同士が強い相互作用で結びついた、複合粒子の状態であるハドロンの観測される自由度となる。強い相互作用の非摂動的な性質により、低エネルギーのハドロンの研究では、格子 QCD などの数値計算や、有効模型を用いたモデル計算などが用いられてきた。

多くのハドロンはクォーク 3 つ (バリオン) またはクォーク反クォーク対 (メソン) の状態であると考えられている。しかし近年の実験では、特異な構造を持つと期待されているエキゾチックハドロンと呼ばれる状態が見つかっており、その数は年々増加している。エキゾチックハドロンは詳しい内部構造が解明されていないものばかりであり、理論と実験両方の立場から構造解明に向けた研究が活発に行われている [1, 2, 3]。

この章は以下のように構成されている。まず、1.1 節でハドロンの分類法を紹介し、エキゾチックハドロンの定義とその例を挙げる。次に、1.2 節では、エキゾチックハドロンの構造の有用な解析手法の 1 つである弱束縛関係式について述べる。1.3 節では、弱束縛関係式の適用対象である弱束縛状態が従う低エネルギー普遍性について説明する。最後に、1.4 節で、先行研究の問題点を指摘し、本論文の目的と構成を述べる。なお、特に指定がない限り、 $\hbar = 1$ とした単位系を用いる。ハドロンの質量などには、 $\hbar = c = 1$ とした単位系を用いる。

1.1 エキゾチックハドロン

クォークは u, d, s, c, b, t の 6 種類あるが、ハドロンを構成するのは t クォークを除く 5 種類である。クォークはスピン $1/2$ を持ち、基底状態のハドロンはクォーク間の軌道角運動量が 0 であると考えられる。このとき、クォーク反クォーク対から構成されるメソンは、スピン 0 か 1 であり、クォーク 3 つから構成されるバリオンはスピン $1/2$ か $3/2$ のどちらかである。

ここで、 u, d, s の 3 つのクォークを組み合わせてできるハドロンの種類を考える。3 つのクォークの組み合わせ方は、 u, d, s のそれぞれのクォークの入れ替えに対するフレーバー SU(3) 対称性を考えることで分類できる。メソンを構成するクォーク q と反クォーク \bar{q} は SU(3) の $\mathbf{3}$ 表現と $\bar{\mathbf{3}}$ 表現に対応している。 $\mathbf{3}$ 表現と $\bar{\mathbf{3}}$ 表現を組み合わせると

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \quad (1.1)$$

より、 $\mathbf{1}$ 表現 (1 重項) と $\mathbf{8}$ 表現 (8 重項) を得ることができる。軌道角運動量が 0 の基底状態のメソンのスピンは 0 か 1 のどちらかであり、反クォークの固有パリティ $P = -$ を考慮すると、スピンパリティ $J^P = 0^-$ と $J^P = 1^-$ のメソンが基底状態となる。 $J^P = 0^-$ の擬スカラーメソン 8 重項は π, K, \bar{K}, η_8 で構成される*¹。対称性が厳密であれば、同じ多重項に属する粒子の質量は縮退するが、 s クォークは u, d クォークより重く、SU(3) 対称性は破れているから、 π, K, \bar{K}, η_8 の縮退は解けている。さらに、対称性の破れによって、擬スカラーメソン 1 重項に属する状態と同じ量子数 (アイソスピン $I = 0$ とストレンジネス $S = 0$) を持つ 8 重項の状態 (η_8) が混ざり、物理的な η と η' になる。 $J^P = 1^-$ のベクトルメソンは 1 重項と 8 重項の混合の割合が大きく理想混合を起こし、物理的な 9 個のメソン $\rho, K^*, \bar{K}^*, \omega, \phi$ が存在する (図 1.1)。

メソンと同様に、 u, d, s クォークを組み合わせてバリオンを作ることを考える。クォーク ($\mathbf{3}$ 表現) を 3 つ組み合わせると

$$\begin{aligned} (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}) \otimes \mathbf{3} &= (\bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}) \otimes \mathbf{3} \\ &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

となり、 $\mathbf{1}$ 表現 (1 重項)、 $\mathbf{8}$ 表現 (8 重項)、 $\mathbf{10}$ 表現 (10 重項) を得る。スピンも考慮すると、このうち基底状態になるのは $\mathbf{8}$ 表現と $\mathbf{10}$ 表現であることがわかり、 $J^P = 1/2^+$ のバ

*¹ π はアイソスピンの表記で π^0, π^+, π^- となる $I = 1$ の多重項をまとめて表している。同様に K は K^+, K^0, \bar{K} は K^-, \bar{K}^0 をまとめて表記している。荷電表記で状態数を数えると 8 重項に属する 8 種のメソンがあることがわかる。

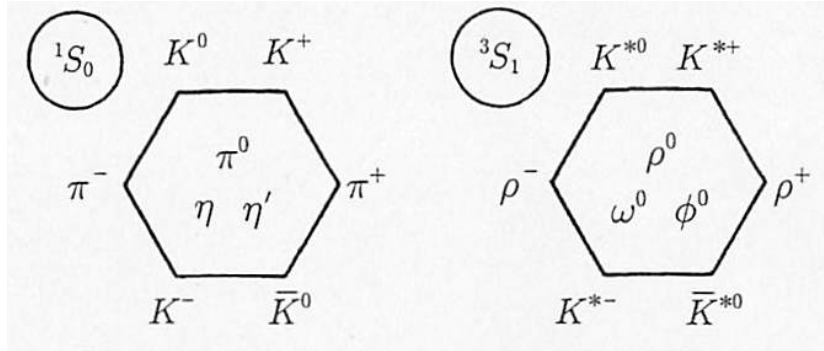


図 1.1 u, d, s の組み合わせから得られる $q\bar{q}$ メソン 8 重項と 1 重項。 1S_0 が $J^P = 0^-$ 擬スカラーメソン、 3S_1 が $J^P = 1^-$ ベクトルメソン。文献 [4] から引用。

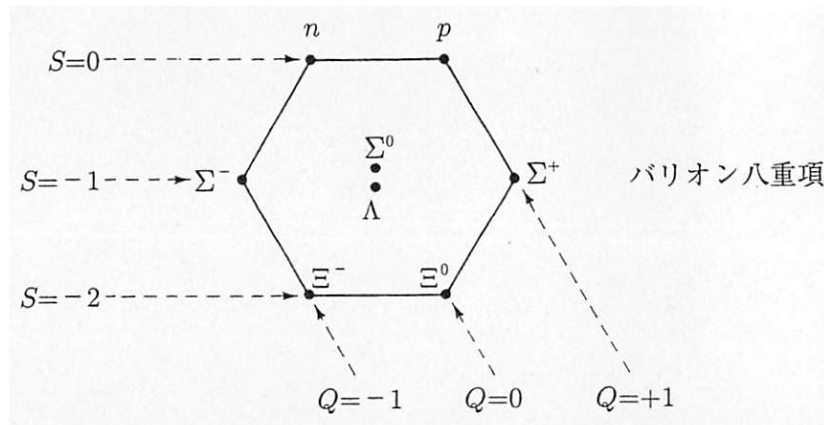


図 1.2 u, d, s の組み合わせから得られる $J^P = 1/2^+$ の qqq バリオン 8 重項。文献 [4] から引用。

リオン 8 重項または $J^P = 3/2^+$ のバリオン 10 重項が得られる。具体的には、 $J^P = 1/2^+$ のバリオン 8 重項は N, Λ, Σ, Ξ を含み、 $J^P = 3/2^+$ のバリオン 10 重項は $\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$ を含む。

次に、 u, d, s クォークと c クォークの組み合わせで作るメソンを考える。 c クォークは u, d, s クォークと比べて重く、 u, d, s の入れ替えである $SU(3)$ 変換に対して c クォークは不変 ($\mathbf{1}$ 表現) である。 c クォークと $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ クォークの組み合わせは

$$\mathbf{1} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \bar{\mathbf{3}}, \quad (1.3)$$

となり、 $\bar{\mathbf{3}}$ 表現 (3 重項) が得られる。 $J^P = 0^-$ の擬スカラーメソンには D, D_s 、 $J^P = 1^-$ のベクトルメソンには D^*, D_s^* がある。 \bar{c} と u, d, s クォークで構成される反粒子はそれぞれ

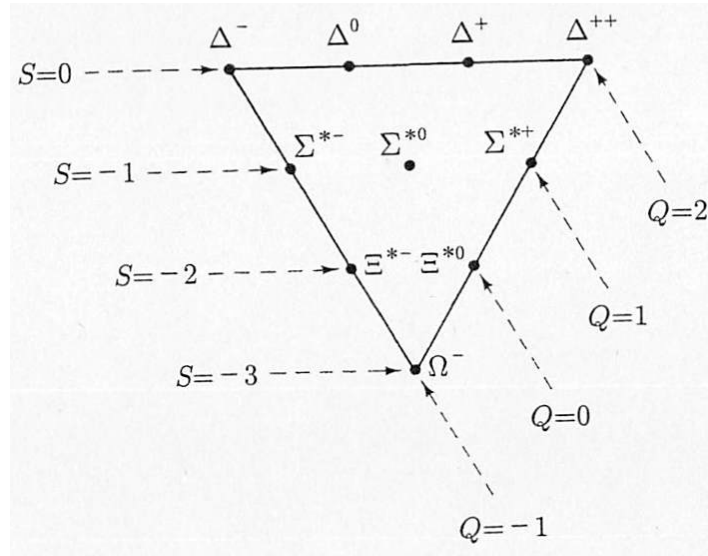


図 1.3 u, d, s の組み合わせから得られる qqq バリオン 10 重項。文献 [4] から引用。

れ同様に考えて、 \bar{D}, \bar{D}_s と \bar{D}^*, \bar{D}_s^* である*2。これまでの実験によって、 b クォークを含むハドロンや、基底状態のハドロンのみならず励起状態のハドロンも含め、2022 年現在では約 370 種が観測されており、Particle Data Group (PDG) によってまとめられている [5]。観測されているハドロンはほとんど上にあげた分類に属している。

上にあげたハドロン以外の内部構造を持つと考えられているものをエキゾチックハドロンと呼ぶ。ハドロンの励起状態の解析にはハドロンをクォークが 3 つ (qqq) またはクォーク反クォーク対 ($q\bar{q}$) として記述した構成子クォークモデルが用いられ、成功をおさめてきた [6, 7]。クォークモデルの予言と一致しない状態は qqq か $q\bar{q}$ 以外の内部構造を持つと期待され、エキゾチックハドロンの候補と考えられている。例として、スカラーメソンである $f_0(980)$ や $a_0(980)$ 、負パリティバリオン $\Lambda(1405)$ がある [2, 8, 9, 10]。ただし、クォークモデルの予言を用いてエキゾチックハドロンを同定するのは基準が明確ではないことに注意する。明確にエキゾチックハドロンを定義するには、保存量子数を用いる方法がある [10]。ハドロンを特徴づける保存量子数には、クォーク数 (q の数と \bar{q} の数の差)、アイソスピン I 、ストレンジネス S 、チャーム C などがある。状態を保存量子数で分類したときに、 qqq か $q\bar{q}$ で構成できない量子数を持つ状態を量子数エキゾチックと定義する。現在 PDG [5] に記載されている状態の中で、量子数エキゾチックハドロンであ

*2 D はアイソスピンの表記で D^0, D^+ となる $I = 1/2$ の多重項をまとめて表している。同様に \bar{D} は D^-, \bar{D}^0 をまとめて表記している。 D は c クォークを含み、 \bar{D} は \bar{c} クォークを含むが、 K は \bar{s} を含み、 \bar{K} は s クォークを含むという違いに注意する。

るのは3つ ($J^{PC} = 1^{-+}$ を持つ $\pi_1(1400), \pi_1(1600)$ 、 $I = 1, S = +1$ を持つ $X(5568)^{\pm}$) である。2020年に発見された $C = -1, S = +1$ を持つ $X(2900)$ [11] と2021年に発見された $C = +2$ をもつ T_{cc} [12, 13] も含めると、現在発見されている量子数エキゾチックな状態は5つのみである。発見されている通常のハドロンの数に比べて、量子数エキゾチックな状態の数が極端に少ないという事実は、QCDから自明に導かれることではなく、現在のハドロン物理における大きな課題になっている。

近年の実験では、重いクォーク (c, b クォーク) のセクターでエキゾチックハドロン候補が見つかるようになってきた。エキゾチックハドロン候補の代表例として、 $X(3872)$ 、ペンタクォーク P_c 、テトラクォーク T_{cc} を紹介する。 $X(3872)$ は2003年に Belle によって、 $B^{\pm} \rightarrow K^{\pm} \pi^+ \pi^- J/\psi$ 崩壊における $\pi^+ \pi^- J/\psi$ の不変質量分布で発見された [14]。 $c\bar{c}$ としてチャームoniumを計算したクォークモデルにおいて、 $D\bar{D}$ の閾値より低いエネルギーでは良い精度で予言と実験は一致していた [7]。しかし、 $X(3872)$ に対応する状態は理論で予言されておらず、 $c\bar{c}$ 以外のエキゾチックな構造を持つと期待されている。後の実験においてさらに $D\bar{D}$ の閾値より高いエネルギーにある状態が複数見つかったが、クォークモデルの予言と実験結果が一致しておらず、 $X(3872)$ を含めて XYZ メソンと呼ばれている [3]。 P_c は $\Lambda_b \rightarrow J/\psi p K^-$ 崩壊^{*3}において、 $J/\psi p$ の不変質量分布で LHCb により発見された [15, 16]。 P_c は構成子クォークの組み合わせが $uudc\bar{c}$ である $J/\psi p$ に崩壊するので、崩壊前の P_c は $uudc\bar{c}$ のエキゾチックな5クォーク状態であると考えられている^{*4}。また、 T_{cc} は LHCb による高エネルギー陽子陽子衝突実験において、 $D^0 D^0 \pi^+$ スペクトル中に発見された [12, 13]。 T_{cc} は構成子クォークの組み合わせが $c\bar{c}u\bar{u}d$ の $D^0 D^0 \pi^+$ に崩壊するので、最低でも $cc\bar{u}\bar{d}$ の状態であり、 $C = +2$ の量子数エキゾチックな状態であると考えられている。

エキゾチックハドロンのとりうる状態として、ハドロンを構成要素としたハドロン分子状態や、4つ以上のクォークが結合したマルチクォーク状態、構成子グルーオンを含むグルーオンハイブリッド状態が考えられている [1, 2, 3]。エキゾチックな構造の具体例として、バリオンの励起状態がとりうる構造を考える (図 1.4)。構成子クォークモデルでは、閉じ込めポテンシャル中のエネルギー準位に構成子クォークを配置して考える。バリオンの基底状態では、3つの正パリティのクォークを最低エネルギーの s 軌道に詰めるので、

^{*3} Λ_b は s クォークの代わりに b クォークを含む Λ 。

^{*4} OZI 則より、 $P_c \rightarrow J/\psi p$ 過程において $c\bar{c}$ は反応の途中で対生成、対消滅しないと考えられる。よって、崩壊前の P_c は $c\bar{c}$ を含んでいるといえる。 P_c は構成子クォークによる表記 $uudc\bar{c}$ ではエキゾチックな構造を持つと考えられるが、原理的には P_c の量子数は qqq で構成できるので、保存量子数を用いた定義ではエキゾチックではない。しかし、 P_c のような状態も、量子数がエキゾチックな状態と関連すると考えられている。

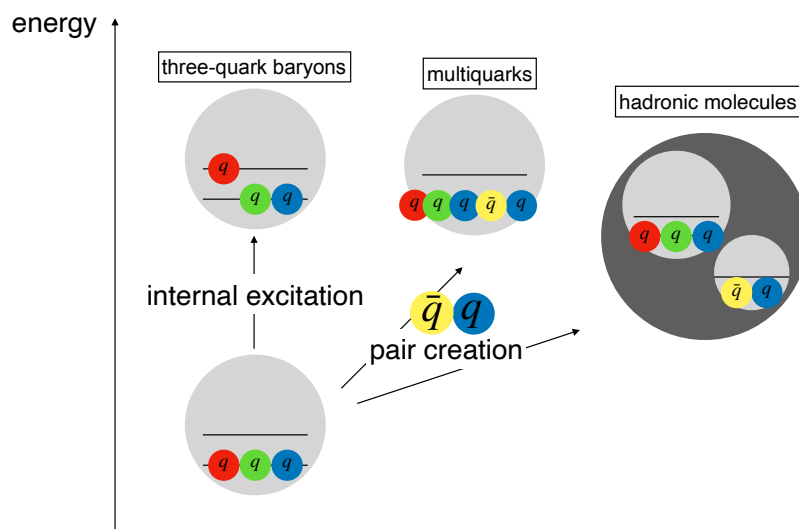


図 1.4 エキゾチックハドロンがとりうる内部構造（マルチクォーク、ハドロン分子）の模式図。

全体のパリティは $P = +$ になる。クォークモデルでは、3つのうち1つのクォークを p 軌道に内部励起させることで負パリティ $P = -$ の励起状態を記述できる。一方 QCD では $q\bar{q}$ の対生成を起こすことができるので、クォーク5つ以上のマルチクォーク状態やメソンとバリオンが束縛したハドロン分子状態を実現できると考えられている。マルチクォーク状態は全体でカラー 1 重項であり、クォークを構成要素とし4つ以上のクォークがコンパクトに束縛している状態である。最もエネルギーの低い5クォーク状態は、4つのクォークと負パリティの反クォークが s 軌道に配置されているのでパリティが $P = -$ になる。ハドロン分子状態は、ハドロン間の相互作用によって、構成要素のハドロンが性質を保ったままゆるく束縛している状態である。最低エネルギーのメソン・バリオン分子状態は、基底状態の $1/2^+$ のバリオンと 0^- のメソンを s 波で束縛させた状態なので、パリティは $P = -$ になる。ここにあげた3つの状態のパリティは全て $P = -$ であり、同じ量子数を持ちうるから、観測されるバリオン励起状態は可能なすべての状態の重ね合わせになる。よって、ハドロンの内部構造を調べるには、混合しているそれぞれの状態の重みを調べる必要がある。

1.2 弱束縛関係式

エキゾチックハドロン候補の内部構造をハドロン分子状態かどうかという観点で議論したい。そのために、様々な状態の重ね合わせである物理的なハドロンの波動関数の中で、

ハドロン分子成分の重みを定量的に表す指標である複合性 X [17] を考える。ハドロンの束縛状態において、形式的に、複合性は規格化された束縛状態の波動関数 $|\Psi\rangle$ にハドロン分子状態 $|\text{molecule}\rangle$ を見出す確率

$$X = |\langle \text{molecule} | \Psi \rangle|^2, \quad (1.4)$$

と定義される。具体的に 2.4 で述べるように、 $|\text{molecule}\rangle$ は相互作用のない Hamiltonian の散乱固有状態の和として定義されている。 $|\text{molecule}\rangle$ 以外の成分 $|\text{others}\rangle$ (例えば、マルチクォーク状態など) とし、 $|\text{others}\rangle$ を観測する確率が 0 以上であれば、この定義から、 $0 \leq X \leq 1$ となる。

規格化条件を課した束縛状態の波動関数を $|\text{molecule}\rangle$ と $|\text{others}\rangle$ で展開すると、

$$|\Psi\rangle = \sqrt{X} |\text{molecule}\rangle + \sqrt{1-X} |\text{others}\rangle, \quad (1.5)$$

となる。 X が 1 に近い場合、束縛状態の波動関数にハドロン分子状態 $|\text{molecule}\rangle$ が占める割合が大きくなり、束縛状態はハドロン分子成分が支配的であるといえる。逆に X が 0 に近い場合、ハドロン分子以外の成分 $|\text{others}\rangle$ が占める割合が大きくなるから、ハドロン分子的でない成分が重要といえる。束縛状態の波動関数が式 (1.5) のように展開できる場合、ハドロンに限らず複合性を定義できるので、例えば $|\Psi\rangle$ が原子・分子などの束縛状態でも複合性を定義することができる^{*5}。

複合性 X を観測量から定量的に見積もる方法の 1 つとして、弱束縛関係式 [18, 19, 20]

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}. \quad (1.6)$$

が挙げられる。ここで、 a_0 は散乱長、 $R \equiv 1/\sqrt{2\mu B}$ は束縛エネルギー B と換算質量 μ から決まる長さスケール (束縛状態の半径)、 R_{typ} は系の典型的長さであり、例えば相互作用の到達距離である。ここで、束縛エネルギー B が小さいとき、束縛状態の半径 $R \equiv 1/\sqrt{2\mu B}$ は大きくなる。束縛エネルギー B が十分小さいとき、 $R \gg R_{\text{typ}}$ となって弱束縛関係式の誤差項 $\mathcal{O}(R_{\text{typ}}/R)$ を無視することができる。このとき、弱束縛関係式は

$$a_0 = R \frac{2X}{1+X}, \quad (1.7)$$

となり、観測量 a_0 と R のみから複合性 X を決定することができる。

^{*5} 複合性が定義できない例として、ハドロンをクォークの自由度の基底で展開する場合は挙げられる。閉じ込めがあり、クォークは散乱の漸近状態が存在しないから $|\text{molecule}\rangle$ が定義できず、式 (1.5) のような展開ができない。

X は波動関数を用いて定義されているので、一般には観測量ではない、つまりモデルに依存した量であることに注意する。一方、 a_0 と R はモデル非依存な観測量であるから、(1.6) 式の括弧の中の X の項と誤差項 $O(R_{\text{typ}}/R)$ の項の和はモデルに依存しないとわかる。(1.6) 式は一般の束縛状態に対して成立するが、弱束縛でない場合に複合性を決定するには誤差項をモデルなどで計算する必要があり、 X の値は計算に用いたモデルに依存する。一方、誤差項が無視できる弱束縛状態に対しては、 X の項をモデル非依存に決定できる。

エキゾチックハドロン候補の内部構造に関する研究の多くはクォークモデルなどのモデル計算を通じて行われている [1, 2, 3]。モデル計算を用いた議論ではモデルの状態空間 (モデル空間) を設定したうえで、結合定数などのパラメタをいくつか導入し、モデルから導いた物理量が実際の実験結果と一致するようにパラメタを決定する。しかし、パラメタが多くなればなるほど、任意の物理量を再現できるようになってしまうため、モデル空間に含まれない状態がパラメタにくりこまれていしまい、モデル空間以外の寄与がモデルの結果に暗に含まれてしまう。よって、モデル計算だけではエキゾチックハドロン候補の内部構造の十分な議論ができない。一方、モデル非依存に系を解析することができれば、パラメタによる不定性を含まないため、強力な手法となり得る。弱束縛関係式は、モデル非依存に系を解析することのできる手法であり、エキゾチックハドロン候補の内部構造を観測量のみから解析することができるため、エキゾチックハドロン研究において重要な手法の 1 つである。

弱束縛関係式を最初に提唱したのは Weinberg である。Weinberg は重陽子の内部構造が 2 核子的な複合状態かどうかを判定するために、素粒子性 Z を定義し ($Z = 1 - X$)、 Z で書かれた (1.6) 式で重陽子が複合的であると仮定した結果と、核子散乱の実験データに整合性があることを示し、重陽子が複合的であると結論づけた [18]。弱束縛関係式のハドロンへの応用は 2000 年代から始まり、文献 [21] では、Weinberg の議論をスペクトル関数を用いて不安定状態に拡張し、 $f_0(980)$ と $a_0(980)$ に応用した。文献 [22] において、文献 [21] での議論が複数のチャンネルがある場合に拡張された。1 チャンネル散乱中の閾値に近い共鳴状態についての弱束縛関係式が文献 [23] で議論され、 $\Lambda_c(2595)$ に適用された。文献 [19, 20] では、弱束縛関係式を不安定状態に適用するための拡張が有効場の理論を用いて行われ、拡張された弱束縛関係式が $\Lambda(1405)$, $f_0(980)$, $a_0(980)$ に適用された。文献 [24] では、浅いバーチャル状態への拡張が行われた。また、複合性の値が有効レンジによってどのような補正を受けるのか (レンジ補正) についても議論され、重陽子と、 DK 散乱と結合した $D_{s0}^*(2317)$ に応用された。一方、モデルを用いた複合性の値の計算方法も、以下の文献で議論されている。文献 [25] では s 波の場合の複合性を散乱振幅の極

の留数とループ関数から求める方法が確立された。同様の議論が文献 [26] で s 波以外にも拡張され、 p 波の $\pi\pi$ 散乱と結合する ρ に応用された。文献 [27] では、複合性を用いて共鳴状態での閾値に近い極の振る舞いと物理的な波動関数の関係が議論された。文献 [28] では波動関数を用いた複合性の定義が提案され、 $\Lambda(1405)$, $f_0(980)$, ρ , K^* の解析に応用された。文献 [29] では、極の留数から計算される確率として解釈できるような量が提案され、様々なハドロンの複合性が計算された。文献 [30] では、共鳴状態の極の留数と 2 体の波動関数の関係から波動関数のノルムとしての複合性の定義が提案され、カイラルユニタリ法を用いて複合性を計算することで $\Lambda(1232)$ における πN 成分が無視できないことが示された。文献 [31] では、エネルギー依存性のある相互作用において、チャンネル消去が原因で複合性が 1 からずれることが示され、複合性のモデル依存性が議論された。文献 [32] では、従来の弱束縛関係式では無視されていた form factor の影響をとりれたレンジ補正による改良が提案され、重陽子に応用された。文献 [33] では、カイラルユニタリ法を用いたハドロンの間相互作用の定式化から、散乱長と有効レンジ、束縛エネルギーを用いて複合性を求める手法が提案され、重陽子と $D_{s0}^*(2317)$ 、 $D_{s1}^*(2460)$ に応用された。

1.3 低エネルギー普遍性

弱束縛関係式から束縛状態の内部構造をモデル非依存に決定できるのは、束縛エネルギーが十分小さい弱束縛の場合であることを述べた。弱束縛状態を持つ系は、一般に低エネルギー普遍性 [34, 35] に従う。普遍性とは、系の微視的な詳細によらず異なる系が共通の法則に従うことをいう。例として、多体問題における相転移の臨界現象があげられる。臨界点の近傍では相関長が系の微視的な長さスケールに比べて非常に大きくなり、長さの次元をもつ物理量が相関長でスケールされるようになる。このとき、臨界指数は相互作用の詳細によらず、系の持つ対称性と次元のみによって普遍的に決まる。具体的に、気液相転移の臨界指数とイジングモデルの強磁性相転移の臨界指数は等しいことが知られている。一方、ほとんどの場合、原子やハドロンの少数系では性質が全く異なるので普遍的な現象は起こらないように思える。実際に、原子系の典型的長さスケールはおおよそ $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ であり、ハドロンの典型的長さスケールはおおよそ $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ である。2つの系のスケールはおおよそ 10^5 倍違い、異なる相互作用（電磁気力と強い相互作用）がはたらいっている。しかし、以下にみるような条件を満たす低エネルギーの少数系には普遍性（低エネルギー普遍性）が成り立つことが知られている。

簡単な例として、非相対論的な 2 粒子系を考える。相対座標を \mathbf{r} とし、2つの粒子間のポテンシャル $V(r)$ は短距離力の球対称ポテンシャルであり、 R_{typ} より大きい r で十分

速く 0 になるとする。エネルギーを E 、換算質量を μ とすると、相対波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ の Schrödinger 方程式は

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\Delta + V(r)\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (1.8)$$

となる。ここで、角運動量が 0 の s 波の場合を考えることにし、 $\psi(\mathbf{r}) = (4\pi)^{-1/2}u(r)/r$ とおくと、動径方向の Schrödinger 方程式は

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + V(r) - E\right)u(r) = 0, \quad (1.9)$$

となる。運動量 k を $k^2 = 2\mu E \Leftrightarrow E = k^2/(2\mu)$ とすると、波動関数の $r \rightarrow \infty$ の漸近形は

$$u(r) \propto \sin(kr + \delta(k)), \quad (1.10)$$

となる。ここで、 $\delta(k)$ は散乱の情報を持つ位相差である。まず、エネルギーが正 $E = k^2/(2\mu) > 0$ で散乱が起こる場合、s 波散乱の散乱長 a_0 は位相のずれ $\delta(k)$ によって

$$a_0 = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta(k)}{k}, \quad (1.11)$$

と定義される。 E が小さい低エネルギーのとき、運動量 $k = \sqrt{2\mu E}$ も小さくなり*6、位相差は (1.11) 式より

$$\tan \delta(k) = -a_0 k + \mathcal{O}(k^2), \quad (1.12)$$

となる。次に、束縛エネルギー $B > 0$ の束縛状態がある場合を考える。束縛状態の波動関数では Schrödinger 方程式のエネルギーが負 $E = -B = k^2/(2\mu) < 0$ であるから、運動量を純虚数 $k = i\kappa$ ($\kappa > 0$) で置き換えて

$$\begin{aligned} u(r) &\propto \sin(i\kappa r + \delta(i\kappa)) \\ &= \sin(i\kappa r) \cos(\delta(i\kappa)) + \cos(i\kappa r) \sin(\delta(i\kappa)) \\ &= \cos \delta(i\kappa) [\sin(i\kappa r) + \cos(i\kappa r) \tan \delta(i\kappa)] \\ &= \cos \delta(i\kappa) \left[\frac{e^{-\kappa r} - e^{+\kappa r}}{2i} + \frac{e^{-\kappa r} + e^{+\kappa r}}{2} \tan \delta(i\kappa) \right] \\ &= \frac{\cos \delta(i\kappa)}{2} \left[\left(\tan \delta(i\kappa) + \frac{1}{i} \right) e^{-\kappa r} + \left(\tan \delta(i\kappa) - \frac{1}{i} \right) e^{+\kappa r} \right], \end{aligned}$$

*6 波数は波長の逆数なので、 $k \ll R_{\text{typ}}^{-1}$ となり、ポテンシャルの幅という系の微視的詳細を無視しても良いことになる。このとき、波長 λ は $R_{\text{typ}} \ll \lambda$ となり、ポテンシャルの詳細を感じられなくなるほど長くなると考えられる。

となり、束縛状態の波動関数は無限遠で 0 になる必要があるので、無限遠で発散する $e^{+\kappa r}$ の係数を 0 にするために

$$\tan \delta(i\kappa) = \frac{1}{i} = -i, \quad (1.13)$$

が従う。 B が小さい弱束縛のとき、 $\kappa = \sqrt{2\mu B}$ も小さくなるので、(1.12) 式を用いると

$$-i = \tan \delta(i\kappa) = -ia_0\kappa + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad (1.14)$$

となる。 $\mathcal{O}(\kappa^2)$ を無視すると、 κ, a_0 の関係は

$$\kappa = \frac{1}{a_0}, \quad (1.15)$$

となるので、束縛エネルギーは

$$B = \frac{\kappa^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu a_0^2}, \quad (1.16)$$

となる。低エネルギーの極限での散乱長と運動量の関係 (1.15) から得られた (1.16) 式より、弱束縛のとき、束縛エネルギーは散乱長の逆 2 乗でスケールされることがわかる。 B を束縛状態の半径 R にかきなおすと

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\mu B}} = a_0, \quad (1.17)$$

となり、束縛状態の半径は散乱長と一致することもわかる。(1.16) 式と (1.17) 式には、ポテンシャルの幅 R_{typ} などの系の相互作用の詳細が含まれておらず、 B と R は散乱長のみ依存する。よって、(1.16) 式と (1.17) 式は、ポテンシャルの具体形などの系の詳細によらず成り立つ。このように、微視的な詳細が異なる系が同じ法則で説明され、散乱長で他の物理量がスケールされることを低エネルギー普遍性という*7。例えば、(1.16) 式は、弱束縛の状態がある場合、系の典型的長さスケールが全く異なるハドロン系でも原子系でも成り立つ。5 章で述べるように、2 核子が束縛した重陽子の半径 $R = 4.32$ fm に対し、散乱長 $a_0 = 5.42$ fm、 ^4He 原子 2 体が束縛した ^4He dimer では $R = 182.2$ B.R. (Bohr 半径) に対し $a_0 = 189$ B.R. であるから、どちらの系でも (1.17) 式が近似的に成り立っている。本研究で扱う弱束縛関係式も低エネルギー普遍性と密接に関係していることを後に議論する。実際に、重陽子や ^4He dimer での (1.17) 式からのずれが弱束縛関係式によって複合性と関係づけられる。

*7 散乱長が大きい 2 体系にもう 1 つ同種粒子を加えた 3 体系では、束縛状態が無限個現れる Efimov 効果 [36, 34, 35] が知られている。

$E > 0$ の s 波の 2 体散乱の情報は散乱振幅 $f(k)$ に含まれ、 $f(k)$ の低エネルギー極限 $k \rightarrow 0$ の性質は散乱長で決定される。有限の運動量 k での $f(k)$ は位相差 $\delta(k)$ を用いて

$$f(k) = \frac{1}{k \cot \delta(k) - ik}, \quad (1.18)$$

と定義される。有効レンジ展開では、散乱振幅の分母の $k \cot \delta(k)$ を k の偶数ベキで展開する：

$$k \cot \delta(k) = -\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2} k^2 + \mathcal{O}(k^4). \quad (1.19)$$

ここで、 k^2 の係数の r_e は有効レンジとよばれ、長さの次元を持つ量である。(1.19) 式を a_0 について解くと

$$a_0 = -\frac{\tan \delta(k)}{k} + \mathcal{O}(k^2), \quad (1.20)$$

となり、 $k \rightarrow 0$ の極限で (1.19) 式の散乱長は (1.11) 式の定義と整合的であることがわかる。

1.4 本研究の目的

本研究の目的は、有効レンジの大きさ $|r_e|$ ^{*8} が相互作用距離 R_{typ} と比べて無視できない場合に弱束縛関係式を改良し、改良した弱束縛関係式を用いてエキゾチックハドロン候補の内部構造を複合性を用いてモデル非依存に調べることである。弱束縛関係式は Weinberg によって提唱されて以来、重陽子だけでなく、エキゾチックハドロン候補である $\Lambda(1405)$ 、 $f_0(980)$ 、 $a_0(980)$ などの内部構造の確立に貢献してきた [18, 20]。しかし、弱束縛関係式の導出では、有効レンジ $|r_e|$ が相互作用距離に比べて小さい ($|r_e| \lesssim R_{\text{typ}}$) と仮定されていた。よって、 $|r_e|$ が相互作用距離に比べて大きい系 ($|r_e| \gtrsim R_{\text{typ}}$) には、従来の弱束縛関係式はそのまま適用できない。本研究では、 $|r_e| \gtrsim R_{\text{typ}}$ となる系に対しても弱束縛関係式を適用するために、 $|r_e|$ の影響を取り入れるレンジ補正を行う。さらに、レンジ補正を施した弱束縛関係式をエキゾチックハドロン候補の系に適用し、束縛状態の複合性を評価する。レンジ補正を施した弱束縛関係式の適用が期待される系として、1.1 節で述べた $X(3872)$ が挙げられる。 $X(3872)$ の相互作用距離は π 中間子交換から $R_{\text{typ}} \sim 1.43$ fm と見積もられ、有効レンジは文献 [37] による実験データの解析により

^{*8} 有効レンジの上限 (Wigner bound) は因果律によって決まっているが、下限は決まっていないので負になり得る。よって有効レンジの絶対値をとった。

$|r_e| = 5.34 \text{ fm}$ と報告されている。よって、相互作用距離より有効レンジの絶対値の方が大きく、 $|r_e| \gtrsim R_{\text{typ}}$ となるから、 $X(3872)$ の内部構造の正確な解析にはレンジ補正を施した弱束縛関係式を適用する必要があると期待される。

本論文の構成は次のようになっている。まず、2章で先行研究 [43] 倣い、本研究で扱う手法である有効場の理論を説明し、文献 [20] にしたがって弱束縛関係式を導出する。次に、3章で弱束縛関係式のレンジ補正を議論し、レンジ補正を施した改良を提案する。4章では、数値計算によってレンジ補正による改良の妥当性と弱束縛関係式の適用可能範囲について議論する。5章では、レンジ補正を施した弱束縛関係式を実際のハドロン系やハイパー核の系、原子系に適用し、束縛状態の複合性を見積もることで、内部構造を解析する。最後に、不安定状態に対する弱束縛関係式へのレンジ補正を考えるための準備として、6章で不安定状態の系の取り扱いについて議論する。3章の準備的な内容は研究会プロシーディングス [38] で、4章の準備的な内容は研究会プロシーディングス [39] で、5章の準備的な内容は研究会プロシーディングス [40] で報告されている。

第 2 章

有効場の理論と弱束縛関係式

有効場の理論とは、ある微視的な理論の低エネルギーの物理を場の理論で記述する手法であり、QED に対する Euler-Heisenberg 理論 [41] や QCD に対するカイラル摂動論 [42] などが挙げられる。本研究では、弱束縛状態をもつハドロン 2 体散乱の低エネルギー極限を記述する非相対論的有効場の理論を扱う。2 体の同種 Boson の散乱を例にとり 2.1 節ではゼロレンジモデル、2.2 節では有効レンジモデル、2.3 節では共鳴モデルを、文献 [43] に従って導入する。1.2 節で紹介した弱束縛関係式は観測量から束縛状態の複合性を決めることができる。弱束縛関係式は Weinberg によって重陽子の内部構造を決定するために提案され [18]、共鳴状態のハドロンに応用するために不安定状態へ拡張された [20]。2.4 節では、先行研究 [20] に従い弱束縛関係式を非相対論的有効場の理論を用いて導出する。2.5 節では、先行研究 [20] において不安定状態へ拡張された弱束縛関係式について述べる。

2.1 ゼロレンジモデル

ゼロレンジモデルとは、2 体の同種 Boson の散乱振幅が散乱長 a_0 のみで記述される有効場の理論である。ゼロレンジモデルの Hamiltonian は、

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi + \frac{\lambda_0}{4} (\psi^\dagger \psi)^2, \quad (2.2)$$

で与えられる。 $\psi(\mathbf{x})$ は Boson の場、 m は Boson の質量、 λ_0 は結合定数である。ここで、(2.2) 式の場合は全て同じ座標 \mathbf{x} で定義されており、以下では必要のない限り \mathbf{x} を略記

する。この Hamiltonian の相互作用項

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda_0}{4} (\psi^\dagger \psi)^2, \quad (2.3)$$

は Boson 場の座標が全て同じ点なので、相互作用が点状の接触相互作用を表している。 ψ は Boson 場なので、交換関係を用いて

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{x}')] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.4)$$

と量子化する。

ゼロレンジモデルの散乱振幅を導出するために、まず、off-shell の T 行列 $T(E, \mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv \langle \mathbf{k}' | \hat{T}(E) | \mathbf{k} \rangle$ を求める。 E は散乱エネルギー、 \mathbf{k} と \mathbf{k}' はそれぞれ始状態と終状態の相対運動量、 $|\mathbf{k}\rangle$ は ψ 2 体の散乱状態を表す。次に、求めた off-shell T 行列に on-shell 条件を課し、散乱振幅 $f(k)$ と on-shell T 行列の関係から $f(k)$ を求める。 s 波散乱の場合、off-shell T 行列は運動量の角度依存性がないから $T(E, k', k)$ となり、散乱振幅 $f(k)$ は on-shell 条件

$$E = \frac{k^2}{m} = \frac{k'^2}{m}, \quad (2.5)$$

を課した T 行列

$$T_{\text{on}}(k) = T\left(\frac{k^2}{m}, k, k\right), \quad (2.6)$$

より、

$$f(k) = -\frac{m}{8\pi} T_{\text{on}}(k), \quad (2.7)$$

と与えられる。質量 m の 2 粒子系の換算質量は $\mu = m/2$ であることに注意する。相互作用 V から T 行列を計算する Lippmann-Schwinger (LS) 方程式は

$$T(E, \mathbf{k}', \mathbf{k}) = V(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{k}', \mathbf{q}) \frac{1}{E - \mathbf{q}^2/m + i0^+} T(E, \mathbf{q}, \mathbf{k}), \quad (2.8)$$

であり、係数 $1/2$ は同種 Boson の対称化因子である (図 2.1)。 $V(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ は定義より (2.3) を用いて計算すると

$$V(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv \int d^3x \langle \mathbf{k}' | \mathcal{H}_{\text{int}} | \mathbf{k} \rangle = \lambda_0, \quad (2.9)$$

となる。(2.3) 式の係数 $1/4$ は始状態、終状態それぞれ 2 通りの縮約とキャンセルする。

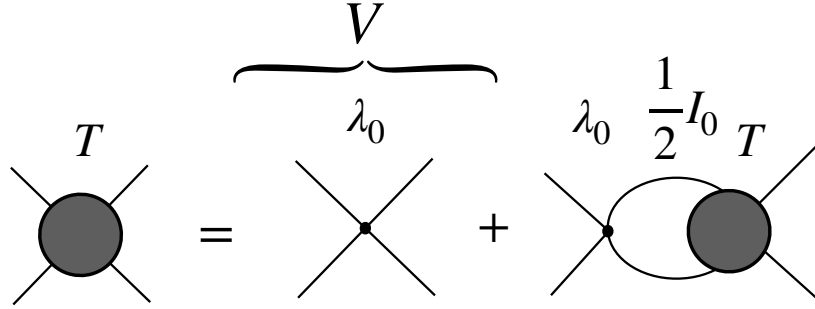


図 2.1 ゼロレンジモデルでの LS 方程式の Feynman ダイアグラム。実線は Boson のプロパゲーター、黒点は相互作用頂点、黒丸は T 行列をあらわす。

(2.9) 式より $V(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ は運動量によらない定数なので、LS 方程式に T 行列を逐次代入して展開した各項は運動量 \mathbf{k}', \mathbf{k} 依存性を持たない。よって T 行列はエネルギーのみの関数 $T(E)$ になり、LS 方程式が代数方程式

$$T(E) = \lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2} T(E) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E - q^2/m + i0^+}, \quad (2.10)$$

になる。ここで、(2.10) 式の積分を

$$I_0(E) \equiv \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E - q^2/m + i0^+}, \quad (2.11)$$

と定義すると、 T 行列は (図 2.1)

$$\begin{aligned} T(E) &= \lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2} T(E) I_0(E) \\ \left(1 - \frac{\lambda_0}{2} I_0(E)\right) T(E) &= \lambda_0 \\ T(E) &= \frac{\lambda_0}{1 - \frac{\lambda_0}{2} I_0(E)} \\ T(E) &= \frac{1}{1/\lambda_0 - I_0(E)/2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

と閉じた形で与えられる。(2.11) 式の積分は紫外発散するので、カットオフ Λ を運動量積分の上限として導入する。物理的な散乱エネルギー $E > 0$ に対し、on-shell 運動量 k を $k = \sqrt{mE}$ と定義すると、A.1.1 節の (A.8) 式より $k \ll \Lambda$ のとき

$$I_0(E) = -\frac{m}{2\pi^2} \left[\Lambda \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)\right) + i\frac{\pi}{2}k \right], \quad (2.13)$$

なので、 T 行列は

$$T(E) = \left[\frac{1}{\lambda_0} + \frac{m}{4\pi^2} \left\{ \Lambda \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{k^2}{\Lambda^2} \right) \right) + ik \frac{\pi}{2} \right\} \right]^{-1}, \quad (2.14)$$

となる。ここで、 T 行列は E のみの関数なので、 $T_{\text{on}}(k)$ は (2.14) 式の $T(E)$ と一致し、(2.7) 式より散乱振幅 $f(k)$ は

$$\begin{aligned} f(k) &= -\frac{m}{8\pi} \left[\frac{1}{\lambda_0} + \frac{m}{4\pi^2} \left\{ \Lambda \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{k^2}{\Lambda^2} \right) \right) + ik \frac{\pi}{2} \right\} \right]^{-1} \\ &= -\frac{m}{8\pi} \left[\frac{1}{\lambda_0} + \frac{m}{4\pi^2} \Lambda \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{k^2}{\Lambda^2} \right) \right) + ik \frac{m}{8\pi} \right]^{-1} \\ &= \left[-\frac{8\pi}{m} \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{m}{4\pi^2} \Lambda \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{k^2}{\Lambda^2} \right) \right) \right) - ik \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。散乱振幅の分母を k のべきで展開した有効レンジ展開

$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \mathcal{O}(k^2) - ik \right]^{-1}, \quad (2.16)$$

と比較すると、散乱長 a_0 は

$$a_0 = \frac{m}{8\pi} \frac{1}{1/\lambda_0 + (m/4\pi^2)\Lambda}, \quad (2.17)$$

となる。

ここで、運動量積分の発散を取り除くために導入したカットオフ Λ 依存性をベアパラメタ λ_0 に取り入れ、観測量である散乱長 a_0 を変化させることなく $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限をとることを考える。これをくりこみといい、全ての発散を取り除き $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限をとることができる場合、理論はくりこみ可能であるという。ゼロレンジモデルは2体散乱のセクターでくりこみ可能な理論であることが知られている。実際に λ_0 に

$$\lambda_0(\Lambda) = \left(1 - \frac{2a_0}{\pi} \Lambda \right)^{-1} \frac{8\pi}{m} a_0, \quad (2.18)$$

のように Λ 依存性をもたせ、散乱長 (2.17) 式の右辺に代入すると

$$\left[\frac{1}{a_0} - \frac{2}{\pi} \Lambda + \frac{8\pi}{m} \frac{m}{4\pi^2} \Lambda \right]^{-1} = \left[\frac{1}{a_0} - \frac{2}{\pi} \Lambda + \frac{2}{\pi} \Lambda \right]^{-1} = a_0, \quad (2.19)$$

となって、散乱長は Λ 依存性を持たない。よって、 $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限では a_0 は変化せず、散乱振幅は k の高次の項が消えて、

$$\begin{aligned} f(k) &= \left[-\frac{1}{a_0} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right) \right) - ik \right]^{-1} \\ &\rightarrow \left[-\frac{1}{a_0} - ik \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

となり、散乱長 a_0 のみで記述される。束縛状態を与える散乱振幅の極は

$$-\frac{1}{a_0} - ik = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -ia_0k = 1, \quad (2.21)$$

となり、これは 1.3 節での低エネルギー普遍性に基づく (1.15) 式と

$$a_0\kappa = -ia_0k = 1, \quad (2.22)$$

のように一致する。よって、ゼロレンジモデルは低エネルギー普遍性と整合的な結果を与える。

くりこみを行わず、与えられた結合定数 λ_0 に対し有限のカットオフ Λ を物理的に解釈することもできる。有効場の理論のカットオフの逆数は微視的理論の相互作用距離 $R_{\text{int}} \sim 1/\Lambda$ と解釈されている。 Λ は運動量積分の上限であり、有効場の理論として相互作用を点状として扱うことができる上限である。有限の相互作用距離 R_{int} を持つ微視的理論に適用するときには、 $1/\Lambda \geq R_{\text{int}}$ となる Λ を選ぶ必要があり、 $1/\Lambda$ の最小値は R_{int} となる。よって、くりこみを行い $\Lambda \rightarrow \infty$ とする極限は、相互作用距離を 0 にするゼロレンジ極限 $R_{\text{int}} \rightarrow 0$ に対応している。

2.2 有効レンジモデル

有効レンジモデルは、2 体の同種 Boson の散乱振幅がゼロレンジ極限で散乱長 a_0 と有効レンジ r_e のみで記述される有効場の理論である。Hamiltonian は次のように書ける：

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \nabla\psi^\dagger \cdot \nabla\psi + \frac{1}{4}\lambda_0(\psi^\dagger\psi)^2 + \frac{1}{4}\rho_0\nabla(\psi^\dagger\psi) \cdot \nabla(\psi^\dagger\psi). \quad (2.23)$$

ρ_0 は微分を含む接触相互作用（微分結合）の結合定数である。 $\rho_0 \rightarrow 0$ の極限で微分結合の項が 0 になり、ゼロレンジモデルの Hamiltonian (2.2) に帰着することがわかる。

2.2.1 散乱振幅の計算

有効レンジ模型の相互作用 Hamiltonian は

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{4}\lambda_0(\psi^\dagger\psi)^2 + \frac{1}{4}\rho_0\nabla(\psi^\dagger\psi) \cdot \nabla(\psi^\dagger\psi), \quad (2.24)$$

である。この Hamiltonian は

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{4}\lambda_0(\psi^2)^\dagger\psi^2 - \frac{1}{16}\rho_0[(\psi^2)^\dagger(\psi\overleftrightarrow{\nabla}^2\psi) + (\psi\overleftrightarrow{\nabla}^2\psi)^\dagger\psi^2], \quad (2.25)$$

と変形できる (A.2.1 節を参照)。

ゼロレンジモデルの場合と同様の方針で、LS 方程式

$$T(E, \mathbf{k}', \mathbf{k}) = V(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{k}', \mathbf{q}) \frac{1}{E - \mathbf{q}^2/m + i0^+} T(E, \mathbf{q}, \mathbf{k}), \quad (2.26)$$

から、有効レンジモデルの散乱振幅を導出する。Hamiltonian (2.25) から相互作用 $V(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv \langle \mathbf{k}' | H_{\text{int}} | \mathbf{k} \rangle$ を求める。(2.25) の λ_0 の項はゼロレンジモデルの結果 (2.9) と同じ寄与を与える。微分結合の項を計算するために、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を始状態の Boson 1 と Boson 2 の運動量、 $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ を終状態の運動量とすると、 \mathbf{k} と \mathbf{k}' は相対運動量なので

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{k}' = \frac{1}{2}(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2), \quad (2.27)$$

となる。 ψ に作用する $\overleftrightarrow{\nabla}^2$ の因子から、始状態の運動量 $i\mathbf{p}_1, i\mathbf{p}_2$ が得られ、 ψ^\dagger に作用する $\overleftrightarrow{\nabla}^2$ の因子から、終状態の運動量 $-i\mathbf{p}'_1, -i\mathbf{p}'_2$ が得られる。具体的な形は、(A.19) 式より

$$(i\mathbf{p}_1)^2 - 2i\mathbf{p}_1 \cdot i\mathbf{p}_2 + (i\mathbf{p}_2)^2 = -(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 = -4k^2, \quad (2.28)$$

$$(-i\mathbf{p}'_1)^2 - 2(-i\mathbf{p}'_1) \cdot (-i\mathbf{p}'_2) + (-i\mathbf{p}'_2)^2 = -(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2)^2 = -4k'^2, \quad (2.29)$$

となる。よって、 V の具体形は次のようになる：

$$V(k', k) = \lambda_0 + \rho_0(k'^2 + k^2). \quad (2.30)$$

V は運動量の大きさ k, k' には依存するが、角度依存性がないので (2.30) 式は s 波の相互作用を与える。

次に、 $T(E, k', k)$ の k', k 依存性を考える。 $G(E, q) \equiv [E - \mathbf{q}^2/m + i0^+]^{-1}$ とすると、相互作用が (2.30) 式の場合の s 波の LS 方程式は

$$T(E, k', k) = \lambda_0 + \rho_0(k'^2 + k^2) + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\lambda_0 + \rho_0(k'^2 + q^2)] G(E, q) T(E, q, k), \quad (2.31)$$

となる。ここで左辺の T を右辺に逐次代入し、 V の 2 次の項を考えると

$$T^{(2)}(E, k', k) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\lambda_0 + \rho_0(k'^2 + q^2)] G(E, q) [\lambda_0 + \rho_0(q^2 + k^2)], \quad (2.32)$$

となる。被積分関数の k, k' 依存性を見るために $C \equiv \lambda_0 + \rho_0 q^2$ とすると

$$\begin{aligned} [\lambda_0 + \rho_0(k'^2 + q^2)][\lambda_0 + \rho_0(q^2 + k^2)] &= (C + \rho_0 k'^2)(C + \rho_0 k^2) \\ &= C^2 + C\rho_0(k'^2 + k^2) + \rho_0^2 k'^2 k^2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。 q 積分を実行した後も k, k' 依存性は変わらないから、 $T^{(2)}$ は k, k' 非依存な項と $k^2 + k'^2$ に比例する項、 $k^2 k'^2$ の項のみを含むことがわかる。同様に、 T 行列の高次項も k, k' 依存性は両端の V から (2.33) 式の形のでるので、全ての V の次数において T 行列は k', k に非依存の項と $k'^2 + k^2$ の項、 $k^2 k'^2$ の項しかないことがわかり、エネルギーのみの関数 T_1, T_2, T_3 を用いて

$$T(E, k', k) = T_1(E) + T_2(E)(k'^2 + k^2) + T_3(E)k'^2 k^2, \quad (2.34)$$

と書ける。

T_1, T_2, T_3 の形で書いた T 行列 (2.34) を s 波の LS 方程式 (2.31) に代入すると、積分方程式である LS 方程式は T_1, T_2, T_3 に対する連立方程式になる (A.2.2 節参照)。文献 [44] にしたがって、運動量依存性を持つ因子の行列表記

$$V(k', k) = \sum_{0 \leq i, j \leq 1} k'^{2i} \lambda_{ij} k^{2j}, \quad (2.35)$$

$$T(E, k', k) = \sum_{0 \leq i, j \leq 1} k'^{2i} \tau_{ij}(E) k^{2j}, \quad (2.36)$$

を導入すると、(2.30) 式と (2.34) 式から、 λ と τ は

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\tau(E) = \begin{pmatrix} T_1(E) & T_2(E) \\ T_2(E) & T_3(E) \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

となる。これらの行列表記を用いると、LS 方程式は

$$\tau(E) = \lambda + \lambda g(E)\tau(E), \quad (2.39)$$

と書き直せる。ここで、 $g(E)$ は

$$g(E) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_0(E) & I_2(E) \\ I_2(E) & I_4(E) \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

である (A.2.2 節参照)。カットオフ Λ で正則化した LS 方程式の積分の項を

$$I_{2n}(E) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^{2n}\Theta(\Lambda - q)}{E - q^2/m + i0^+}. \quad (2.41)$$

とし、 $\kappa^2 \equiv (-mE - i0^+)$ とすると I_0, I_2, I_4 は

$$I_0(E) = -\frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2}\kappa \right), \quad (2.42)$$

$$I_2(E) = -\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2}\kappa \right), \quad (2.43)$$

$$I_4(E) = -\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} - \kappa^4 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2}\kappa \right), \quad (2.44)$$

となる (A.1.2 節参照)。ただし、 $\Lambda \rightarrow \infty$ で消える項は落とした。

行列表記の (2.39) 式を τ について解くと

$$\begin{aligned} \tau(E) &= [1 - \lambda g(E)]^{-1} \lambda \\ &= [\lambda^{-1}(1 - \lambda g(E))]^{-1} \\ &= [\lambda^{-1} - g(E)]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

となる。2 × 2 行列の逆行列を求める公式は

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

に対し、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

であるので、 λ^{-1} は

$$\lambda^{-1} = \frac{1}{\det \lambda} \begin{pmatrix} 0 & -\rho_0 \\ -\rho_0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-\rho_0^2} \begin{pmatrix} 0 & -\rho_0 \\ -\rho_0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \frac{1}{\rho_0} & -\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

より、

$$\lambda^{-1} - g = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}I_0 & \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{2}I_2 \\ \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{2}I_2 & -\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} - \frac{1}{2}I_4 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

であることがわかる（以下、適宜引数 E を省略する）。ここで、

$$D(E) = \left[1 + \frac{m}{12\pi^2}\Lambda^3\rho_0\right]^2 + \frac{m}{4\pi^2} \left[\left(\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2}\rho_0^2\Lambda^5\right) - 2\rho_0 \left(1 + \frac{m}{24\pi^2}\Lambda^3\rho_0\right) \kappa^2 \right] \left(\Lambda - \frac{\pi}{2}\kappa\right), \quad (2.50)$$

とすると、

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}I_0 & \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{2}I_2 \\ \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{2}I_2 & -\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} - \frac{1}{2}I_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho_0^2}D(E), \quad (2.51)$$

となる（A.2.3節を参照）。よって τ は

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\det(\lambda^{-1} - g)} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} - \frac{1}{2}I_4 & -\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{2}I_2 \\ -\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{2}I_2 & -\frac{1}{2}I_0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\rho_0^2}{D} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} - \frac{1}{2}I_4 & -\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{2}I_2 \\ -\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{2}I_2 & -\frac{1}{2}I_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \lambda_0 + \frac{\rho_0^2}{2}I_4 & \rho_0 - \frac{\rho_0^2}{2}I_2 \\ \rho_0 - \frac{\rho_0^2}{2}I_2 & \frac{\rho_0^2}{2}I_0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

なので、

$$T_1 = \frac{1}{D} \left[\lambda_0 + \frac{\rho_0^2}{2}I_4 \right], \quad (2.53)$$

$$T_2 = \frac{1}{D} \left[\rho_0 - \frac{\rho_0^2}{2}I_2 \right], \quad (2.54)$$

$$T_3 = \frac{1}{D} \frac{\rho_0^2}{2}I_0, \quad (2.55)$$

となる。

よって、 T 行列は (2.34) 式より

$$\begin{aligned} T(E, k', k) &= T_1(E) + T_2(E)(k'^2 + k^2) + T_3(E)k'^2k^2 \\ &= \frac{1}{D(E)} \left[\lambda_0 + \frac{\rho_0^2}{2}I_4(E) \right] + \frac{1}{D(E)} \left[\rho_0 - \frac{\rho_0^2}{2}I_2(E) \right] (k'^2 + k^2) \\ &\quad + \frac{1}{D(E)} \frac{\rho_0^2}{2}I_0(E)k'^2k^2, \end{aligned} \quad (2.56)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
N(E, k', k) &= \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2 \right] - 2\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1 \right) \kappa^2 \\
&\quad + \rho_0 \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right] (2\kappa^2 + k'^2 + k^2) \\
&\quad - \frac{m}{4\pi^2} \rho_0^2 \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) (\kappa^2 + k'^2)(\kappa^2 + k^2), \tag{2.57}
\end{aligned}$$

を定義すると、off-shell T 行列は

$$T(E, k', k) = \frac{N(E, k', k)}{D(E)}, \tag{2.58}$$

となる (A.2.4 参照)。

On-shell 条件を課すと、 $\kappa^2 = -mE$ より

$$k^2 = -\kappa^2 = k'^2, \tag{2.59}$$

であるので、(2.57) は k のみの関数となり、第 3、4 項が消えて

$$N(k) = \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2 \right] + 2\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1 \right) k^2, \tag{2.60}$$

となる。よって、散乱振幅 $f(k)$ は、

$$f(k) = -\frac{m}{8\pi} T_{\text{on}}(k) = -\frac{m}{8\pi} \frac{N(k)}{D(k)}, \tag{2.61}$$

である。ここで、 D を $k = i\kappa$ で表現した

$$\begin{aligned}
D(k) &= \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right]^2 + \frac{m}{4\pi^2} \left[\left(\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \rho_0^2 \Lambda^5 \right) + 2\rho_0 \left(1 + \frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right) k^2 \right] \left(\Lambda + i\frac{\pi}{2} k \right) \\
&= \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right]^2 + N(k) \left(\frac{m}{4\pi^2} \Lambda + i\frac{m}{8\pi} k \right), \tag{2.62}
\end{aligned}$$

を用いた。以上より、散乱振幅 (2.61) は

$$\begin{aligned}
f(k) &= -\frac{m}{8\pi} \frac{N(k)}{D(k)} \\
&= -\frac{m}{8\pi} \left[\frac{\left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right)^2}{N(k)} + \left(\frac{m}{4\pi^2} \Lambda + i\frac{m}{8\pi} k \right) \right]^{-1} \\
&= \left[-\frac{8\pi}{m} \frac{\left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right)^2}{N(k)} - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\
&= \left[-\frac{8\pi}{m} \frac{\left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right)^2}{\left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2 \right] + 2\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1 \right) k^2} - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1}, \tag{2.63}
\end{aligned}$$

となる。

2.2.2 散乱長と有効レンジ

(2.63) 式の散乱振幅 $f(k)$ と、有効レンジ展開

$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 + \mathcal{O}(k^4) - ik \right]^{-1}, \quad (2.64)$$

を比較し、散乱長 a_0 と有効レンジ r_e を求める。準備として、関数 $N(k)$ とその微分の $k=0$ の値を計算すると

$$N(0) = \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2 \right], \quad (2.65)$$

$$\left. \frac{dN(k)}{dk} \right|_{k=0} = 0, \quad (2.66)$$

$$\left. \frac{d^2N(k)}{dk^2} \right|_{k=0} = 4\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_3 + 1 \right), \quad (2.67)$$

となる。よって、 a_0 は

$$\begin{aligned} a_0 &= -f(0) \\ &= \left[\frac{8\pi}{m} \frac{\left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3\right)^2}{N(0)} + \frac{2}{\pi} \Lambda \right]^{-1} \\ &= \frac{m}{8\pi} \left[\frac{\left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3\right)^2}{N(0)} + \frac{2}{\pi} \frac{m}{8\pi} \Lambda \right]^{-1} \\ &= \frac{m}{8\pi} \frac{1}{\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3\right]^2 / \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi} \Lambda^5 \rho_0^2\right] + \frac{m}{4\pi^2} \Lambda}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} r_e &= \left. \frac{d^2}{dk^2} f^{-1}(k) \right|_{k=0} \\ &= -\frac{8\pi}{m} \left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0\right)^2 \left. \frac{d^2}{dk^2} \frac{1}{N(k)} \right|_{k=0} \\ &= \frac{8\pi}{m} \left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0\right)^2 \left. \frac{d}{dk} \frac{N'(k)}{N(k)^2} \right|_{k=0} \\ &= \frac{8\pi}{m} \left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0\right)^2 \left. \left[\frac{N''(k)}{N(k)^2} - \frac{2N'(k)^2}{N(k)^3} \right] \right|_{k=0} \\ &= \frac{8\pi}{m} \left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0\right)^2 \left[\frac{N''(0)}{N(0)^2} - \frac{2N'(0)^2}{N(0)^3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8\pi}{m} \left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0\right)^2 \frac{4\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0^3 + 1\right)}{\left(\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2\right)^2} \\
&= \frac{32\pi}{m} \frac{\rho_0 \left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0\right)^2 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0^3 + 1\right)}{\left(\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2\right)^2}, \tag{2.69}
\end{aligned}$$

となる。(2.69) 式より、 $\rho_0 \rightarrow 0$ の極限で有効レンジ r_e は 0 になり、(2.68) 式より散乱長 a_0 はゼロレンジモデルの結果 (2.17) に帰着することがわかる。

2.2.3 くりこみ

観測量である散乱長 a_0 と有効レンジ r_e がカットオフ非依存になるように、ベアパラメタ ρ_0, λ_0 をカットオフ Λ の関数とする。ベアパラメタが 2 つあるので、 a_0 と r_e の 2 つの観測量を有限に保って意味のある $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限を取ることができる。ここでは、以下の具体的な手順でベアパラメタの Λ 依存性を決定し、くりこみを行う。

- a_0 と r_e の式から λ_0 を消去して ρ_0, a_0, r_e の関係を求める
- ρ_0, a_0, r_e の関係から ρ_0 の Λ 依存性を求める
- $\rho_0(\Lambda)$ から λ_0 の Λ 依存性を求める
- 求めた $\rho_0(\Lambda)$ と $\lambda_0(\Lambda)$ を a_0, r_e に代入する
- $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限をとる

まず、 a_0, r_e から λ_0 を消去するために a_0 の式を

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{m}{8\pi} \frac{1}{\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3\right]^2 / \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2\right] + \frac{m}{4\pi^2} \Lambda} \\
&= \frac{m}{8\pi} \frac{\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \rho_0^2 \Lambda^5}{\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3\right]^2 + \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2\right] \frac{m}{4\pi^2} \Lambda} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{m}{8\pi} - a_0 \frac{m}{4\pi^2} \Lambda\right) \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \rho_0^2 \Lambda^5\right] = a_0 \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3\right]^2 \\
&\Leftrightarrow \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \rho_0^2 \Lambda^5\right] = \frac{a_0 \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3\right]^2}{\frac{m}{8\pi} - a_0 \frac{m}{4\pi^2} \Lambda}, \tag{2.70}
\end{aligned}$$

と書き直し、これを (2.69) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
r_e &= \frac{32\pi}{m} \left\{ \frac{\frac{m}{8\pi} - a_0 \frac{m}{4\pi^2} \Lambda}{a_0 \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3\right]^2} \right\}^2 \rho_0 \left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0\right)^2 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1\right) \\
&= \frac{32\pi}{m} \frac{\rho_0 \left[\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1\right]}{\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3\right]^2} \left(\frac{m}{8\pi a_0} - \frac{m}{4\pi^2} \Lambda\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32\pi}{m} \frac{\rho_0 \left[\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1 \right]}{\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3 \right]^2} \frac{m^2}{16\pi^4} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2a_0} \right)^2 \\
&= \frac{2m}{\pi^3} \frac{\rho_0 \left[1 + \frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right]}{\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3 \right]^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2a_0} \right)^2, \tag{2.71}
\end{aligned}$$

となる。 λ_0 が消去されたので、固定した a_0, r_e に対する ρ_0 の Λ 依存性を考える。

文献 [43] によると、 $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で有効レンジが有限であるためには $\rho_0(\Lambda)$ は

$$1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0(\Lambda) \Lambda^3 = c\Lambda^{-1/2} + \mathcal{O}(\Lambda^{-3/2}), \tag{2.72}$$

である必要がある。ここで c は定数である。これを (2.71) 式に代入し、 $\Lambda \rightarrow \infty$ で r_e が有限であることを示し、 c の値を求める。(2.72) 式より、 ρ_0 は

$$\rho_0(\Lambda) = \frac{12\pi^2}{m\Lambda^3} [-1 + c\Lambda^{-1/2} + \mathcal{O}(\Lambda^{-3/2})], \tag{2.73}$$

となるので、 r_e は

$$\begin{aligned}
r_e &= \frac{2m}{\pi^3} \frac{\rho_0(\Lambda) \left[1 + \frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0(\Lambda) \right]}{\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0(\Lambda) \Lambda^3 \right]^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2a_0} \right)^2 \\
&= \frac{2m}{\pi^3} \frac{\rho_0(\Lambda) \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0(\Lambda) \right] + \frac{1}{2} \right\}}{\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0(\Lambda) \Lambda^3 \right]^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2a_0} \right)^2 \\
&= \frac{2m}{\pi^3} \frac{\frac{12\pi^2}{m\Lambda^3} [-1 + c\Lambda^{-1/2} + \mathcal{O}(\Lambda^{-3/2})] \left[\frac{1}{2} c\Lambda^{-1/2} + \mathcal{O}(\Lambda^{-3/2}) + \frac{1}{2} \right]}{\left[c\Lambda^{-1/2} + \mathcal{O}(\Lambda^{-3/2}) \right]^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2a_0} \right)^2 \\
&= \frac{2m}{\pi^3} \frac{\frac{12\pi^2}{m\Lambda^3} \times -1 \times \frac{1}{2}}{c^2 \Lambda^{-1}} \Lambda^2 + \dots \\
&\rightarrow -\frac{12}{c^2 \pi} \quad (\Lambda \rightarrow \infty), \tag{2.74}
\end{aligned}$$

となる。よって、 $c^2 = -\frac{12}{r_e \pi}$ より、

$$\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0(\Lambda) \right]^2 = -\frac{12}{r_e \pi \Lambda} + \mathcal{O}(\Lambda^{-2}), \tag{2.75}$$

である。左辺は実数の 2 乗なので正であり、 $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で $\mathcal{O}(\Lambda^{-2}) \rightarrow 0$ になるので、くりこみを行うと

$$-\frac{12}{\pi r_e \Lambda} > 0, \tag{2.76}$$

となる。 $\Lambda > 0$ より、ゼロレンジ極限の有効レンジモデルでは $r_e < 0$ になることが分かる。 Λ の高次項は、文献 [43] より

$$\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0(\Lambda) \right]^2 = -\frac{12}{\pi r_e \Lambda} \left(1 - \frac{\pi}{a_0 \Lambda} + \frac{12}{\pi r_e \Lambda} + \dots \right), \tag{2.77}$$

となる。高次項も考慮すると、カットオフが有限 $\Lambda < \infty$ の場合の有効レンジモデルでは、 $r_e > 0$ にもなり得る (4.2.1 節参照)。この式を ρ_0 について解くと

$$\rho_0(\Lambda) = -\frac{12\pi^2}{m\Lambda^3} \left[1 \pm \left(\frac{-12}{\pi r_e \Lambda} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{\pi}{2a_0\Lambda} + \frac{6}{\pi r_e \Lambda} + \dots \right) \right], \quad (2.78)$$

となる。そして、(2.77) を (2.70) 式に代入すると、 λ_0 は次のようになる：

$$\begin{aligned} \lambda_0(\Lambda) - \frac{m}{20\pi^2} \rho_0(\Lambda)^2 \Lambda^5 &= -\frac{a_0 \frac{12}{\pi r_e \Lambda} \left(1 - \frac{\pi}{a_0\Lambda} + \frac{12}{\pi r_e \Lambda} + \dots \right)}{\frac{m}{8\pi} - a_0 \frac{m}{4\pi^2} \Lambda} \\ &= \frac{48\pi}{m r_e \Lambda^2} \left(1 - \frac{\pi}{2a_0\Lambda} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.79)$$

以上より、ベアパラメタ ρ_0, λ_0 の Λ 依存性が求められた。

2.2.4 ゼロレンジ極限

最後に、今まで求めたことを用いて有効レンジモデルの散乱振幅のゼロレンジ極限を求めらる。ベアパラメタのカットオフ依存性を表す (2.77) 式の $\rho_0(\Lambda)$ と (2.79) 式の $\lambda_0(\Lambda)$ をベアパラメタと波数 k の関数である散乱振幅 (2.63) に代入し、散乱長 a_0 と有効レンジ r_e で書かれた散乱振幅を求める。

$$\begin{aligned} f(k) &= \left[-\frac{8\pi}{m} \frac{\left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right)^2}{\left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2 \right] + 2\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1 \right) k^2} - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\ &= \left[-\frac{8\pi}{m} \frac{-\frac{12}{\pi r_e \Lambda} \left(1 - \frac{\pi}{a_0\Lambda} + \dots \right)}{\frac{48\pi}{m r_e \Lambda^2} \left(1 - \frac{\pi}{2a_0\Lambda} + \dots \right) + 2 \left(-\frac{12\pi^2}{m} \Lambda^{-3} + \dots \right) \left(\frac{1}{2} + \dots \right) k^2} - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\ &= \left[-\frac{8\pi}{m} \left\{ \frac{\frac{48\pi}{m r_e \Lambda^2} \left(1 - \frac{\pi}{2a_0\Lambda} \right) - \frac{12\pi^2}{m} \frac{1}{\Lambda^3} k^2}{-\frac{12}{\pi r_e \Lambda} \left(1 - \frac{\pi}{a_0\Lambda} \right)} \right\}^{-1} + \dots - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\ &= \left[-\frac{8\pi}{m} \Lambda^2 \left\{ \frac{\frac{48\pi}{m r_e} \left(1 - \frac{\pi}{2a_0\Lambda} \right) - \frac{12\pi^2}{m} \frac{1}{\Lambda} k^2}{-\frac{12}{\pi r_e \Lambda} \left(1 - \frac{\pi}{a_0\Lambda} \right)} \right\}^{-1} + \dots - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\ &= \left[-\frac{8\pi}{m} \Lambda^2 \left\{ -\frac{4\pi^2}{m} \Lambda \left(1 - \frac{\pi}{2a_0\Lambda} \right) \left(1 + \frac{\pi}{a_0\Lambda} + \dots \right) + \frac{12\pi^2}{m} \frac{\pi r_e}{12} k^2 \left(1 + \frac{\pi}{a_0\Lambda} + \dots \right) \right\}^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \dots - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{8\pi}{m} \Lambda^2 \left\{ -\frac{4\pi^2}{m} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2a_0} + \frac{\pi}{a_0} \right) + \frac{\pi^3 r_e}{m} k^2 \left(1 + \frac{\pi}{a_0 \Lambda} \right) \right\}^{-1} + \dots - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\
&= \left[-\frac{8\pi}{m} \Lambda^2 \left\{ -\frac{4\pi^2}{m} \left(\Lambda + \frac{\pi}{2a_0} \right) + \frac{\pi^3 r_e}{m} k^2 \left(1 + \frac{\pi}{a_0 \Lambda} \right) \right\}^{-1} + \dots - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\
&= \left[-\frac{8\pi}{m} \times \left(-\frac{m}{4\pi^2} \right) \Lambda \left\{ \left(1 + \frac{\pi}{2a_0 \Lambda} \right) - \frac{\pi r_e}{4} k^2 \left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{\pi}{a_0 \Lambda^2} \right) \right\}^{-1} + \dots - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\
&= \left[-\frac{8\pi}{m} \times \left(-\frac{m}{4\pi^2} \right) \Lambda \left\{ 1 + \frac{\pi}{2a_0 \Lambda} - \frac{\pi r_e}{4} \frac{1}{\Lambda} k^2 \right\}^{-1} + \dots - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\
&= \left[\frac{2}{\pi} \Lambda \left\{ 1 + \frac{\pi}{2a_0 \Lambda} - \frac{\pi r_e}{4} \frac{1}{\Lambda} k^2 \right\}^{-1} + \dots - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1}, \tag{2.80}
\end{aligned}$$

となり、文献 [43] の (77) 式と等価な表現が得られた。 $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で $f(k)$ は

$$\begin{aligned}
f(k) &= \left[\frac{2}{\pi} \Lambda \left\{ 1 - \frac{\pi}{2a\Lambda} + \frac{\pi r_e}{4} \frac{1}{\Lambda} k^2 + \dots \right\} - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\
&= \left[\frac{2}{\pi} \Lambda - \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2a} + \frac{2}{\pi} \frac{\pi r_e}{4} k^2 + \dots - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1} \\
&= \left[-\frac{1}{a} + \frac{r_e}{2} k^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) - ik \right]^{-1} \tag{2.81}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \left[-\frac{1}{a} + \frac{r_e}{2} k^2 - ik \right]^{-1} \quad (\Lambda \rightarrow \infty), \tag{2.82}$$

となる。よって、ゼロレンジ極限 $R_{\text{int}} = 1/\Lambda \rightarrow 0$ での有効レンジモデルの散乱振幅は a_0 と r_e のみで書かれることがわかる。

2.3 共鳴モデル

共鳴モデルは、2体の同種 Boson の散乱状態が離散固有状態と結合した有効場の理論である。Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi + \frac{1}{4m} \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + \nu_0 \phi^\dagger \phi + \frac{g_0}{2} (\phi^\dagger \psi^2 + \psi^{\dagger 2} \phi) + \frac{\lambda_0}{4} (\psi^\dagger \psi)^2, \tag{2.83}$$

である。ここで、 ϕ は離散固有状態の場であり、 ν_0 は ψ 2体の閾値から測った静止している ϕ の固有エネルギー、 g_0 は ψ 2体の散乱状態と離散固有状態の結合定数である。 $g_0 \rightarrow 0$ とすると散乱状態と離散固有状態の結合が切れ、共鳴モデルの散乱振幅はゼロレ

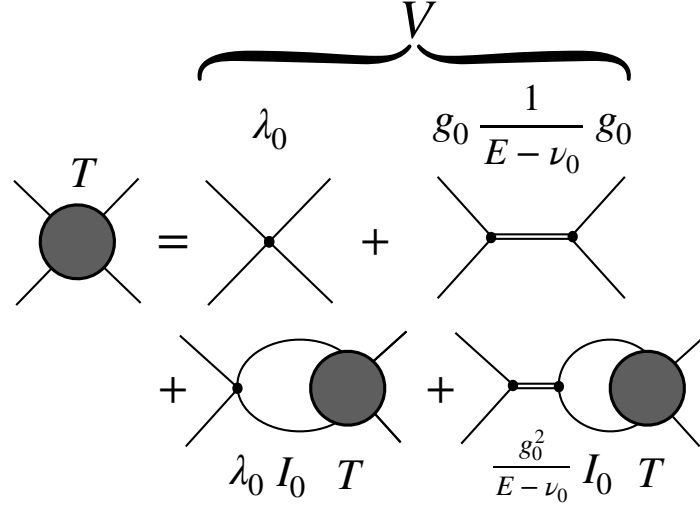


図 2.2 共鳴モデルでの LS 方程式の Feynman ダイアグラム。実線は Boson のプロパゲーター、黒点は相互作用頂点、黒丸は T 行列をあらわす。

レンジモデルの場合に帰着する。共鳴モデルは核力を記述するモデルとして Kaplan によって導入された [45]。

Hamiltonian (2.83) 式より、共鳴モデルでの ϕ を消去した $\psi\psi$ チャンネルの有効相互作用 V は

$$V(E) = \lambda_0 + \frac{g_0^2}{E - \nu_0}, \quad (2.84)$$

となる。有効レンジモデルの場合と違い、共鳴モデルの V は off-shell の運動量 k', k ではなく、エネルギー E に依存している。一般にチャンネル消去をした場合、ポテンシャルにエネルギー依存性があらわれる [46, 47]。共鳴モデルの場合は、離散固有状態 ϕ のチャンネルを消去したことにより V のエネルギー依存性があらわれる。

散乱振幅は、運動量依存がない相互作用を持つゼロレンジモデルと同様に求められる。ゼロレンジモデルの場合の散乱振幅 (2.15) 式において、 $\lambda_0 \rightarrow \lambda_0 + \frac{g_0^2}{E - \nu_0}$ と置き換えれば良い (図 2.2) ので、共鳴モデルの散乱振幅は

$$\begin{aligned} f(k) &= \left[-\frac{8\pi}{m} \left\{ \frac{1}{\lambda_0 + \frac{g_0^2}{E - \nu_0}} + \frac{m}{4\pi^2} \Lambda \right\} - ik \right]^{-1} \\ &= \left[-\frac{8\pi}{m} \left(\lambda_0 + \frac{g_0^2}{E - \nu_0} \right)^{-1} - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

となる。ここで、 $E = k^2/m$ であり、 $\Lambda \rightarrow \infty$ で 0 になる項を 0 とした。有効レンジ展開

$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 + \mathcal{O}(k^4) - ik \right]^{-1}, \quad (2.86)$$

と比較することで、散乱長 a_0 と有効レンジ r_e は

$$a_0 = \left[\frac{8\pi}{m} \left(\lambda_0 - \frac{g_0^2}{\nu_0} \right)^{-1} + \frac{2}{\pi} \Lambda \right]^{-1}, \quad (2.87)$$

$$r_e = -\frac{16\pi g_0^2}{m^2 \nu_0^2} \left(\lambda_0 - \frac{g_0^2}{\nu_0} \right)^{-2}, \quad (2.88)$$

となる。結合定数は実数なので、(2.88) 式より、有効レンジは常に $r_e < 0$ となることがわかる。有効レンジモデルの場合とは異なり、有効レンジに Λ 依存性がない。また、 λ_0, g_0, ν_0 は実数なので、 Λ が有限のときでも常に $r_e < 0$ となる。

くりこみを行い、 $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$f(k) = \left[-\frac{8\pi}{m} \left(\lambda + \frac{g^2}{E - \nu} \right)^{-1} - ik \right]^{-1}, \quad (2.89)$$

となる [43]。ここで、 λ, g, ν はくりこまれたパラメタである。 $E = k^2/m$ なので、共鳴モデルのくりこまれた散乱振幅の分母は k の無限次の項まで含んでおり、ゼロレンジモデルや有効レンジモデルと違い、有効レンジ展開の高次の項が有限になる。ただし、有効レンジ展開の中の係数は全て λ, g, ν の関数であるから、3 つ以上の係数を独立に選ぶことはできない。散乱長 a_0 と有効レンジ r_e は

$$a_0 = \frac{m}{8\pi} \left(\lambda - \frac{g^2}{\nu} \right), \quad (2.90)$$

$$r_e = -\frac{16\pi g^2}{m^2 \nu^2} \left(\lambda - \frac{g^2}{\nu} \right)^{-2}, \quad (2.91)$$

と求められる [43]。くりこみを行った後でも、共鳴モデルでは常に $r_e < 0$ である。

2.4 束縛状態に対する弱束縛関係式の導出

この章では、先行研究 [20] に基づいて、有効場の理論を用いた弱束縛関係式の導出を行う。

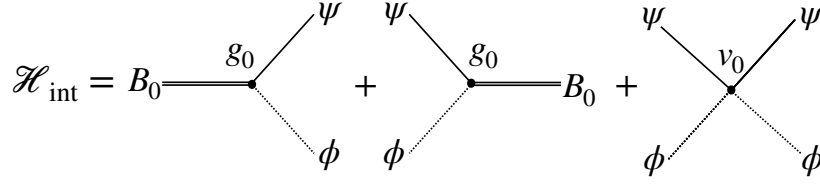


図 2.3 Hamiltonian の相互作用項 (2.95) に対応した Feynman ダイアグラム。

2.4.1 有効場の理論

次のような Hamiltonian で書かれる非相対論的有効場の理論を考える：

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad (2.92)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{free}} + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (2.93)$$

$$\mathcal{H}_{\text{free}} = \frac{1}{2M} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi + \frac{1}{2m} \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2M_0} \nabla B_0^\dagger \cdot \nabla B_0 + \omega_0 B_0^\dagger B_0. \quad (2.94)$$

ここで、 ψ, ϕ, B_0 はそれぞれ質量 M, m, M_0 を持つ粒子 (Boson もしくは Fermion) の場であり、Hamiltonian の全ての場は同じ点 \mathbf{x} で定義されている。 ω_0 は ϕ と ψ の閾値から測った離散固有状態 B_0 の固有エネルギーである。自由な Hamiltonian H_{free} の最初の 3 項は運動エネルギー項であり、第 4 項は静止した B_0 のエネルギーを与える。相互作用 Hamiltonian は、

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = g_0 \left(B_0^\dagger \psi \phi + \phi^\dagger \psi^\dagger B_0 \right) + v_0 \phi^\dagger \psi^\dagger \psi \phi, \quad (2.95)$$

である。ここで、 g_0 は B_0, ϕ, ψ の 3 点頂点の、 v_0 は ϕ, ψ の 4 点頂点の結合定数である。Hamiltonian の相互作用項 (2.95) は 図 2.3 の Feynman ダイアグラムに対応する。例として重陽子を考える場合、 ψ, ϕ は陽子と中性子、 B_0 は重陽子と同じ量子数を持つ離散固有状態 (ペア状態) に対応している。2.3 節の共鳴モデルの場合と同様に相互作用 Hamiltonian が微分を含まないので、 ϕ, ψ 2 体散乱は角度依存性を持たず s 波のみになる。それぞれの場は

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{x}')]_{\pm} = [\phi(\mathbf{x}), \phi^\dagger(\mathbf{x}')]_{\pm} = [B_0(\mathbf{x}), B_0^\dagger(\mathbf{x}')]_{\pm} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.96)$$

のように量子化する。ただし、 $[x, y]_{\pm}$ は Boson 場の場合は交換関係、Fermion 場の場合は反交換関係を意味する。

$\psi\phi$ の 2 体散乱と結合する状態を考えるため、Noether の定理を位相変換の対称性に適用し、この系の保存量を考える。Legendre 変換により、Hamiltonian (2.93) に対応する Lagrangian が得られる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2M} \psi^\dagger \Delta \psi + i \psi^\dagger \dot{\psi} + \frac{1}{2m} \phi^\dagger \Delta \phi + i \phi^\dagger \dot{\phi} + \frac{1}{2M_0} B_0^\dagger \Delta B_0 + i B_0^\dagger \dot{B}_0 - \omega_0 B_0^\dagger B_0 \\ & - g_0 \left(B_0^\dagger \psi \phi + \phi^\dagger \psi^\dagger B_0 \right) - v_0 \phi^\dagger \psi^\dagger \psi \phi. \end{aligned} \quad (2.97)$$

この Lagrangian は、2 種の独立な大域的位相変換

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi, \quad \phi \rightarrow \phi, \quad B_0 \rightarrow e^{i\theta} B_0,$$

及び

$$\psi \rightarrow \psi, \quad \phi \rightarrow e^{i\theta} \phi, \quad B_0 \rightarrow e^{i\theta} B_0,$$

に対して不変であり、対応する保存量はそれぞれ、 $N_\psi + N_{B_0}$ と $N_\phi + N_{B_0}$ である。ここで、 $N_\alpha = \int d^3x \alpha^\dagger(\mathbf{x}) \alpha(\mathbf{x})$ は粒子 α の個数をあらわす。つまり、 ψ, B_0 場の粒子数の和及び ϕ, B_0 場の粒子数の和が保存することがわかる。この条件より、 $\psi\phi$ の 2 体散乱に結合できる状態は、 $N_\psi = 1, N_\phi = 1, N_{B_0} = 0$ または $N_\psi = 0, N_\phi = 0, N_{B_0} = 1$ のみである。それぞれの状態を、散乱状態 $|\mathbf{k}\rangle$ と離散状態 $|B_0\rangle$ とし、次のように定義する：

$$|\mathbf{k}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{V_p}} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\phi}^\dagger(-\mathbf{k}) |0\rangle, \quad (2.98)$$

$$|B_0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{V_p}} \tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{0}) |0\rangle. \quad (2.99)$$

ここで、 $\psi\phi$ の重心系 (B_0 の静止系) をとり、系の位相体積は $V_p = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{0})$ であり、場 $\alpha(\mathbf{x})$ に対応する運動量表示の場は $\tilde{\alpha}(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x})$ である。真空 $|0\rangle$ は任意の \mathbf{k} に対して

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) |0\rangle = \tilde{\psi}(\mathbf{k}) |0\rangle = \tilde{B}_0(\mathbf{k}) |0\rangle, \quad \langle 0|0\rangle = 1, \quad (2.100)$$

と定義する。 $H_{\text{free}} = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{free}}$ を (2.98) 式と (2.99) 式に作用させると

$$H_{\text{free}} |\mathbf{k}\rangle = \frac{\mathbf{k}^2}{2\mu} |\mathbf{k}\rangle, \quad (2.101)$$

$$H_{\text{free}} |B_0\rangle = \omega_0 |B_0\rangle, \quad (2.102)$$

となり、 $|\mathbf{k}\rangle$ と $|B_0\rangle$ が H_{free} の固有状態になっていることがわかる。ここで、 $\mu = (1/M + 1/m)^{-1}$ は $\psi\phi$ の系の換算質量である。

2.4.2 散乱振幅

Hamiltonian(2.93) から得られる $\phi\psi$ 散乱振幅を求める。2.3 節の共鳴モデルと同様に、相互作用 V は

$$V(E) = v_0 + \frac{g_0^2}{E - \omega_0}, \quad (2.103)$$

となる。相互作用 V は角度依存性を持たないので、 s 波の散乱に対応する。共鳴モデルの場合と同様に、 T 行列は E のみの関数であるから、on-shell 条件を課した T_{on} と一致し、

$$T_{\text{on}}(E) = \frac{1}{V^{-1}(E) - G(E)}, \quad (2.104)$$

と求められる。ここで、カットオフ Λ で正則化した運動量積分 $G(E)$ を

$$G(E) \equiv \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\Theta(\Lambda - |\mathbf{q}|)}{E - \frac{q^2}{2\mu} + i0^+}, \quad (2.105)$$

と定義する。 $G(E)$ と (2.41) 式で定義した $I_0(E)$ の関係は

$$G(E) = I_0(E)|_{m=2\mu}, \quad (2.106)$$

である。同種 Boson の場合の on-shell T 行列と散乱振幅 $f(k)$ の関係は (2.7) 式より $f(k) = -m/(8\pi)T_{\text{on}}(k)$ である。換算質量が $\mu = m/2$ であることを用い、同種粒子の対称性因子 $1/2$ を除くと、区別可能な 2 粒子の場合の T 行列と $f(k)$ の関係は

$$f(k) = -\frac{\mu}{2\pi}T_{\text{on}}(k), \quad (2.107)$$

となる。よって、散乱振幅は

$$f(k) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{V^{-1}(E) - G(E)}, \quad (2.108)$$

となる。ここで、 $E = k^2/2\mu$ である。散乱長は、 $f(0) = -a_0$ より

$$a_0 = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{V^{-1}(0) - G(0)} \quad (2.109)$$

と得られる。共鳴モデルの場合と同様にくりこみ可能なので、パラメタにカットオフ依存性を持たせ、観測量を変化させないように $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限をとることができる。しかしここでは、系の典型的長さ $R_{\text{typ}} \sim 1/\Lambda$ を考えるため、ゼロレンジ極限をとらずに $\Lambda < \infty$ とする。

2.4.3 複合性

full な Hamiltonian (2.93) の固有状態に束縛状態があるとし、Schrödinger 方程式

$$H|\Psi\rangle = -B|\Psi\rangle, \quad (2.110)$$

で、束縛エネルギー B を持つ束縛状態 $|\Psi\rangle$ を定義する。(2.101) 式と (2.102) 式より、 $|\mathbf{k}\rangle$ と $|B_0\rangle$ は自由な Hamiltonian H_{free} の固有状態である。大域的位相変換に対応する保存則より、2 体散乱のセクターでは $N_\psi = 1, N_\phi = 1, N_{B_0} = 0$ または $N_\psi = 0, N_\phi = 0, N_{B_0} = 1$ の 2 つの状態のみ実現可能であるので、 H_{free} の固有状態は $|\mathbf{k}\rangle$ と $|B_0\rangle$ のみであることがわかる。ある空間の完全系は Hermite 演算子の全ての固有状態によって張ることができるので、 $\psi\phi$ 散乱の完全系は

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| + |B_0\rangle \langle B_0| = 1, \quad (2.111)$$

となる。この完全系のもとで、束縛状態 $|\Psi\rangle$ の複合性 X と素粒子性 Z を

$$X \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \Psi|\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}|\Psi\rangle, \quad (2.112)$$

$$Z \equiv \langle \Psi|B_0\rangle \langle B_0|\Psi\rangle, \quad (2.113)$$

と定義する。束縛状態は $\langle \Psi|\Psi\rangle = 1$ と規格化できるので、 $|\Psi\rangle$ で (2.111) 式の両辺の期待値をとると

$$X + Z = 1, \quad (2.114)$$

の関係が得られる。定義より $0 \leq X, Z$ であるから、(2.114) 式を満たすためには $0 \leq X, Z \leq 1$ とわかる。よって、 X と Z は確率としての解釈が可能であり、(2.112) 式より X は物理的な束縛状態の中に散乱状態を見出す確率、(2.113) 式は Z は物理的な束縛状態に離散固有状態を見出す確率といえる。Hamiltonian (2.93) では 1 つの離散固有状態を持つ場合を考えたが、一般に複数の離散固有状態や他の散乱チャンネルがある場合も考えられる。その場合、散乱状態 $|\mathbf{k}\rangle$ 以外を見出す確率の和を Z として X と Z を定義すれば、 Z は物理的な束縛状態に散乱状態以外を見出す確率と解釈し直すことができる。

束縛状態 $|\Psi\rangle$ を free な Hamiltonian の固有状態で展開すると

$$|\Psi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \chi(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle + c |B_0\rangle, \quad (2.115)$$

となり、 X と $\chi(\mathbf{k})$ 、 Z と c の関係は

$$X = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\chi(\mathbf{k})|^2, \quad (2.116)$$

$$Z = |c|^2, \quad (2.117)$$

となる。(2.115) 式を (2.110) 式に代入すると、両辺の $|\mathbf{k}\rangle$ と $|B_0\rangle$ の係数から、

$$-\chi(\mathbf{k})B = \frac{k^2}{2\mu}\chi(\mathbf{k}) + v_0 \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \chi(\mathbf{k}') + cg_0, \quad (2.118)$$

$$-cB = g_0 \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \chi(\mathbf{k}') + c\omega_0, \quad (2.119)$$

が得られる。ここで、 $\alpha \equiv \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \chi(\mathbf{k}')$ とおくと

$$-\chi(\mathbf{k})B = \frac{k^2}{2\mu}\chi(\mathbf{k}) + v_0\alpha + cg_0, \quad (2.120)$$

$$-cB = g_0\alpha + c\omega_0, \quad (2.121)$$

となるので、この式から得られる $\chi(\mathbf{k})$ と c を (2.116) 式と (2.117) 式に代入し、(2.103) 式、(2.105) 式と比較することで X と Z は

$$X = -|\alpha|^2 V^2(-B)G'(-B), \quad (2.122)$$

$$Z = -|\alpha|^2 V'(-B), \quad (2.123)$$

とかける。ここで、エネルギーの関数 $A(E)$ に対し $dA/dE = A'$ とする。この式から α を消去し、 $X + Z = 1$ の関係を使うと

$$X = \frac{G'(-B)}{G'(-B) - [V^{-1}(-B)]'}, \quad (2.124)$$

$$Z = \frac{-(1/V(-B))'}{G'(-B) - [V^{-1}(-B)]'}, \quad (2.125)$$

と、 X を V と G の微分で表現できる。ここで、(2.105) 式より $G(E)$ はカットオフ依存性を持っており、ベアパラメタを固定した場合には X と Z もカットオフ依存性を持つことがわかる。

2.4.4 弱束縛関係式

ここから、相互作用 V と運動量積分 G で書かれた (2.124) 式の複合性 X と散乱長 a_0 の関係を調べることで、弱束縛関係式を導出する。 $V^{-1}(E)$ と $G(E)$ を $E = -B$ 周りで

展開した式に $E = 0$ を代入すると

$$V^{-1}(0) = V^{-1}(-B) + [V^{-1}(-B)]'B + \Delta V^{-1}(-B), \quad (2.126)$$

$$G(0) = G(-B) + G'(-B)B + \Delta G(-B), \quad (2.127)$$

となる。ここで、 $\Delta V^{-1}(-B)$ と $\Delta G(-B)$ は、 B の 2 次以上の項をあらわす。展開した V と G を a_0

$$a_0 = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{V^{-1}(0) - G(0)}, \quad (2.128)$$

に代入すると、 $E = -B$ での V と G で書かれた散乱長が得られる：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\mu}{2\pi} \{V^{-1}(-B) + [V^{-1}(-B)]'B + \Delta V^{-1}(0) - G(-B) - G'(-B) - \Delta G(-B)\}^{-1} \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \{([V^{-1}(-B)]' - G'(-B))B + \Delta V^{-1}(0) - \Delta G(-B)\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

ここで、2 行目の式変形において散乱振幅 (2.108) 式の極が束縛エネルギーを与えるため、

$$V^{-1}(-B) - G(-B) = 0, \quad (2.130)$$

となることを用いた。ここで、(2.124) 式を用いると散乱長は次のように変形できる：

$$a_0 = \frac{\mu}{2\pi} \left[-B \frac{G'(-B)}{X} + \Delta V^{-1}(0) - \Delta G(-B) \right]^{-1}. \quad (2.131)$$

以下、束縛エネルギー B が小さい場合を考え、 B のべき展開を行う。積分後の G に含まれるスケールは B とカットオフ Λ しかないので、それぞれに対応する長さスケール $R_{\text{typ}} = 1/\Lambda$ と $R = \frac{1}{\sqrt{2\mu B}}$ を定義し、 R_{typ}/R のべきで展開する。 $\Delta G(-B)$ は B の高次なので、ナイーブには $-BG'(-B)$ より抑制されると期待されるが、 G が \sqrt{B} に比例する項を含むことから

$$-BG'(-B) = \frac{\mu}{4\pi R} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right], \quad (2.132)$$

$$-\Delta G(-B) = \frac{\mu}{4\pi R} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right)^3\right) \right], \quad (2.133)$$

と両者は同じ $1/R$ のオーダーになる (A.2.6 節参照)。文献 [20] に従い

$$\Delta V^{-1}(-B) \sim \frac{\mu}{R} \mathcal{O}\left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right)^3\right), \quad (2.134)$$

を仮定すると、散乱長 a_0 は

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{\mu}{4\pi R} \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\} \cdot \frac{1}{X} + \frac{\mu}{R} \mathcal{O}\left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right)^3\right) + \frac{\mu}{4\pi R} \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right)^3\right) \right\} \right]^{-1} \\
&= \frac{\mu}{2\pi} \left[\left(\frac{\mu}{4\pi R X} + \frac{\mu}{4\pi R} \right) \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\} \right]^{-1} \\
&= R \left[\frac{1}{2X} + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right]^{-1} \\
&= R \left[\frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right], \tag{2.135}
\end{aligned}$$

となり、弱束縛関係式を得る。

2.4.5 有効レンジ展開による改良

弱束縛関係式 (1.6) に有効レンジ展開の高次項を取り入れることを考える。弱束縛関係式 (2.135) を変形すると、 X を a_0 と R の関数で書くことができる：

$$X(a_0, R) = \frac{a_0}{2R - a_0} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right]. \tag{2.136}$$

この $X(a_0, R)$ に有効レンジ展開の k の 2 次まで考慮した束縛状態の条件式

$$-\frac{1}{a_0} - \frac{r_e}{2R^2} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \mathcal{O}\left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right)^3\right) = 0, \tag{2.137}$$

を代入し^{*1}、 a_0 を消去すると、有効レンジ r_e と束縛状態の半径 R を用いた表式に書き換えることができる：

$$X(r_e, R) = \frac{R}{R - r_e} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right]. \tag{2.138}$$

この式を r_e について解くと、

$$r_e = R \left[\frac{X - 1}{X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right], \tag{2.139}$$

となり、先行研究 [18] の (2) 式を再現する。

*1 ここで、有効レンジ展開の高次項にあらわれるスケールを R_{typ} と仮定する。

T 行列の束縛状態の極の留数 g^2 は

$$\begin{aligned} g^2 &\equiv \lim_{E \rightarrow -B} (E + B)T_{\text{on}}(E) \\ &= -\frac{1}{G'(-B) - [V^{-1}(-B)]}, \end{aligned} \quad (2.140)$$

となるので、 G と V で書いた X (2.124) より、 X は g^2 を用いて表すことができる：

$$X = -g^2 G'(-B). \quad (2.141)$$

g^2 は on-shell T 行列から計算されるためカットオフ非依存な量であるから、有効レンジ展開で評価することができ [20]、有効レンジ展開の k の 4 次

$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 - \frac{P_s}{4}k^4 + \frac{1}{R} \mathcal{O} \left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R} \right)^5 \right) - ik \right]^{-1}, \quad (2.142)$$

まで考慮することで、有効レンジ r_e と、 k^4 の係数であるシェイプパラメタ P_s で書かれた複合性 X

$$X(r_e, P_s) = \left[1 - \frac{r_e}{R} - \frac{P_s}{R^3} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R} \right)^5 \right) \right]^{-1}, \quad (2.143)$$

を得る。 k の 4 次まで考慮した束縛状態の条件

$$-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 - \frac{P_s}{4}k^4 + \frac{1}{R} \mathcal{O} \left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R} \right)^5 \right) - ik = 0, \quad (2.144)$$

を用いて P_s を消去すると、 a_0, r_e, R で表された複合性 X を得ることができる：

$$X(a_0, r_e, R) = \left(\frac{4R}{a_0} + \frac{r_e}{R} - 3 \right)^{-1} \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{R_{\text{typ}}}{R} \right) \right]. \quad (2.145)$$

ただし、 $r_e = 0$ にしても、 a_0, r_e, R で書かれた弱束縛関係式 (2.145) は (2.136) 式には戻らないことに注意する。(2.145) 式には有効レンジ展開の k の 4 次の影響まで含まれていると考えられ、 P_s/R^3 のオーダーが無視できるほど小さい場合、 $X(a_0, r_e, R)$ と $X(a_0, R)$ は一致すると期待される。

2.5 不安定状態における弱束縛関係式

弱束縛関係式をエキゾチックハドロン系に応用するためには、不安定状態の弱束縛関係式を用いる必要がある。なぜならば、見つかっているエキゾチックハドロン候補のほとん

どが不安定状態だからである。不安定状態の弱束縛関係式は、2.4 節で安定状態の弱束縛関係式を導いたモデルに対し、崩壊できる散乱チャンネルを1つ結合させたモデルから導くことができ、結果として、誤差項を1つ増やした次のような形で書ける [19, 20]:

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O} \left(\left| \frac{R_{\text{typ}}}{R} \right| \right) + \mathcal{O} \left(\left| \frac{l}{R} \right|^3 \right) \right\}. \quad (2.146)$$

ここで、 R は固有エネルギー E_h から決まる長さスケール $R \equiv (-2\mu E_h)^{-1/2}$ である。 l は崩壊チャンネルの閾値とのエネルギー差から決まる長さスケールである。安定状態のときと同様に固有エネルギーの絶対値が小さく、誤差項が無視できる場合 ($R_{\text{typ}} \ll R$ かつ $l \ll |R|$) に X を観測量のみから決めることができる。

不安定状態の場合、規格化条件は Gamow ベクトル $\langle \tilde{\Psi} |$ を用いて $\langle \tilde{\Psi} | \Psi \rangle = 1$ と与えられる。このとき、複合性の定義は

$$X \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \tilde{\Psi} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | \Psi \rangle \quad (2.147)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \chi(\mathbf{k})^2, \quad (2.148)$$

となり、 X は一般に複素数になる [20]。束縛状態のとき、固有エネルギーは $E_h < 0$ の実数であるから R は実数であるが、不安定状態のとき E_h は複素数であるから R も複素数になる。また、崩壊チャンネルの影響で散乱長 a_0 も複素数になる。ここから、弱束縛関係式から得られる X も複素数になる。複素数の複合性は確率として解釈することができない。複素数の X に基づいて物理的な複合性を解釈するために \tilde{X} を次のように定義する [19, 20]:

$$\tilde{X} = \frac{1 - |1 - X| + |X|}{2}. \quad (2.149)$$

この定義を用いると $0 \leq \tilde{X} \leq 1$ となることから、不安定状態の中に散乱状態を見出す確率と解釈することができる。さらに、 X が $0 \leq X \leq 1$ となる実数のとき $\tilde{X} = X$ となるから、(2.149) 式は安定状態のときの複合性の自然な拡張になっている。しかし (2.149) 式の定義は、どんな X に対しても必ず $0 \leq \tilde{X} \leq 1$ となる \tilde{X} を与えるため、 \tilde{X} が不安定状態の性質を必ずしも反映するわけではない。例えば X の虚部が大きく、 \tilde{X} と X の差が大きい場合、 \tilde{X} は X の情報を反映していないと考えられる。逆に、 \tilde{X} と X の差が小さければ、 \tilde{X} は X の情報を反映しており、不安定状態に対して意味のある複合性の解釈ができると考えられる。 \tilde{X} と X の差を定量的にはかる指標として、解釈の不定性 U

$$U \equiv |X| + |1 - X| - 1, \quad (2.150)$$

を定義する [20]。 U が大きいときは、 \tilde{X} によって状態の性質を調べることはできないが、 U が小さいときは \tilde{X} による複合性の解釈は物理的な状態の構造を反映していると考えられる。

第 3 章

弱束縛関係式とレンジ補正

この章では、弱束縛関係式のレンジ補正を解析計算に基づいて議論する。レンジ補正とは、有効レンジが散乱長や相互作用距離などの他の長さスケールに比べて無視できないほど大きいときに必要な補正である。まず、3.1 節で弱束縛関係式を低エネルギー普遍性の観点から議論し、2 章で導入した有効場の理論の具体的なモデルでの束縛状態の複合性を議論する。さらに、チャンネル結合を持たない 1 チャンネルゼロレンジの系での束縛状態に弱束縛関係式を適用し、有効レンジが有限の場合に矛盾が生じることを示す。次に、3.2 節で微分結合と離散固有状態との結合を両方持つ有効場の理論で有効レンジを計算し、有効レンジの表式に含まれる微分結合と離散固有状態の寄与が分離できないことから、弱束縛関係式の中心値のレンジ補正を不定性なく実行できないことを示す。最後に、3.3 節で弱束縛関係式の誤差項へのレンジ補正として、従来は相互作用距離と解釈されていた R_{typ} の再定義を提案し、3.1 節での矛盾が解消されることを示す。

3.1 弱束縛関係式の有効レンジによるレンジ補正

3.1.1 弱束縛関係式と低エネルギー普遍性

弱束縛関係式

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}, \quad (3.1)$$

は、弱束縛状態が存在するときに散乱長 a_0 と、束縛エネルギー B と換算質量 μ から決まる長さスケール $R \equiv 1/\sqrt{2\mu B}$ から複合性 X を見積もることができるものである。1.3 節での 2 体系の低エネルギー普遍性の議論をもとに、弱束縛関係式と低エネルギー普遍性の

関係を考える。(1.16) 式より、低エネルギー普遍性が成り立つ系では、束縛状態の波動関数の半径 R は

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\mu B}} = a_0, \quad (3.2)$$

となり、 a_0 でスケールされることがわかる。そして、完全な弱束縛極限 $B \rightarrow 0$ では、束縛状態は完全に複合的 ($X = 1$) であり、 $a_0 = R \rightarrow \infty$ となる。この結果は弱束縛関係式 (3.1) において $X = 1$ かつ $R \rightarrow \infty \Leftrightarrow \mathcal{O}(R_{\text{typ}}/R) \rightarrow 0$ とした結果と整合的である。つまり、弱束縛関係式を低エネルギー普遍性の物理に基づく式と解釈することができる。よって、散乱長が系の特徴的な長さスケールよりも十分大きい場合は、ハドロン、原子核、原子、分子等、系の相互作用の微視的な詳細に依らずに同じ法則が成り立つ。

完全な低エネルギー極限では散乱長と束縛状態の半径の関係は (3.2) 式となり、束縛状態は完全な 2 体の複合粒子状態 (ハドロン系なら、ハドロン分子状態) になるが、束縛エネルギーが有限で弱束縛極限から離れる ($R < \infty$) と、 $a_0 = R$ の関係にずれが生じる。ずれの原因は弱束縛関係式 (3.1) の括弧の中の 2 つの項で表されており、それぞれの物理的意味は次のように解釈することができる:

- $2X/(1+X)$ の項: 他のチャンネルとの結合の寄与 ($X < 1$) によって $R > a_0$ とずれる
- $\mathcal{O}(R_{\text{typ}}/R)$ の項: 有限の相互作用距離 ($R_{\text{typ}} > 0$) により $\mathcal{O}(R_{\text{typ}}/R) \neq 0$ となり、 $R \neq a_0$ となる

よって、これら 2 つの項の寄与のうち、どちらか一方でも存在する場合は $a_0 \neq R$ となる。ずれによる a_0 と R の大小関係を考えると、他のチャンネルの寄与がある場合、定義より $X < 1$ であることから $2X/(1+X) < 1$ となり、 R は必ず a_0 より大きくなる。一方、誤差項の符号は任意であるから、有限の相互作用距離の寄与は $R > a_0$ だけでなく $R < a_0$ とずらすことも可能である。よって、相互作用距離が 0 であるゼロレンジ極限では、必ず $R > a_0$ となることがわかる。一方重陽子の場合、 $R = 4.31$ fm、 $a_0 = 5.42$ fm で $a_0 > R$ となっていることから、相互作用距離による誤差項の寄与が重要であることを示唆している。

文献 [20] では、相互作用距離 R_{typ} は off-shell 運動量積分のカットオフの逆数 $1/\Lambda$ で見積られていたから、系の off-shell の性質を特徴づける長さスケールといえる。一方、on-shell 運動学を特徴づける長さスケールは弱束縛関係式にどのような影響を及ぼすのだろうか。ここからは、on-shell 散乱を特徴づける長さスケールの 1 つである有効レンジ r_e が他の長さスケールより大きい系を考え、その系に弱束縛関係式を適用したときに必要な

補正 (レンジ補正) を議論する*1。

3.1.2 有効場の理論での束縛状態の複合性と有効レンジ

レンジ補正を議論する準備として、2章で導入したゼロレンジモデル、有効レンジモデル、共鳴モデルを2.4.3節で定義した複合性 X の観点から考える [38]。ゼロレンジモデルと有効レンジモデルの自由な Hamiltonian ((2.2) 式と (2.23) 式) は散乱状態と結合する離散固有状態を持たない。よって、ゼロレンジモデルと有効レンジモデルの完全系は $|\mathbf{k}\rangle$ を $\psi\psi$ の散乱状態の相対運動量演算子 \mathbf{k} の固有状態として、

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| = 1, \quad (3.3)$$

となる。 $|\mathbf{k}\rangle$ は自由な Hamiltonian の固有状態であるから、相対座標演算子の固有状態 $|\mathbf{r}\rangle$ を用いて座標表示した $\langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle$ は平面波であると考えられる。実際に、完全系 (3.3) を $\langle \mathbf{r}'|$ と $|\mathbf{r}\rangle$ で挟むと

$$\langle \mathbf{r}'|\mathbf{r}\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{r}'|\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}|\mathbf{r}\rangle, \quad (3.4)$$

となるので、平面波 $\langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ を仮定すると

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}'|\mathbf{r}\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{r}'|\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}|\mathbf{r}\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} \\ &= \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

となり、 $|\mathbf{r}\rangle$ が正しく規格直交化されていることがわかる。

一方、共鳴モデルの Hamiltonian (2.83) は、離散固有状態 ϕ と連続固有値を持つ $\psi\psi$ の散乱状態のチャンネル結合を持つ。よって、ゼロレンジモデルや有効レンジモデルなどの1チャンネルのモデルとは違い、完全系を張るには散乱状態 $|\mathbf{k}\rangle$ だけではなく離散状態 $|\phi\rangle$ も必要である：

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| + |\phi\rangle \langle \phi| = 1. \quad (3.6)$$

*1 引力ポテンシャルの場合、 $R_{\text{typ}} \sim r_e$ となるが、一般のポテンシャルの場合には $R_{\text{typ}} \neq r_e$ である。よって、一般に相互作用長さと有効レンジは異なることに注意する。

同様に、相対座標演算子の固有状態 $\langle \mathbf{r}' |, |\mathbf{r}\rangle$ で完全系 (3.6) 式を挟むと

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r}' | \mathbf{r} \rangle &= \langle \mathbf{r}' | \left[\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| + |\phi\rangle \langle \phi| \right] | \mathbf{r} \rangle \\
\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{r}' | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{r}' | \phi \rangle \langle \phi | \mathbf{r} \rangle \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \\
&= \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \tag{3.7}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $|\mathbf{r}\rangle$ は $\psi\psi$ 散乱状態の固有状態であり、散乱固有状態と $|\phi\rangle$ は直交していることから、 $\langle \mathbf{r}' | \phi \rangle \langle \phi | \mathbf{r} \rangle = 0$ となる。この計算は、共鳴モデルの場合でも $|\mathbf{k}\rangle$ の座標表示が平面波であることを示している*2。平面波を運動量について積分すると、散乱状態の完全系を張ることができる。しかし、共鳴モデルはチャンネル結合を持ち、自由な Hamiltonian の固有状態には平面波だけでなく離散状態もあるので、全空間の完全系 (3.6) には $|\phi\rangle$ の項も必要である。

ゼロレンジモデルと有効レンジモデルの完全系 (3.3) から、束縛状態を表す full な Hamiltonian の固有状態 $|\Psi\rangle$ を自由な Hamiltonian の固有状態で展開すると

$$|\Psi\rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \chi(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle, \tag{3.8}$$

となる。複合性 X の定義

$$X = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\chi(\mathbf{k})|^2, \tag{3.9}$$

から、ゼロレンジモデルと有効レンジモデルの束縛状態の複合性 X は、定義より

$$X = 1, \tag{3.10}$$

となる。同様に、共鳴モデルの完全系 (3.6) から、 $|\Psi\rangle$ は

$$|\Psi\rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \chi(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle + c |\phi\rangle, \tag{3.11}$$

*2 相互作用のない自由な Hamiltonian と、相互作用入りの full な Hamiltonian の違いに注意する。full な Hamiltonian の固有状態は相互作用込みの散乱状態と物理的な束縛状態である。相互作用込みの散乱状態は一般に平面波ではない。

表 3.1 ゼロレンジモデル、有効レンジモデル、共鳴モデルでの有効レンジ r_e と複合性 X の値。

有効場の理論	有効レンジ r_e	複合性 X
ゼロレンジモデル	$r_e = 0$	$X = 1$
有効レンジモデル	$r_e \neq 0$	$X = 1$
共鳴モデル	$r_e < 0$	$X < 1$

と展開される。展開された $|\Psi\rangle$ は、ゼロレンジモデルと有効レンジモデルの場合とは異なり、離散固有状態 $|\phi\rangle$ の項を持ち、散乱状態と離散固有状態の結合定数 $g_0 \neq 0$ の場合、 $\langle \Psi | \phi \rangle \langle \phi | \Psi \rangle > 0$ であるので

$$X < 1, \quad (3.12)$$

となる。また、有効レンジ r_e は、2.1 節より、ゼロレンジモデルでは $r_e = 0$ 、2.2 節より、有効レンジモデルでは $r_e \neq 0$ 、2.3 節より、共鳴モデルでは $r_e < 0$ である*3。この節の結果を表 3.1 にまとめる。有効レンジモデルと共鳴モデルを比較すると、 $r_e \neq 0$ でも $X = 1$ と $X \neq 1$ の両方の場合があることがわかる。

3.1.3 有効レンジモデルを用いたレンジ補正の議論

レンジ補正について議論するために、次の 2 つの特徴

- チャンネル結合がない、1 チャンネルの散乱
- 相互作用距離が 0 のゼロレンジ極限

を持つ系の束縛状態に弱束縛関係式を適用する。3.1.2 節で議論したように、チャンネル結合を持たない場合、波動関数が散乱状態のみで展開されるので、散乱状態の重みとして定義されていた複合性は $X = 1$ となる。また、ゼロレンジ極限では $R_{\text{typ}} = 0$ となるので、弱束縛関係式の誤差項は $\mathcal{O}(R_{\text{typ}}/R) \rightarrow 0$ となる。以上の特徴より、この系に弱束縛関係式 (3.1) を適用すると

$$a_0 = R, \quad (3.13)$$

*3 ゼロレンジ極限では有効レンジモデルが $r_e < 0$ を与えることが 2.2.3 節で示された。一方、4.2.1 節で示すように、有限のカットオフを持つ有効レンジモデルでは $r_e > 0$ にもなり得る。

となり、低エネルギー普遍性の帰結を再現することがわかる。しかし、この関係は1チャンネルでゼロレンジの系全てに当てはまるわけではなく、例外が存在する。それが2.2節で議論した有効レンジモデルで記述される系である。有効レンジモデルは1チャンネルのモデルであり、相互作用距離は $R_{\text{typ}} = 1/\Lambda$ と見積もることができるから、くりこみを行い $\Lambda \rightarrow \infty$ とすることでゼロレンジ極限を取ることができる。よって、 $\Lambda \rightarrow \infty$ とした散乱振幅

$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 - ik \right]^{-1}, \quad (3.14)$$

は1チャンネルかつゼロレンジの系に対応する。散乱振幅 (3.14) の極を与える方程式

$$-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 - ik = 0, \quad (3.15)$$

の解である k は束縛状態の固有運動量である。束縛エネルギー $B > 0$ (固有エネルギー $E = -B$) と固有運動量には、

$$-B = \frac{k^2}{2\mu}, \quad (3.16)$$

という関係がある。ここで、 $\mu = m/2$ は同種粒子の散乱チャンネルの換算質量である。この関係より、束縛状態の固有運動量 k は純虚数になるので

$$k \equiv i\kappa, \quad (3.17)$$

と実数 $\kappa > 0$ を定義することで、束縛状態の波動関数の半径 R は

$$R \equiv \frac{1}{\sqrt{2\mu B}} = \frac{1}{\kappa}, \quad (3.18)$$

と書くことができる。

κ で束縛状態の条件 (3.15) を書き換えると

$$\frac{r_e}{2}\kappa^2 - \kappa + \frac{1}{a_0} = 0, \quad (3.19)$$

となる。これを κ について解くと

$$\kappa_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2r_e/a_0}}{r_e}, \quad (3.20)$$

の2つの解が得られる。2.2.3節で示したように、ゼロレンジ極限の有効レンジモデルでは $r_e < 0$ であり、弱束縛状態が存在するときは $a_0 > 0$ である。この2つの条件の下で

は、常に $1 - 2r_e/a_0 > 0$ となるから、 $\kappa_+ < 0$ となり、束縛状態の条件を満たさない。一方 $r_e/a_0 < 0$ より $\sqrt{1 - 2r_e/a_0} < 1$ なので $\kappa_- > 0$ となるため、束縛状態に対応する κ は

$$\kappa_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 2r_e/a_0}}{r_e}, \quad (3.21)$$

のみである。 $\kappa_+ < 0$ の極が表す状態はバーチャル状態と呼ばれる。バーチャル状態とは、純虚数で虚部が負の固有運動量を持つ、非物理的な状態である。ただし、 1S_0 チャンネルの 2 核子散乱で知られるように、バーチャル状態に対応する極が原点の近くにある場合は物理的な散乱に影響を与える。(3.20) 式より $a_0 \rightarrow +\infty$ のとき $\kappa_+ \rightarrow 2/r_e$ となるが、 $\kappa_- \rightarrow 0$ となる。よって、弱束縛のときに運動量の原点に近いのは κ_- の極であり、 κ_+ の極は低エネルギーの散乱に影響を及ぼさないので無視できる。

(3.21) 式を a_0 について解くと、

$$a_0 = \frac{2r_e}{1 - (r_e\kappa_- - 1)^2}, \quad (3.22)$$

となり、この結果に (3.15) を用いて r_e/R で展開すると、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2r_e}{1 - (r_e/R - 1)^2} \\ &= R \frac{2r_e/R}{1 - (r_e/R - 1)^2} \\ &= R \frac{2r_e/R}{1 - (r_e/R)^2 + 2(r_e/R) - 1} \\ &= R \frac{2r_e/R}{-(r_e/R)^2 + 2(r_e/R)} \\ &= R \frac{1}{-r_e/(2R) + 1} \\ &= R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_e}{R} + \dots \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

となり、この計算より

$$a_0 = R \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{|r_e|}{R} \right) \right], \quad (3.24)$$

という結果を得る。有効レンジモデルでは $r_e \neq 0$ であるから、有効レンジ r_e の寄与によって $a_0 = R$ からのずれが生じたことがわかる。有効レンジモデルは 1 チャンネルゼロ

レンジのモデルであるにもかかわらず (3.13) と矛盾しており、(3.24) は弱束縛関係式の有効レンジ r_e によるレンジ補正の必要性を示している。

(3.24) 式で厳密に弱束縛の極限 $B \rightarrow 0$ をとる場合を考える*4。パラメタは a_0 と r_e の2つあるので極限のとり方は一意的でないが、まず r_e を固定して $a_0 \rightarrow \infty$ の極限をとる場合を考える。このとき R は、

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\kappa_-} \\
&= \frac{r_e}{1 - \sqrt{1 - 2r_e/a_0}} \\
&= \frac{r_e}{1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2r_e}{a_0} + \dots\right)} \\
&= \frac{r_e}{r_e/a_0 + \dots} \\
&= a_0 + \dots, \tag{3.25}
\end{aligned}$$

となるので、 $a_0 = R$ の低エネルギー普遍性を満たしながら $R \rightarrow \infty$ となる弱束縛の極限が実現される。次に、 r_e と a_0 の比を固定

$$\frac{r_e}{a_0} = c \quad (c \neq 0), \tag{3.26}$$

して $a_0 \rightarrow \infty$ の極限を考える。 r_e を固定した場合とは異なり、 $|r_e| \rightarrow \infty$ になっていることに注意する。このとき R は

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\kappa_-} \\
&= \frac{r_e}{1 - \sqrt{1 - 2r_e/a_0}} \\
&= \frac{a_0 c}{1 - \sqrt{1 - 2c}} \\
&\rightarrow \infty, \tag{3.27}
\end{aligned}$$

となり、弱束縛の極限になっているが

$$\frac{R}{a_0} = \frac{c}{1 - \sqrt{1 - 2c}} \neq 1, \tag{3.28}$$

*4 例として、冷却原子系での Feshbach 共鳴のように散乱長を制御できる場合が挙げられる [48]。このとき、 R_{typ} などの系の長さスケールは変えずに、束縛エネルギーだけを変えることができる。

であり、 $a_0 \neq R$ となって低エネルギー普遍性を満たさない。しかし、(3.26) 式を満たしながら $a_0 \rightarrow \infty$ とする κ_- の極の留数は 0 になり、極が散乱振幅に存在しなくなるので、この極限を満たす束縛状態は存在しないことが知られている [49]。つまり、弱束縛の極限で極として存在する状態に対しては、必ず低エネルギー普遍性が満たされる*5。

3.1.4 有効レンジ展開の高次項

有効レンジモデルは、ゼロレンジ極限で散乱長 a_0 以外に有効レンジ r_e のみが残るモデルであるが、一般の散乱振幅の有効レンジ展開は運動量 k の 4 次以上の項を含んでいる。ここでは、より高次の項の係数の絶対値が大きく、有効レンジ r_e 以外の長さスケールが残る場合を考える。

散乱振幅が k の 4 次の項を含む

$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 - \frac{P_s}{4}k^4 - ik \right]^{-1}, \quad (3.29)$$

で与えられる場合を考える。 P_s はシェイプパラメタと呼ばれ、長さの 3 乗の次元を持つ。

3.1.3 節と同様に $k \equiv i\kappa$ とおき、束縛状態の条件を a_0 について解くと

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a_0} - \frac{r_e}{2}\kappa^2 - \frac{P_s}{4}\kappa^4 + \kappa &= 0 \\ \Leftrightarrow a_0 &= \left[-\frac{P_s}{4}\kappa^4 - \frac{r_e}{2}\kappa^2 + \kappa \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

となる。(3.30) 式は全ての固有状態の κ に対して成り立つので、束縛状態の κ に対しても成り立ち*6、弱束縛状態が存在する場合

$$\kappa = \frac{1}{R}, \quad (3.31)$$

*5 この議論より、 $B \rightarrow 0$ なら、必ず $a_0 = R$ かつ $X = 1$ になる。しかし、 $B \neq 0$ の場合には、 $a_0 = R$ であっても $X = 1$ とは限らない。例として、 $X \neq 1$ で弱束縛関係式の X の項と誤差項の和がちょうど 1 になるような場合が考えられる。同様に、 $B \neq 0$ で $X = 1$ のときに必ず $a_0 = R$ になるとも限らない。例として、ゼロレンジ極限の有効レンジモデル (3.24) が挙げられる。

*6 他に考えられる κ は、共鳴状態とバーチャル状態などがある。

であることを用いると、

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left[-\frac{P_s}{4} \left(\frac{1}{R} \right)^4 - \frac{r_e}{2} \left(\frac{1}{R} \right)^2 + \frac{1}{R} \right]^{-1} \\
&= R \left[-\frac{P_s}{4} \left(\frac{1}{R} \right)^3 - \frac{r_e}{2} \frac{1}{R} + 1 \right]^{-1} \\
&= R \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_e}{R} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{r_e}{R} \right)^2 + \left(\frac{r_e^3}{8} + \frac{P_s}{4} \right) \left(\frac{1}{R} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\frac{r_e^4}{R^4}, \frac{|r_e P_s|}{R^4} \right) \right], \quad (3.32)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\frac{|P_s|}{R^3} \ll \frac{|r_e|}{R} \ll 1, \quad (3.33)$$

の場合、(3.32) 式は有効レンジモデルの場合の散乱長の表式 (3.24) になる。一方、

$$\frac{|r_e|}{R} \ll \frac{|P_s|}{R^3} \ll 1, \quad (3.34)$$

の場合、散乱長は

$$a_0 = R \left[1 + \frac{P_s}{4} \left(\frac{1}{R} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\frac{|r_e|}{R} \right) \right], \quad (3.35)$$

となり、今度はシェイプパラメタ P_s が残ることがわかる。よって、散乱長は

$$a_0 = R \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{|P_s|}{R^3} \right) \right], \quad (3.36)$$

となることがわかる。

通常の系では r_e や P_s のオーダーは系の相互作用に特徴的な長さスケールで決まると期待される。例えば強い相互作用の場合、特徴的な長さスケールは 1 fm 程度なので、 $|r_e| \sim 1 \text{ fm}$ 、 $|P_s| \sim 1 \text{ fm}^3$ と期待される。弱束縛のとき、 R は他の長さスケールに比べて大きいので、(3.33) 式の関係が成り立つのが自然である。しかし、特殊な状況で $|P_s|$ が系の長さスケールより極端に大きい場合、(3.34) 式が成り立ち、散乱長は (3.36) 式のようになり得る。もし、有効レンジ展開に現れる r_e や P_s/R^2 以外の長さスケールが大きい場合も、同様の議論から a_0 はその長さスケールによって R からずれると考えられる。弱束縛関係式のレンジ補正は有効レンジ展開に現れる長さスケール ($|r_e|, |P_s|/R^2, \dots$) のうち、最も大きいものに起因するといえる。

3.2 有効レンジの起源

3.1 節の議論で、有効レンジが弱束縛関係式にレンジ補正を与えることを示した。一方、2 章で示したように、微分結合を持つ有効レンジモデルと、離散状態との結合を持つ共鳴モデルでは有限の有効レンジがあらわれる。これは、有効レンジの起源が少なくとも 2 種類あることを示唆している*7。本節では、有効場の理論を用いて有効レンジの起源を調べ、弱束縛関係式のレンジ補正との関係を議論する。

3.2.1 有効場の理論と有効レンジ

有効レンジの起源を調べるために、有効レンジモデルの相互作用

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{4}\lambda_0(\psi^\dagger\psi)^2 + \frac{1}{4}\rho_0\nabla(\psi^\dagger\psi) \cdot \nabla(\psi^\dagger\psi), \quad (3.37)$$

と共鳴モデルの相互作用

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{4}\lambda_0(\psi^\dagger\psi)^2 + \frac{1}{2}g_0(\phi^\dagger\psi^2 + \psi^{\dagger 2}\phi), \quad (3.38)$$

の両方を持つ有効場の理論 (2.2 節と 2.3 節参照)

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{4}\lambda_0(\psi^\dagger\psi)^2 + \frac{1}{4}\rho_0\nabla(\psi^\dagger\psi) \cdot \nabla(\psi^\dagger\psi) + \frac{1}{2}g_0(\phi^\dagger\psi^2 + \psi^{\dagger 2}\phi), \quad (3.39)$$

を考える。この Hamiltonian は有効レンジモデルの特徴であった微分結合 (ρ_0 の項) と、共鳴モデルの特徴であった離散固有状態 ϕ との結合 (g_0 の項) を両方含んでいる。

ここで、くりこみをする前のゼロレンジモデルの散乱振幅は 2.1 節でみたように次のようになる：

$$f(k) = -\frac{m}{8\pi} \left[\frac{1}{\lambda_0} + \frac{m}{4\pi}\Lambda + i\frac{m}{8\pi}k \right]^{-1}. \quad (3.40)$$

このゼロレンジモデルに離散固有状態 ϕ との結合を入れたのが共鳴モデルの散乱振幅は

$$f(k) = -\frac{m}{8\pi} \left[\left(\lambda_0 + \frac{g_0^2}{E - v_0} \right)^{-1} + \frac{m}{4\pi}\Lambda + i\frac{m}{8\pi}k \right]^{-1}, \quad (3.41)$$

*7 他に考えられる起源はと時間微分結合を含む相互作用などである。

である。共鳴モデルとゼロレンジモデルの散乱振幅を比べると、ベアパラメタ λ_0 に対して

$$\lambda_0 \rightarrow \lambda_0 + \frac{g_0^2}{E - v_0}, \quad (3.42)$$

という置き換えがされていることがわかる。よって、(3.42) 式の置き換えをすることで、離散固有状態 ϕ の影響を散乱振幅に取り入れることができるといえる。有効レンジモデルの散乱振幅 (2.63) 式でベアパラメタ λ_0 に同様の置き換えをすると、微分結合と離散固有状態 ϕ の両方の影響を取り入れた散乱振幅、つまり (3.39) 式の Hamiltonian に対応する散乱振幅

$$f(k) = \left(-\frac{8\pi}{m} \frac{[1 + \frac{m}{12\pi^2}\rho_0\Lambda^3]^2}{[\lambda_0 + \frac{g_0^2}{E-v_0} - \frac{m}{20\pi^2}\rho_0^2\Lambda^5] + 2\rho_0[1 + \frac{m}{24\pi^2}\rho_0\Lambda^3]k^2} - \frac{2\Lambda}{\pi} - ik \right)^{-1}, \quad (3.43)$$

が得られる。

散乱振幅 (3.43) 式から得られる散乱長や有効レンジは微分結合と離散固有状態 ϕ の両方の寄与を含んでいる。式 (3.43) から散乱長や有効レンジを求めるにあたって、表記を簡単にするために以下を定義する：

$$\begin{aligned} A &= -\frac{8\pi}{m} [1 + (m/12\pi^2)\rho_0\Lambda^3]^2, \\ B &= \lambda_0 - (m/20\pi^2)\rho_0^2\Lambda^5, \\ C &= 2\rho_0 [1 + (m/24\pi^2)\rho_0\Lambda^3], \\ D &= B - \frac{g_0^2}{v_0}. \end{aligned}$$

すると散乱振幅 (3.43) の分母は

$$f(k)^{-1} = \frac{A}{[B + \frac{g_0^2}{E-v_0}] + Ck^2} - \frac{2}{\pi}\Lambda - ik, \quad (3.44)$$

となる。 $E = k^2/m$ に注意し、実部を k^2 のべきで展開すると

$$\begin{aligned} f(k)^{-1} &= \frac{A}{[B + \frac{mg_0^2}{k^2 - mv_0}] + Ck^2} - \frac{2}{\pi}\Lambda - ik \\ &= \frac{A}{\left[B - \frac{g_0^2}{v_0} \left(1 - \frac{k^2}{mv_0} \right)^{-1} \right] + Ck^2} - \frac{2}{\pi}\Lambda - ik \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{\left[D - \frac{g_0^2}{v_0} \frac{k^2}{mv_0} + \mathcal{O}(k^4) \right] + Ck^2} - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \\
&= \frac{A}{D + \left(C - \frac{g_0^2}{mv_0^2} \right) k^2 + \mathcal{O}(k^4)} - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \\
&= \frac{A}{D} \left[1 + \frac{\left(C - \frac{g_0^2}{mv_0^2} \right) k^2}{D} + \mathcal{O}(k^4) \right]^{-1} - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \\
&= \frac{A}{D} \left[1 - \frac{\left(C - \frac{g_0^2}{mv_0^2} \right) k^2}{D} \right] - \frac{2}{\pi} \Lambda + \mathcal{O}(k^4) - ik,
\end{aligned}$$

有効レンジ展開 (3.14) より、散乱長の逆数は散乱振幅の分母の実部の k の 0 次の係数であったので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_0} &= -\frac{A}{D} + \frac{2}{\pi} \Lambda \\
&= \frac{8\pi}{m} \frac{[1 + (m/12\pi^2)\rho_0\Lambda^3]^2}{\lambda_0 - (m/20\pi^2)\rho_0^2\Lambda^5 - g_0^2/v_0} + \frac{2}{\pi} \Lambda \\
\Rightarrow a_0 &= \left[\frac{8\pi}{m} \frac{[1 + (m/12\pi^2)\rho_0\Lambda^3]^2}{\lambda_0 - (m/20\pi^2)\rho_0^2\Lambda^5 - g_0^2/v_0} + \frac{2}{\pi} \Lambda \right]^{-1}, \quad (3.45)
\end{aligned}$$

であり、有効レンジは 2 次の項の係数から決まるので

$$\begin{aligned}
\frac{r_e}{2} &= -\frac{A[C - g_0^2/(mv_0^2)]}{D^2} \\
\Rightarrow r_e &= \frac{16\pi}{m} \frac{[1 + (m/12\pi^2)\rho_0\Lambda^3]^2 \{ 2\rho_0[1 + (m/24\pi^2)\rho_0\Lambda^3] - \frac{g_0^2}{mv_0^2} \}}{\left[\lambda_0 - (m/20\pi^2)\rho_0^2\Lambda^5 - \frac{g_0^2}{v_0} \right]^2}, \quad (3.46)
\end{aligned}$$

となることがわかる。これらの散乱長 (3.45) 式と有効レンジ (3.46) 式は、Hamiltonian (3.39) から求められたものなので、微分結合と離散固有状態の両方の寄与が含まれている。ここで、 g_0 は共鳴モデルの Hamiltonian (3.38) で離散固有状態 ϕ との結合定数であるので $g_0 \rightarrow 0$ の極限で離散固有状態の影響は消え、散乱長と有効レンジは有効レンジモデルの結果 (2.68) と (2.69) に一致する。また、 ρ_0 は有効レンジモデルの Hamiltonian (3.37) で微分結合の項の結合定数であったから、 $\rho_0 \rightarrow 0$ の極限で微分結合の影響は消え、散乱長と有効レンジは共鳴モデルの結果 (2.90) と (2.91) になる。 $g_0 \rightarrow 0$ かつ $\rho_0 \rightarrow 0$ の極限では、離散固有状態と微分結合両方の影響が消えるので、散乱長はゼロレンジモデルの結果 (2.17) になる。この極限で有効レンジは 0 になるが、これもゼロレンジモデルの結果と整合性がある。

3.2.2 有効レンジと弱束縛関係式

さて、3.1.2 節より、有効レンジモデルは 1 チャンネルのモデルで束縛状態の複合性は $X = 1$ であり、2.2 節より、微分結合が原因で有効レンジが有限になることが分かっていた。よって、微分結合に起因する有効レンジは $X = 1$ の関係を変えないと考えることができる。一方、3.1.2 節より、共鳴モデルは $X < 1$ の束縛状態を持つモデルであり、2.3 節より、離散固有状態が原因で有効レンジが有限になることが分かっていた。よって、有効レンジが離散固有状態に起因する場合、束縛状態の複合性は $X < 1$ になる。

有効レンジモデルで相互作用距離を 0 にするゼロレンジ極限をとった場合、 a_0 と R の関係は

$$a_0 = R \frac{2r_e/R}{1 - (r_e/R - 1)^2}, \quad (3.47)$$

となる。ここで \bar{R} を

$$\bar{R} \equiv R \frac{2r_e/R}{1 - (r_e/R - 1)^2}, \quad (3.48)$$

と定義し、この \bar{R} を用いて弱束縛関係式を

$$a_0 = \bar{R} \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O} \left(\frac{R_{\text{typ}}}{R} \right) \right\}, \quad (3.49)$$

と定義すると、有効レンジモデルの 1 チャンネル ($X = 1$) ゼロレンジ ($R_{\text{typ}} = 0$) の結果 $a_0 = \bar{R}$ を矛盾なく説明できる。つまり (3.49) 式は、弱束縛関係式に対するレンジ補正の 1 つと考えることができる。一方、共鳴モデルでの有効レンジの起源は離散固有状態であったから、 $X < 1$ である。よって、(3.49) 式で定義された \bar{R} で書いた弱束縛関係式を用いて複合性を計算すると、 $X = 1$ になり、矛盾が生じる。つまり、微分結合に起因する有効レンジには (3.49) 式によるレンジ補正が適用できるが、離散固有状態に起因する場合は (3.49) 式は適用できないといえる。模型空間が定義より決まっているモデル計算において、有効レンジの起源が離散固有状態に起因する場合には適用できないが、一般に観測から得られた有効レンジの起源を決めることはできない。よって、観測から得られた有効レンジに対し、(3.49) 式のレンジ補正の妥当性は判断できないので、不定性なく (3.49) 式を用いることはできない。さらに、微分結合と離散固有状態のどちらも持つモデルの場合、(3.46) より微分結合に起因する有効レンジ (ρ_0 の項) と離散固有状態に起因する有効レンジ (g_0 の項) を分離できない。よって、モデル計算の場合でも (3.49) 式のようなレンジ補正を適用することはできない。

3.3 弱束縛関係式の改良

3.2 節での議論から、弱束縛関係式の中心値へのレンジ補正をすることはできないと分かった。また、3.1 節では有効レンジに代表される有効レンジ展開に現れる長さスケールが低エネルギー普遍性の関係 $a_0 = R$ をずらすことを示した。これらより、レンジ補正として弱束縛関係式の誤差項への改良を提案する。改良では、誤差項へのレンジ補正を考え、 R_{typ} を再定義する。

まず、有効レンジ展開に現れる長さスケール R_{eff} を

$$R_{\text{eff}} = \max \left\{ |r_e|, \frac{|P_s|}{R^2}, \dots \right\}, \quad (3.50)$$

と定義する。ここで、シェイプパラメタ P_s は有効レンジ展開 (3.29) の k^4 の係数であり、 R^2 で規格化することで P_s/R^2 が長さの次元になる。つまり、 R_{eff} は散乱振幅の有効レンジ展開の係数にあらわれる長さスケールのうち、散乱長以外の最大のものと定義される。

従来の弱束縛関係式の誤差項では、相互作用距離を R_{typ} と表記していたが、以降は相互作用距離を R_{int} と表記する。つまり、有効場の理論の場合、カットオフを用いて $R_{\text{int}} \sim 1/\Lambda$ と見積もられる。誤差項に用いる R_{typ} は R_{int} か R_{eff} の大きい方として再定義する：

$$R_{\text{typ}} = \max\{R_{\text{int}}, R_{\text{eff}}\}. \quad (3.51)$$

この再定義により、有効レンジモデルのゼロレンジ極限 ($R_{\text{int}} \rightarrow 0$) では $R_{\text{eff}} = |r_e|$ となるので、弱束縛関係式を適用した結果 (3.24)

$$a_0 = R \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{|r_e|}{R} \right) \right], \quad (3.52)$$

も矛盾なく説明できる。また、シェイプパラメタが大きい場合でも $R_{\text{typ}} = |P_s|$ となるので、(3.36) 式の結果を矛盾なく説明できる。再定義した R_{typ} の元で、 $R_{\text{eff}} < R_{\text{int}}$ のときは $R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}$ となり従来の弱束縛関係式に戻る。有効レンジが相互作用距離に比べて大きい系では誤差項を再定義した弱束縛関係式を適用する必要があると期待される。^{*8}

^{*8} 逆に、有効レンジが大きすぎると弱束縛関係式の誤差項も大きくなりすぎてしまい、複合性の誤差が大きくなるため系の内部構造に関する妥当な議論ができないことに注意する。

第 4 章

数値計算によるレンジ補正の妥当性の検証

弱束縛関係式の誤差項に対するレンジ補正の改良の妥当性を検証するため、束縛状態の複合性 X の真の値 X_{exact} が定義からわかっており、散乱長や束縛エネルギーが計算可能なモデルを用いて、弱束縛関係式から誤差を含む X の値を見積もる数値計算を行なう。具体的には、カットオフ Λ を有限に取ることで、有限の相互作用距離 $R_{\text{int}} = 1/\Lambda \neq 0$ をもつ有効レンジモデル (2.2 節参照) を用いる。有効レンジ r_e と R_{int} を変えながら、弱束縛関係式が有用であるための条件

正確さの条件：複合性の真の値 X_{exact} が弱束縛関係式から見積もられた X の誤差の範囲に入るという条件

を満たすパラメタ領域を探し、レンジ補正により改良した弱束縛関係式と従来の弱束縛関係式の適用範囲を比較する。

本節では以下の内容を述べる。まず、4.1 節では、先行研究 [20] による誤差の定量的な評価方法を用いて弱束縛関係式の適用可能性の具体的な検証方法を確立する。次に、4.2 節では有限の相互作用距離を持つ有効レンジモデルを用いて、改良した弱束縛関係式と従来のものの正確さの条件が成り立つパラメタ領域を調べることで、弱束縛関係式の適用範囲を議論する。最後に、4.3 節では先行研究 [20] で論じられていた、有効レンジ展開の高次項を中心値に取り入れた改良を数値的に評価する。

4.1 弱束縛関係式の適用可能性の評価

この節では、弱束縛関係式の適用範囲を数値計算で調べる。そのために、4.1.1 節で弱束縛関係式の誤差項を具体的に評価し、複合性 X の誤差の範囲を見積もる方法を議論する。4.1.2 節で、複合性の真の値と弱束縛関係式から見積もられる複合性の誤差の範囲の比較によって、弱束縛関係式の適用可能性の評価基準を提案する。

4.1.1 誤差の評価

観測量である散乱長 a_0 と束縛状態の半径 $R = 1/\sqrt{2\mu B}$ から、弱束縛関係式

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}, \quad (4.1)$$

により複合性 X を見積もることができる。 X を中心値 X_c と誤差に分けた場合、 X_c は、弱束縛関係式の誤差項 $\mathcal{O}(R_{\text{typ}}/R)$ を無視し、(4.1) 式を X について解くことで与えられる：

$$X_c = \frac{a_0/R}{2 - a_0/R}. \quad (4.2)$$

X の誤差項を定量的に評価するために、無次元量 ξ を次のように定義する [20]：

$$\xi = \frac{R_{\text{typ}}}{R}. \quad (4.3)$$

もし $\xi \geq 1$ ならば、弱束縛関係式 (4.1) の R_{typ}/R での展開が収束しないため、 $\xi < 1$ である必要がある。また、3.3 節の定義より、 $R_{\text{typ}} \geq 0$ となり、式 (4.3) より $\xi \geq 0$ なので、今考える ξ の範囲は $0 \leq \xi < 1$ である。弱束縛関係式の誤差項を $\pm\xi$ に置き換えると

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} \pm \xi \right\}, \quad (4.4)$$

となり、この式を X について解くと、次のようになる：

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{R} &= \frac{2X}{1+X} \pm \xi \\
\frac{a_0}{R} \mp \xi &= \frac{2X}{1+X} \\
\left(\frac{a_0}{R} \mp \xi\right)(1+X) &= 2X \\
\left(\frac{a_0}{R} \mp \xi\right) + X\left(\frac{a_0}{R} \mp \xi\right) &= 2X \\
X\left(\frac{a_0}{R} \mp \xi\right) - 2X &= -\left(\frac{a_0}{R} \mp \xi\right) \\
X &= -\frac{a_0/R \mp \xi}{a_0/R \mp \xi - 2} \\
X &= \frac{a_0/R \mp \xi}{2 - a_0/R \pm \xi}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

よって、 $0 \leq \xi < 1$ より X の上限 X_u と下限 X_l は次のようになる*1：

$$X_u(\xi) = \frac{a_0/R + \xi}{2 - a_0/R - \xi}, \tag{4.6}$$

$$X_l(\xi) = \frac{a_0/R - \xi}{2 - a_0/R + \xi}. \tag{4.7}$$

3.3 節より、 R_{typ} は有効レンジ展開の長さスケール R_{eff} と相互作用の到達距離 R_{int} の 2 通りの場合があるので、誤差が R_{eff} に起因する場合は ξ_{eff} 、 R_{int} に起因する場合は ξ_{int} と表記する。つまり、無次元の誤差を

$$\xi_{\text{eff}} = \frac{R_{\text{eff}}}{R}, \quad \xi_{\text{int}} = \frac{R_{\text{int}}}{R}, \tag{4.8}$$

のように表記する。

4.1.2 有用性の評価

弱束縛関係式の適用可能性を議論するためには、複合性の真の値 X_{exact} がわかっているモデルを用いる必要がある。同じモデルで、散乱長、有効レンジ、束縛エネルギーを得ることができれば、弱束縛関係式から複合性 X の中心値 X_c 、上限 X_u と下限 X_l を (4.2)

*1 定義より $R > 0$ であり、束縛状態を考えているので $a_0 > 0$ であるから、 $a_0/R > 0$ である。弱束縛のとき $a_0 \sim R$ であるから、 $a_0/R \sim 2 - a_0/R \sim 1$ となる。よって、 $0 \leq \xi < 1$ のときに $X_u(\xi) > X_l(\xi)$ となる。 $R > a_0$ ならば、 $X_u(\xi)$ の分母は必ず正になり、 $X_u(\xi) > 0$ となるが、 $R < a_0$ の場合において ξ が 1 に近ければ、分母の符号が反転し、 $X_u(\xi) < 0$ となり得ることに注意する。

式、(4.6) 式、(4.7) 式から計算できる。弱束縛関係式から見積もられた X が有用であるためには、複合性の真の値 X_{exact} が弱束縛関係式から見積もられた X の誤差の範囲に入る必要がある。この条件（正確さの条件）を式で表すと、

$$X_l < X_{\text{exact}} < X_u, \quad (4.9)$$

となる。

一方で、(4.9) 式が満たされていても、弱束縛関係式によって状態の構造を判定できない場合がある。誤差が十分大きい場合には、任意の値の X_{exact} が必ず誤差の範囲に含まれてしまう。例えば、 $X_u > 1, X_l < 0$ の場合を考えると、定義上 $0 \leq X_{\text{exact}} \leq 1$ なので、正確さの条件 (4.9) は常に満たされる。しかしこの場合、誤差が大きすぎて弱束縛関係式によって X が 1 に近いかわりに 0 に近いかわりを判断できないから、弱束縛関係式の結果は束縛状態の構造を調べる上で有用ではない。よって、正確さの条件 (4.9) に加えて、見積もりの精密さを定量的に評価する必要がある。精密さの見積もりの議論のために、誤差の幅 E

$$E = X_u - X_l, \quad (4.10)$$

を考えてみる。 E が大きいと X を精度良く見積もることができない。よって、 E は弱束縛関係式による X の見積もりの誤差を定量的に表している。しかし、 X の定義域は $0 \leq X \leq 1$ であり、 $X_u > 1$ または $X_l < 0$ の場合は X_{exact} が存在し得ない範囲も E に含まれてしまうので、 E で考えた場合は誤差を過大評価している。よって、 X の定義域に含まれない範囲を排除した実質的な誤差の幅 \bar{E}

$$\bar{E} = \bar{X}_u - \bar{X}_l, \quad \bar{X}_u = \min\{X_u, 1\}, \quad \bar{X}_l = \max\{X_l, 0\}, \quad (4.11)$$

で評価する。意味のある見積もりのためには \bar{E} が小さい必要がある。例えば $\bar{E} > 0.5$ の場合、誤差が定義域の半分以上を占めるので、 X の真の値が 1 に近いかわりに 0 に近いかわりを判断できない。よって、弱束縛関係式から X の値を有用に見積もるためには、正確さの条件に加えて、精密さ \bar{E} が最大でも 0.5 以下である必要がある。

4.2 有効レンジモデルでの数値計算

数値計算では、有限の相互作用距離 $R_{\text{int}} \neq 0$ 、つまり有限のカットオフ ($\Lambda < \infty$) をもつ有効レンジモデルを用い、 X の中心値と誤差を弱束縛関係式で評価する。有効レンジモデルは 1 チャンネルのモデルなので、 $X_{\text{exact}} = 1$ である (3.1.2 節を参照)。2.2.1 節での計算にあったように、この場合の散乱振幅は散乱長 a_0 以外に 2 つの長さスケール、有

効レンジ r_e と相互作用距離 $R_{\text{int}} = 1/\Lambda$ を持つ：

$$f(k; \lambda_0, \rho_0, \Lambda) = \left[-\frac{8\pi}{m} \frac{\left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0\right)^2}{\left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2\right] + 2\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1\right) k^2} - \frac{2}{\pi} \Lambda - ik \right]^{-1}. \quad (4.12)$$

ここで、散乱長 a_0 は

$$a_0(\lambda_0, \rho_0, \Lambda) = \frac{m}{8\pi} \frac{1}{\left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \rho_0 \Lambda^3\right]^2 / \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2\right] + \frac{m}{4\pi^2} \Lambda}, \quad (4.13)$$

である。また、有効レンジ r_e は

$$r_e(\lambda_0, \rho_0, \Lambda) = \frac{32\pi}{m} \frac{\rho_0 \left(1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0\right)^2 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1\right)}{\left(\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2\right)^2}, \quad (4.14)$$

であり、ここで λ_0, ρ_0 は有効レンジモデルの Hamiltonian (2.23) にあられるベアパラメタであり、 Λ はカットオフである。束縛状態の固有運動量 k は、散乱振幅 (4.12) の極 $|f(k)| \rightarrow \infty$ によって与えられ、正の純虚数の固有運動量 $k = i\kappa$ から束縛状態の半径 $R = i/k$ を求めることができる。散乱振幅 (4.12) の極の条件は k の 3 次式になるため、数値計算で求める。(4.14) 式により $r_e \neq 0$ であり、カットオフが有限であることから $R_{\text{int}} = 1/\Lambda \neq 0$ でもある。よってこのモデルでは、2 つの長さスケールのそれぞれが R_{typ} になりうることから、見積もるべき誤差項 ξ も

$$\xi_{\text{eff}} = \frac{R_{\text{eff}}}{R} = \frac{|r_e|}{R}, \quad (4.15)$$

$$\xi_{\text{int}} = \frac{R_{\text{int}}}{R} = \frac{1}{\Lambda R}, \quad (4.16)$$

の 2 つあることがわかる。ここで、有効レンジの値は $r_e < 0$ になりうることから ξ_{eff} は絶対値をつけて定義する。 a_0 と R が決まれば、(4.2) 式より複合性の中心値 X_c を得ることができる。また、(4.15) 式と (4.16) 式より ξ_{eff} と ξ_{int} が決まると、(4.6) 式、(4.7) 式より弱束縛関係式の誤差項を見積もることができ、 ξ_{eff} と ξ_{int} のそれぞれに対して X_u と X_l を決定できる。これらより、4.1 節で議論した正確さの条件の確認と、誤差の幅 E と \bar{E} の評価ができるので、弱束縛関係式の適用可能性を調べることができる。

有効レンジモデルのベアパラメタ λ_0, ρ_0 とカットオフ Λ を調整することで、散乱長 $a_0(\lambda_0, \rho_0, \Lambda)$ と有効レンジ $r_e(\lambda_0, \rho_0, \Lambda)$ 、束縛状態の半径 R 、 ξ_{int} と ξ_{eff} を任意に決めることができる。よって、 ξ_{eff} による正確さの条件と、 ξ_{int} による正確さの条件は、与えられたパラメタに対してそれぞれ独立に成立する。従来の弱束縛関係式 ($R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}$) が

適用可能であるためには、 ξ_{int} による正確さの条件が成立する必要がある。一方、改良した弱束縛関係式 ($R_{\text{typ}} = \max\{R_{\text{int}}, R_{\text{eff}}\}$) が適用可能であるためには、 ξ_{int} による正確さの条件が成り立っていなかったとしても、 $\xi_{\text{eff}} > \xi_{\text{int}}$ となる場合は ξ_{eff} での正確さの条件が成り立っていれば良い。よって、 ξ_{eff} による正確さの条件のみが成立するような場合、改良した弱束縛関係式のみが有用であると期待される。

4.2.1 有効レンジモデルにおけるベアパラメタ ρ_0 と r_e の範囲

弱束縛関係式の妥当性の評価をするために、有効レンジ r_e と相互作用距離 R_{int} を自由に変えて、正確さの条件を調べたい。しかし、このモデルで自由にとれる変数はベアパラメタ λ_0 、 ρ_0 とカットオフ Λ である。数値計算を実行するために、散乱長 a_0 の表式 (4.13) を用いて r_e を ρ_0, a_0, Λ の関数に書き換える。ここで、散乱長 a_0 を長さの基準とし、無次元化した ρ_0 と Λ で r_e をあらわすと、変数が1つ減って2つになる。弱束縛関係式の適用可能性を調べるためには、任意の R_{int} と r_e の値が必要である。 $R_{\text{int}} = 1/\Lambda$ であり、 Λ が変数だから、 R_{int} を自由に決めることができる。一方、 r_e は ρ_0 と Λ の関数であるが、その形は簡単ではないため、まず r_e の ρ_0 依存性を調べる。

前節の散乱長 (4.13) 式と有効レンジ (4.14) 式からベアパラメタ λ_0 を消去すると、(2.71) 式で示したように、次のようになる：

$$r_e = \frac{2m \rho_0 [1 + (m/24\pi^2)\rho_0\Lambda^3]}{\pi^3 [1 + (m/12\pi^2)\rho_0\Lambda^3]^2} \left[\Lambda - \frac{\pi}{2a_0} \right]^2. \quad (4.17)$$

数値計算の簡単のために、変数 r_e, ρ_0, Λ を a_0 と m を基準として無次元化すると

$$\begin{aligned} \frac{r_e}{a_0} &= \frac{2m \rho_0 [1 + (m/24\pi^2)\rho_0/a_0^3(a_0\Lambda)^3]}{\pi^3 [1 + (m/12\pi^2)\rho_0/a_0^3(a_0\Lambda)^3]^2} \left[\Lambda - \frac{\pi}{2a_0} \right]^2 \frac{1}{a_0} \\ &= \frac{2m \rho_0 [1 + (m/24\pi^2)\rho_0/a_0^3(a_0\Lambda)^3]}{\pi^3 [1 + (m/12\pi^2)\rho_0/a_0^3(a_0\Lambda)^3]^2} \left[\Lambda - \frac{\pi}{2a_0} \right]^2 \frac{a_0^2}{a_0^3} \\ &= \frac{2}{\pi^3} \frac{m\rho_0/a_0^3 [1 + (1/24\pi^2)m\rho_0/a_0^3(a_0\Lambda)^3]}{[1 + (1/12\pi^2)m\rho_0/a_0^3(a_0\Lambda)^3]^2} \left[a_0\Lambda - \frac{\pi}{2} \right]^2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

と書けるので、無次元の各変数を

$$\tilde{r}_e = \frac{r_e}{a_0}, \quad (4.19)$$

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{m\rho_0}{a_0^3}, \quad (4.20)$$

$$\tilde{\Lambda} = a_0\Lambda, \quad (4.21)$$

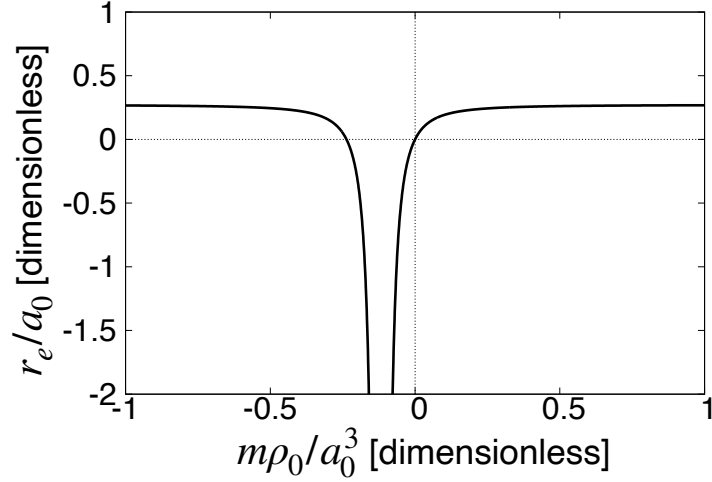


図 4.1 $\tilde{\Lambda} = a_0\Lambda = 10$ の場合の (4.22) 式によるベアパラメタ $\tilde{\rho}_0 = m\rho_0/a_0^3$ の関数としての有効レンジ $\tilde{r}_e = r_e/a_0$ 。

とすると、

$$\tilde{r}_e = \frac{2}{\pi^3} \frac{\tilde{\rho}_0 [1 + (1/24\pi^2)\tilde{\rho}_0\tilde{\Lambda}^3]}{[1 + (1/12\pi^2)\tilde{\rho}_0\tilde{\Lambda}^3]^2} \left[\tilde{\Lambda} - \frac{\pi}{2} \right]^2, \quad (4.22)$$

となる。ここで、独立な変数は $\tilde{\rho}_0$ と $\tilde{\Lambda}$ であり、 $\tilde{\Lambda}$ はカットオフなので正であるが $\tilde{\rho}_0$ は結合定数なので正と負のどちらの値も取りうる。相互作用距離は $R_{\text{int}} = 1/\Lambda$ であるから、無次元化すると $\tilde{R}_{\text{int}} = R_{\text{int}}/a_0$ となる。また、同様に $\tilde{R}_{\text{typ}} = R_{\text{typ}}/a_0$ 、 $\tilde{R}_{\text{eff}} = R_{\text{eff}}/a_0$ とする。

図 4.1 に $\tilde{\Lambda} = 10$ の場合で、 $\tilde{\rho}_0$ の関数としての \tilde{r}_e を図示する。この図から、 \tilde{r}_e は $\tilde{\rho}_0 < 0$ のある点で $-\infty$ に発散していることがわかる。発散を与える $\tilde{\rho}_0$ は (4.22) 式の分母が 0 になる点なので

$$1 + \frac{\tilde{\rho}_0\tilde{\Lambda}^3}{12\pi^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\rho}_0 = -\frac{12\pi^2}{\tilde{\Lambda}^3}, \quad (4.23)$$

と求められる。また、微分結合が 0 となる $\tilde{\rho}_0 = 0$ の点から連続なパラメタの範囲 $-12\pi^2/\tilde{\Lambda}^3 < \tilde{\rho}_0$ で \tilde{r}_e は単調増加することがわかる：

$$\frac{d\tilde{r}_e}{d\tilde{\rho}_0} = \frac{2}{\pi^3} \frac{1}{[1 + (1/12\pi^2)\tilde{\rho}_0\tilde{\Lambda}^3]^3} \left[\tilde{\Lambda} - \frac{\pi}{2} \right]^2 > 0. \quad (4.24)$$

ただし、ここで分母が $-12\pi^2/\tilde{\Lambda}^3 < \tilde{\rho}_0$ の条件のもとで正であることを用いた。よって、この範囲にパラメタを限れば、 \tilde{r}_e と $\tilde{\rho}_0$ は 1 対 1 対応になる。

\tilde{r}_e の値に下限はないが、 $\tilde{\rho}_0$ の単調増加関数であることから最大値は $\tilde{\rho}_0 \rightarrow +\infty$ のときであり、その極限は

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_e &= \frac{2}{\pi^3} \frac{\tilde{\rho}_0 [1 + (1/24\pi^2)\tilde{\rho}_0\tilde{\Lambda}^3]}{[1 + (1/12\pi^2)\tilde{\rho}_0\tilde{\Lambda}^3]^2} \left[\tilde{\Lambda} - \frac{\pi}{2} \right]^2 \\
&= \frac{2}{\pi^3} \frac{[1/\tilde{\rho}_0 + (1/24\pi^2)\tilde{\Lambda}^3]}{[1/\tilde{\rho}_0 + (1/12\pi^2)\tilde{\Lambda}^3]^2} \left[\tilde{\Lambda} - \frac{\pi}{2} \right]^2 \\
&\rightarrow \frac{2}{\pi^3} \frac{(1/24\pi^2)\tilde{\Lambda}^3}{[(1/12\pi^2)\tilde{\Lambda}^3]^2} \left[\tilde{\Lambda} - \frac{\pi}{2} \right]^2 \quad (\tilde{\rho}_0 \rightarrow \infty) \\
&\rightarrow \frac{12}{\pi\tilde{\Lambda}^3} \left[\tilde{\Lambda} - \frac{\pi}{2} \right]^2 \quad (\tilde{\rho}_0 \rightarrow \infty), \tag{4.25}
\end{aligned}$$

と収束することがわかる*2。これを \tilde{R}_{int} で書き直すと

$$\tilde{r}_e = \frac{12}{\pi} \tilde{R}_{\text{int}}^3 \left[\frac{1}{\tilde{R}_{\text{int}}} - \frac{\pi}{2} \right]^2 \tag{4.26}$$

$$= \frac{12}{\pi} \tilde{R}_{\text{int}} - 12\tilde{R}_{\text{int}}^2 + 3\pi\tilde{R}_{\text{int}}^3, \tag{4.27}$$

となり、これは \tilde{R}_{int} を固定したときの \tilde{r}_e の上限を与える。一般に、有効レンジ r_e の値には Wigner bound と呼ばれる上限が与えられており [24]、(4.26) 式は有効レンジモデルの場合の Wigner bound を与えている。(4.26) 式の Wigner bound は $\tilde{R}_{\text{int}} \geq 0$ なので正となる：

$$\frac{12}{\pi} \tilde{R}_{\text{int}}^3 \left[\frac{1}{\tilde{R}_{\text{int}}} - \frac{\pi}{2} \right]^2 \geq 0. \tag{4.28}$$

またこの式は、 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0$ 以外に

$$\left[\frac{a_0}{R_{\text{int}}} - \frac{\pi}{2} \right]^2 = 0, \tag{4.29}$$

のとき、つまり

$$\frac{R_{\text{int}}}{a_0} = \frac{2}{\pi} \sim 0.64, \tag{4.30}$$

の点で $\tilde{r}_e = 0$ になる。 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0$ 以外に Wigner bound が 0 となる点があることは有効レンジモデルの面白い特徴であるが、このことは (4.26) 式は有効レンジモデルの場合のみ成り立ち、一般にいえるわけではないことに注意する。

*2 $-12\pi^2/\tilde{\Lambda}^3 > \tilde{\rho}_0$ では $\tilde{\rho}_0$ は単調減少で、 $\tilde{\rho}_0 \rightarrow -\infty$ で (4.25) に収束する。よって、 $\tilde{\rho}_0 \rightarrow \pm\infty$ の極限で同じ値に収束し、(4.25) が上限であることがわかる。

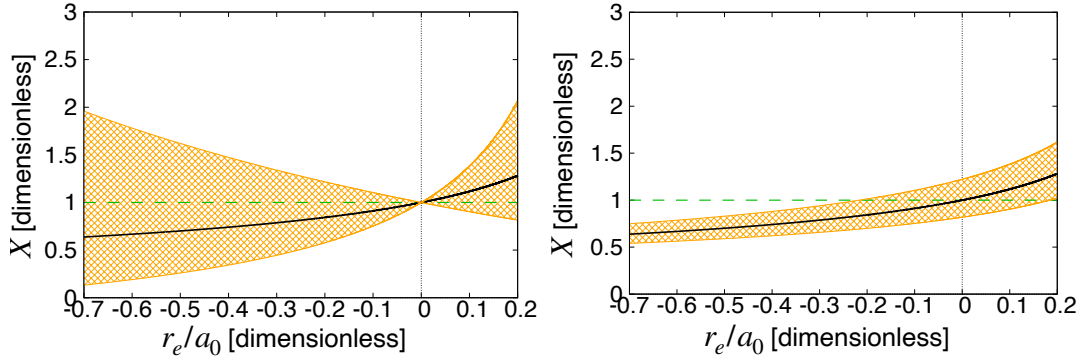


図 4.2 複合性の真の値 $X_{\text{exact}} = 1$ (破線) と弱束縛関係式を使った見積もり (実線) と誤差の範囲。 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.1$ の場合。左図は有効レンジによる誤差 ξ_{eff} の場合で、右図は相互作用距離による誤差 ξ_{int} の場合。

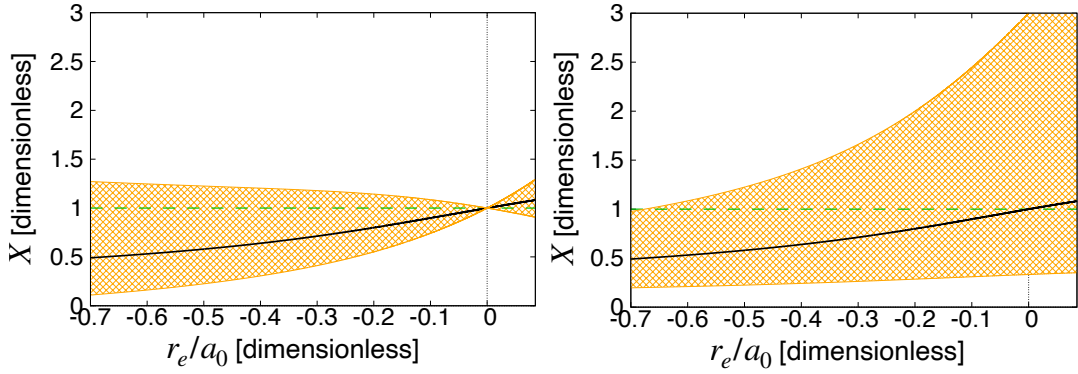


図 4.3 複合性の真の値 $X_{\text{exact}} = 1$ (破線) と弱束縛関係式を使った見積もり (実線) と誤差の範囲。 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.5$ の場合。左図は有効レンジによる誤差 ξ_{eff} の場合で、右図は相互作用距離による誤差 ξ_{int} の場合。

4.2.2 弱束縛関係式による X の評価

有効レンジ \tilde{r}_e による誤差 ξ_{eff} と相互作用距離 \tilde{R}_{int} による誤差 ξ_{int} を含む複合性 X の振る舞いを調べるために、弱束縛関係式 (4.1) から複合性 X を数値的に見積もる。4.2.1 節で議論したように、無次元化したカットオフ $\tilde{\Lambda}$ とベアパラメタ $\tilde{\rho}_0$ を変数に取り、 $-12\pi^2/\tilde{\Lambda}^3 < \tilde{\rho}_0$ の範囲で計算することで任意の $\tilde{R}_{\text{int}} = 1/\tilde{\Lambda}$ と \tilde{r}_e が得られる。よって、 ξ_{int} と ξ_{eff} の2つの誤差の場合で数値計算を行うことができる。

図 4.2 に $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.1$ 、図 4.3 に $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.5$ に固定したときの X の中心値 X_c を誤差の範囲とともに \tilde{r}_e の関数として示す。比較のために、 X の真の値 $X_{\text{exact}} = 1$ を破線で示す。

$\tilde{R}_{\text{int}} = 0.2, 0.3, 0.4$ の場合の図は、B.1 節に示す。 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.1$ の場合の \tilde{r}_e の上限である Wigner bound は $\tilde{r}_e \sim 0.27$ 、 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.5$ の場合の Wigner bound は、 $\tilde{r}_e \sim 0.09$ である。ここで、左図は ξ_{eff} で見積もった誤差をプロットしているので、 $R_{\text{typ}} = |r_e|$ の場合に対応している。また右図は、 ξ_{int} で見積もった誤差をプロットしているので、 $R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}$ の場合に対応している。左図を見るとわかるように、中心値は $|\tilde{r}_e|$ が増加すると $X_{\text{exact}} = 1$ からずれていくが、 ξ_{eff} による誤差も増加する。よって、 X の真の値 $X_{\text{exact}} = 1$ は常に誤差の範囲に含まれており、正確さの条件が常に満たされている。このことは、B.1 節で示された $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.2, 0.3, 0.4$ の場合においても成り立ち、 $\tilde{R}_{\text{int}} \leq 0.5$ の範囲において、 ξ_{eff} での正確さの条件は常に成り立つ。

一方、右図を見るとわかるように、 ξ_{int} による誤差の大きさは \tilde{R}_{int} を固定しているので \tilde{r}_e を変えても左図ほどには変化しない。よって、 $|\tilde{r}_e|$ が大きくなると中心値のずれが誤差より大きくなり、 $X_{\text{exact}} = 1$ が誤差に含まれなくなる。 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.1$ の場合は $\tilde{r}_e \gtrsim 0.2$ と $\tilde{r}_e \lesssim -0.2$ の領域で、 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.5$ の場合は $\tilde{r}_e \lesssim -0.7$ の領域で、 X_{exact} は誤差の範囲に含まれない。よって、 ξ_{int} による誤差は $|\tilde{r}_e|$ が大きい領域で正確さの条件 (4.9) を満たさないことがわかる。これは、有効レンジの絶対値が大きい場合、 $R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}$ である従来の弱束縛関係式では複合性を正確に見積もれないことを示している。ここで、 $R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}$ の場合に正確さの条件が破綻する \tilde{r}_e の値が $\tilde{r}_e < 0$ で X の上限値 X_u 、 $\tilde{r}_e > 0$ で X の下限値 X_l で与えられることに注意する。具体的に $X_{\text{exact}} = 1$ の有効レンジモデルでは、正確さの条件が破綻しはじめる $|\tilde{r}_e|$ の値は

$$X_u = \frac{a_0/R + \xi_{\text{int}}}{2 - a_0/R - \xi_{\text{int}}} = 1 \quad (\tilde{r}_e < 0), \quad (4.31)$$

$$X_l = \frac{a_0/R - \xi_{\text{int}}}{2 - a_0/R + \xi_{\text{int}}} = 1 \quad (\tilde{r}_e > 0), \quad (4.32)$$

から決定できる。また、 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.1$ の場合と $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.5$ の場合を比較すると、 \tilde{R}_{int} が増加すると ξ_{int} での正確さの条件 (4.9) が成立する領域も広くなることがわかる。理由として、 \tilde{R}_{int} が増加するにつれて ξ_{int} の誤差も増加するからと考えられる。

4.2.3 弱束縛関係式が有用であるパラメタ領域

弱束縛関係式の $\tilde{R}_{\text{int}}-\tilde{r}_e$ 平面での適用可能範囲を議論するため、複合性 X の真の値 X_{exact} が弱束縛関係式から見積もられる誤差の範囲に含まれている正確さの条件を満たす領域を数値計算で調べる。4.2.2 節での議論から、 \tilde{R}_{int} を固定した場合、 ξ_{eff} の誤差を用いる場合は正確さの条件 (4.9) は任意の \tilde{r}_e で成り立つことが分かった。一方、 ξ_{int} の誤

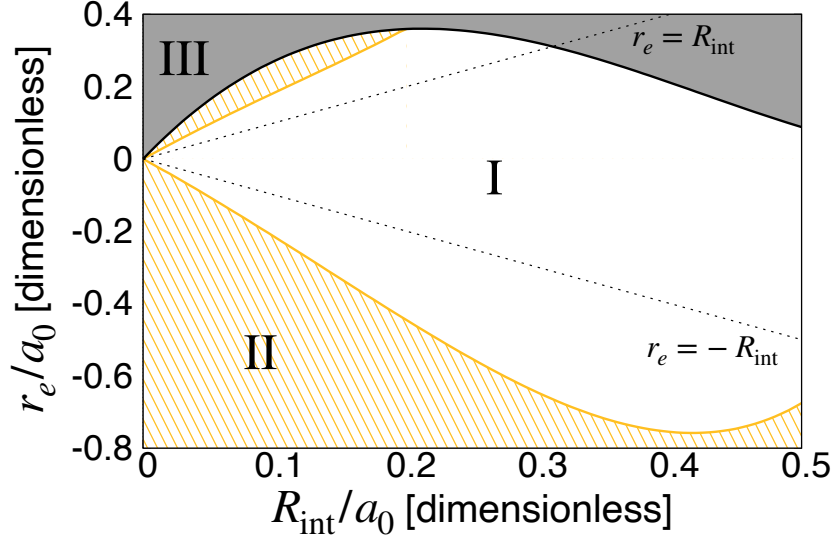


図 4.4 $\tilde{R}_{\text{int}}-\tilde{r}_e$ 平面での弱束縛関係式の適用可能範囲。実線は \tilde{r}_e の上限である Wigner bound と ξ_{int} による正確さの条件が破綻する境界。領域 I は従来と改良したどちらの弱束縛関係式も適用可能である領域であり、領域 II は改良した弱束縛関係式のみが適用可能である領域である。ここで、領域 III は Wigner bound を超えるため、有効レンジモデルでは実現不可能である。

差を用いる場合は

$$X_u = 1 \quad (\tilde{r}_e < 0), \quad X_l = 1 \quad (\tilde{r}_e > 0), \quad (4.33)$$

となる \tilde{r}_e を超えると正確さの条件が破綻する領域が存在する。よって、 \tilde{R}_{int} を変えながら (4.33) 式を数値的に計算することで、 $\tilde{R}_{\text{int}}-\tilde{r}_e$ 平面での ξ_{int} の正確さの条件が満たされる領域を調べることができる。

図 4.4 に有効レンジ \tilde{r}_e の上限である Wigner bound (4.26) と ξ_{int} による正確さの条件が破綻する境界 (4.33) を $\tilde{R}_{\text{int}}-\tilde{r}_e$ 平面に示す。Wigner bound より上の領域 III は有効レンジモデルで実現不可能な領域である。Wigner bound より下で、 ξ_{int} による正確さの条件が破綻する境界の内側を領域 I、外側を領域 II とする。また、点線で示した $r_e = \pm R_{\text{int}}$ はレンジ補正で改良した弱束縛関係式 (3.51) で R_{typ} として採用される誤差が R_{eff} か R_{int} かを決める境界になっている。領域 I では、 ξ_{eff} と ξ_{int} の両方の誤差の場合で X_{exact} が X の誤差の範囲に含まれているので、従来のもので改良したものの両方の弱束縛関係式に対して正確さの条件が成り立つ。一方領域 II は、 ξ_{int} による正確さの条件が破綻する境界 (4.33) よりも外側であるので、 ξ_{eff} の誤差の場合のみ正確さの条件が満たされている。図 4.4 からわかるように、 $r_e = \pm R_{\text{int}}$ の線が領域 I に入っているため、 ξ_{eff} での正確

さの条件のみが成立している領域 II では必ず $R_{\text{eff}} > R_{\text{int}}$ となっている。よって、領域 II では $R_{\text{typ}} \equiv \max\{R_{\text{int}}, R_{\text{eff}}\}$ を誤差項にもつ改良した弱束縛関係式のみ適用可能である。以上より、改良した弱束縛関係式の方が適用可能領域が広いことがわかり、改良は妥当であったと考えられる。

また、誤差の幅 E と \bar{E} を評価したものを $\tilde{R}_{\text{int}}-\tilde{r}_e$ 平面に図 4.5 と図 4.6 として示す。図 4.6 において、従来の弱束縛関係式の適用限界と Wigner bound で囲まれる領域は、 $\bar{E} = 1 - X_l < 0$ となり、精密さを正しく議論することができないので、精度が悪い $\bar{E} = 1$ の領域としてプロットした。図 4.5 は有効レンジによる誤差 ξ_{eff} で見積もられた誤差の幅 E (左図) と \bar{E} (右図) を示したものであり、図 4.6 は相互作用距離による誤差 ξ_{int} で見積もられた誤差の幅 E (左図) と \bar{E} (右図) を示したものである。図 4.5 において $|\tilde{r}_e|$ が小さいほど、 ξ_{eff} による誤差も小さくなるので、 $|\tilde{r}_e|$ が小さいほど誤差の幅 E と \bar{E} も小さく、精度が良い見積もりができるが、 $|\tilde{r}_e|$ が大きくなると、誤差の幅も大きくなるから精度が悪くなる。 E と \bar{E} の図を比較すると、特に $\tilde{r}_e > 0$ において、 \bar{E} の方が E より精度が良い範囲が広いことがわかる。その理由は、 $X_u > 1$ となるため、1 以上 X_u 以下にある誤差が \bar{E} の定義により除外され、誤差の幅が小さくなるからである。また、図 4.5 から、 ξ_{eff} による誤差は \tilde{R}_{int} にほとんど依存していないこともわかる。実際に、 ξ_{eff} の誤差を異なる R_{int} で比較すると、図 4.2、図 4.3 と B.1 節の図より、誤差の幅はほぼ変わらないといえる。

一方、図 4.6 において、同じ \tilde{r}_e に対し、 \tilde{R}_{int} が小さいほど、 ξ_{int} による誤差の幅も小さくなることがわかる。また、図 4.5 とは異なり、同じ \tilde{R}_{int} に対する誤差の幅 E と \bar{E} は、 \tilde{r}_e によって明確に変化しているとわかる。その理由は、図 4.2、図 4.3 と B.1 節で示されたように、同じ \tilde{R}_{int} の場合でも、 \tilde{r}_e が変化すると、誤差の幅も変化するからである。 E と \bar{E} の図を比較すると、図 4.5 と同様の理由により、 \bar{E} の方が E より精度が良い範囲が広いことがわかる。また、図 4.6 右図の $\tilde{r}_e < 0$ における従来の弱束縛関係式の適用限界より下では、 $\bar{X}_u = X_u, \bar{X}_l = X_l$ となることから、 $E = \bar{E}$ になり、図 4.6 の左図と誤差の振る舞いが同じになることもわかる。

最後に、図 4.5 と図 4.6 の \bar{E} を比較すると、例えば $\tilde{R}_{\text{int}} \sim 0.1, \tilde{r}_e \sim -0.6$ の領域において、 ξ_{int} で評価した誤差の幅 \bar{E} の方が ξ_{eff} での誤差の幅より小さく、 ξ_{int} での見積もりの方が精度が良さそうに思える。しかし、この領域では、 $R_{\text{int}} < R_{\text{eff}}$ となることからレンジ補正が重要であり、誤差を ξ_{int} で見積もる従来の弱束縛関係式を適用した場合は誤差を過小評価していると考えられる。

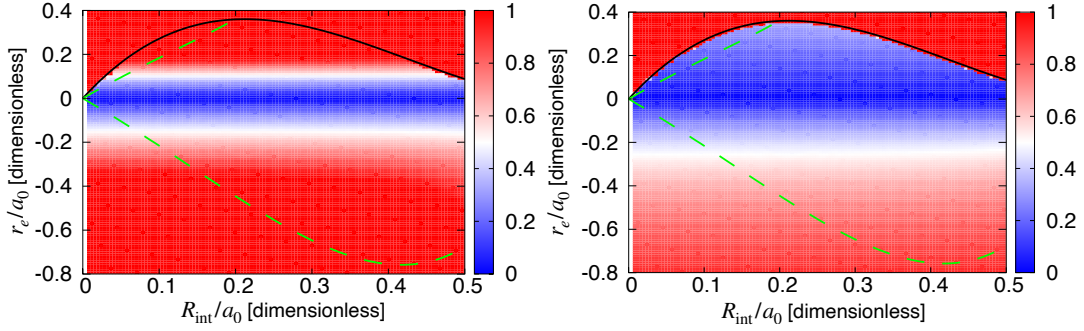


図 4.5 有効レンジによる誤差 ξ_{eff} で見積もられた X の誤差の幅 E (左図) と \bar{E} (右図)。実線は Wigner bound、破線は従来の弱束縛関係式の適用限界。

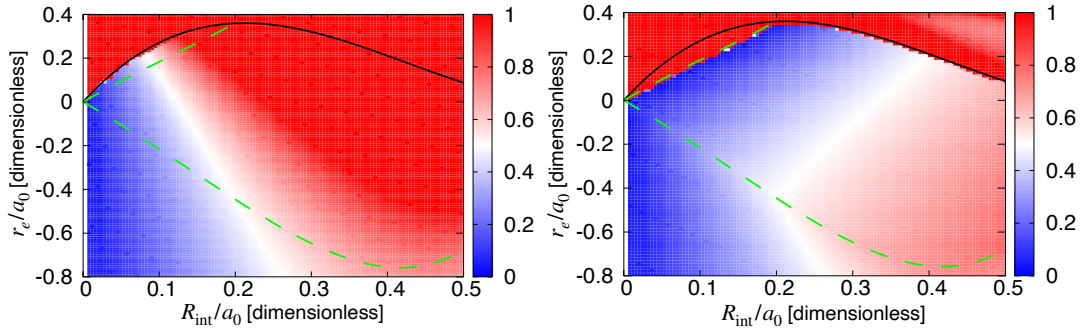


図 4.6 有効レンジによる誤差 ξ_{int} で見積もられた X の誤差の幅 E (左図) と \bar{E} (右図)。実線は Wigner bound、破線は従来の弱束縛関係式の適用限界。右図において、 $\bar{E} < 0$ の範囲は精度が悪い $\bar{E} = 1$ の領域としてプロットした。

4.3 有効レンジ展開による改良の検証

先行研究 [20] で与えられていた有効レンジ展開による弱束縛関係式の改良 (2.4.5 節参照) を数値計算で検証する。この散乱長 a_0 と束縛状態の半径 R で記述した (2.136) 式の複合性 $X(a_0, R)$ の中心値

$$X(a_0, R) = \frac{a_0}{2R - a_0}, \quad (4.34)$$

を有効レンジ展開の運動量 k の 2 次の項まで考えた束縛状態の条件で書き換えた有効レンジ r_e と R で記述した (2.138) 式の複合性 $X(r_e, R)$ の中心値

$$X(r_e, R) = \frac{R}{R - r_e}, \quad (4.35)$$

と、有効レンジ展開の k^4 の項まで考慮し、 a_0 と r_e と R で記述した (2.145) 式の複合性 $X(a_0, r_e, R)$ の中心値

$$X(a_0, r_e, R) = \left[\frac{4R}{a_0} + \frac{r_e}{R} - 3 \right]^{-1}, \quad (4.36)$$

を比較する。(4.36) 式には有効レンジ展開のより高次項の影響が取り入れられているので、4.2 節での弱束縛関係式で使われた $X(a_0, R)$ の (4.34) 式を改良した表式と考えられる。

まず、改良した (4.36) 式の $X(a_0, r_e, R)$ と (4.34) 式の $X(r_e, R)$ を解析的に比較し、両者が一致する条件を調べる。有効レンジ展開の k^4 の項まで考慮した束縛状態の条件式

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a_0} - \frac{r_e}{2R^2} + \frac{1}{R} - \frac{1}{4} \frac{P_s}{R^4} &= 0 \\ -\frac{r_e}{2R^2} + \frac{1}{R} - \frac{1}{4} \frac{P_s}{R^4} &= \frac{1}{a_0}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

を用いて $X(a_0, r_e, R)$ (4.36) から a_0 を消去すると、

$$\begin{aligned} X &= \left[4R \left(-\frac{r_e}{2R^2} + \frac{1}{R} - \frac{1}{4} \frac{P_s}{R^4} \right) + \frac{r_e}{R} - 3 \right]^{-1} \\ &= \left[-\frac{2r_e}{R} + 4 + \frac{r_e}{R} - 3 - \frac{P_s}{R^3} \right]^{-1} \\ &= \left[-\frac{r_e}{R} + 1 - \frac{P_s}{R^3} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{r_e}{R} - \frac{P_s}{R^3}} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{r_e}{R}\right)^{-1}}{1 - \frac{\frac{P_s}{R^3}}{1 - \frac{r_e}{R}}} \\ &= \left(1 - \frac{r_e}{R}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\frac{P_s}{R^3}}{1 - \frac{r_e}{R}}\right)^{-1} + \dots \\ &= \frac{R}{R - r_e} \left(1 + \frac{P_s}{R^3}\right) + \dots, \end{aligned} \quad (4.38)$$

となる。 $P_s/R^3 \ll 1$ の場合 (4.38) 式の P_s の項を無視することができるので、(4.38) 式は (4.35) 式に帰着する。同様に、(2.137) 式を用いて (4.36) 式から r_e を消去すると (4.34) 式に帰着する。よって、(4.36) 式はシェイプパラメタ P_s の影響を取り入れた改良であることが確認できる。

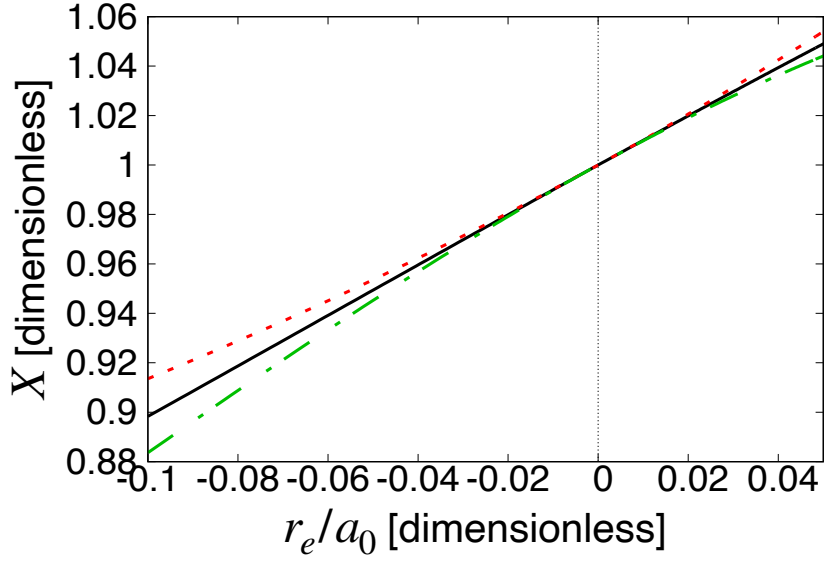


図 4.7 $R_{\text{int}} = 0.5a_0$ の有効レンジモデルでの複合性 X の中心値の比較。実線は (4.34) 式の $X(a_0, R)$ の中心値、点線は (4.35) 式の $X(r_e, R)$ の中心値、一点鎖線は (4.36) 式の $X(a_0, r_e, R)$ の中心値を表す。

次に、改良された $X(a_0, r_e, R)$ が元の $X(a_0, R)$ に比べて適用可能範囲を広げるかどうかを定量的に数値計算で確認する。 $R_{\text{int}} = 0.5a_0$ の有効レンジモデルを用い、 $\tilde{r}_e = r_e/a_0$ を変数とした複合性の中心値を図 4.7 にプロットする。図 4.7 より、 $\tilde{r}_e = 0$ で $X(a_0, R), X(r_e, R), X(a_0, r_e, R)$ は全て 1 になる。この理由は、 r_e と ρ_0 の関係 (2.69) より $r_e = 0$ の場合は $\rho_0 = 0$ であることにある。 $\rho_0 = 0$ で散乱振幅 (2.63) の k^2 の項が 0 になるので、ゼロレンジモデルの場合 (2.15) に帰着し、 $r_e = 0$ では $R = a_0$ となり $X(a_0, R), X(r_e, R), X(a_0, r_e, R)$ の中心値は $X = 1$ になる*³。改良した $X(a_0, r_e, R)$ は $\tilde{r}_e > 0$ の領域では $X(a_0, R)$ よりも真の値 $X = 1$ に近いが、 $\tilde{r}_e < 0$ の領域では真の値からのずれが大きい。よって誤差を含めて考えると、 $X(a_0, r_e, R)$ の改良によって、 $\tilde{r}_e > 0$ の領域では正確さの条件を満たす上限が広がるが、 $\tilde{r}_e < 0$ の領域では狭まることがわかる。しかし、例えば $\tilde{r}_e \sim -0.1$ のとき、改良による中心値の変化は 0.015 程度であるのに対し、図 4.2 と同様に評価した誤差の幅は 2 程度である。よって、誤差に対して、中心値の改良のオーダーは非常に小さく、有効レンジ展開の高次項の影響を取り入れた弱束縛関係式の改良は、適用可能範囲をほとんど広げないと考えられる。異なる R_{int} の場合でも、

*³ Λ が十分大きい場合、 $r_e = 0$ で $X = 1$ になるのは有効レンジモデルの散乱振幅 (2.63) の特徴であり、一般のモデルで Λ が有限の場合の R は有効レンジ展開の高次項の影響も含んでいるため、 $r_e = 0$ で常に $R = a_0$ になるとは限らない。

同様の結果を得ることを確認した。

第 5 章

物理系への応用

弱束縛状態を持つ系に対して散乱長 a_0 と束縛状態の半径 $R \equiv \sqrt{2\mu B}$ からモデル非依存に束縛状態の内部構造を決定できる弱束縛関係式にレンジ補正を施したもの

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}, \quad R_{\text{typ}} = \max\{R_{\text{int}}, R_{\text{eff}}\}, \quad (5.1)$$

を実際の物理系に応用し、束縛状態の内部構造を決定する。ただし、 μ は換算質量、 B は束縛エネルギーである。また、比較のため従来の弱束縛関係式

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}, \quad R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}, \quad (5.2)$$

を用いた結果も示す。低エネルギー普遍性に基づく弱束縛関係式は条件を満たせば任意の長さスケールを持つ物理系に適用可能である。ここでは弱束縛関係式が応用できると期待される物理系として、エキゾチックハドロン候補、ハイパー核、原子の系を考える。

5.1 物理系の散乱長と有効レンジ

まず、本研究で弱束縛関係式を適用する系を導入する。表 5.1 に、議論する束縛状態と結合する 2 粒子系の質量を示す。重陽子を含め、ハドロンの質量は PDG [5] のものと格子 QCD の値を使用し、原子質量単位 u を用いたヘリウム原子の質量は、文献 [52] の値を使用する。まず、実験で観測されている系の代表例として、陽子 (p) と中性子 (n) の束縛状態である重陽子 (d) が挙げられる。また、近年発見されたエキゾチックハドロンの例として、 $X(3872)$ を挙げる。 $X(3872)$ に結合する $D^0\bar{D}^{*0}$ の波動関数は、正確には荷

表 5.1 束縛状態と結合する 2 体系の粒子 1、2 とその質量 m_1 、 m_2 。ハドロンの質量は PDG [5]、 $N\Omega$ 、 $\Omega\Omega$ dibaryon は格子 QCD [50, 51]、 ${}^4\text{He}$ の質量は文献 [52] の値を用いる。

束縛状態	粒子 1	粒子 2	m_1	m_2
d	p	n	938.272 MeV	939.565 MeV
$X(3872)$	D^0	\bar{D}^{*0}	1864.84 MeV	2010.26 MeV
$N\Omega$ dibaryon	N	Ω	955 MeV	1712 MeV
$\Omega\Omega$ dibaryon	Ω	Ω	1712 MeV	1712 MeV
${}^3_{\Lambda}\text{H}$	d	Λ	1875.613 MeV	1115.638 MeV
${}^4\text{He}$ dimer	${}^4\text{He}$	${}^4\text{He}$	4.00260325415 u	4.00260325415 u

電共役変換に対して正の固有値を持つように

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|D^0\bar{D}^{*0}\rangle + |\bar{D}^0D^{*0}\rangle), \quad (5.3)$$

と線型結合が取られているが、以下では慣例に従い $D^0\bar{D}^{*0}$ と略記する。実験では観測されていないが QCD の第一原理計算である格子 QCD で束縛状態が存在すると予言されている系の例として、 $N\Omega$ dibaryon [50] と $\Omega\Omega$ dibaryon [51] が挙げられる。 N, Ω の質量は、格子 QCD での質量を用いる。ハイパー核の例として、 d と Λ の束縛状態としての ${}^3_{\Lambda}\text{H}$ を挙げる。原子の例として、 ${}^4\text{He}$ 原子の 2 体束縛状態である ${}^4\text{He}$ dimer を考える。

一般に長距離力である Coulomb 相互作用があると、散乱長や有効レンジを定義することができず、弱束縛関係式を直接適用できない。表 5.1 に示した粒子 1,2 のうち、電荷を持っているのは p, Ω, d である。 $N\Omega$ dibaryon は核子 N として中性子を考えれば Coulomb 相互作用は避けられる。Coulomb 相互作用があるのは、粒子 1 と 2 どちらも荷電粒子である $\Omega\Omega$ dibaryon であるが、 $\Omega\Omega$ は強い相互作用のみで計算した格子 QCD の結果を用いることで、Coulomb 相互作用の影響を含まない束縛状態の複合性が議論できる*1。残りの束縛状態は、粒子 1 か 2 の少なくとも片方は中性粒子であるから、Coulomb 相互作用は起きない。よって、本研究で考える状態では散乱長と有効レンジを定義することができる。

弱束縛関係式 (5.1) の適用対象は安定な束縛状態の系だが、 $X(3872)$ と $N\Omega$ dibaryon はチャンネル結合を持つ不安定状態であり、強い相互作用で崩壊する。しかし、 $X(3872)$

*1 物理的な $p\Omega$ dibaryon と $\Omega\Omega$ dibaryon を考える際には、実際には Coulomb 相互作用を含めたポテンシャルで計算する必要がある。

と $N\Omega$ dibaryon は崩壊幅が狭いと期待されている。 $X(3872)$ の崩壊幅は実験により 1.19 ± 0.21 MeV という値が得られており [5]、ハドロンの崩壊幅としてはとても小さい。例えば、典型的なハドロン共鳴である Δ, ρ の崩壊幅はそれぞれ約 120 MeV、約 150 MeV [5] である。メソン交換モデルによって $N\Omega$ dibaryon の崩壊幅は 1 MeV 程度と計算されている*2 [53]。以上より、 $X(3872)$ と $N\Omega$ dibaryon に安定状態の弱束縛関係式を適用する。

これらの系の散乱長 a_0 、有効レンジ r_e 、束縛エネルギー B を表 5.2 にまとめる。本研究ではそれぞれの系について、 a_0, r_e, B を以下の値を利用する。

- 重陽子：現実的核力の 1 つである CD-Bonn ポテンシャルの論文 [54] の値
- $X(3872)$ ：文献 [55] の解析の値（ただし、文献 [37] での有効レンジの不定性の議論にも注意する）
- $N\Omega, \Omega\Omega$ dibaryon：それぞれ文献 [50, 51] の格子 QCD のポテンシャルから得られた結果
- ${}^3_\Lambda\text{H}$ ： a_0, r_e は文献 [56] の有効場の理論による解析の結果、束縛エネルギー B は原子核乾板実験の結果 [57]
- ${}^4\text{He}$ dimer：文献 [58] による LM2M2 ポテンシャルを解いた結果

物理量の単位はハドロン、ハイパー核は eV や fm、原子はボーア半径 (B.R.) やケルビン (K)、原子質量単位 (u) を用いて記述する。今回の計算では、ハドロンやハイパー核の質量と束縛エネルギーの質量は eV、原子系は B.R. で単位をそろえる。束縛エネルギー B から束縛状態の半径 R を求める際に eV と fm の単位を換算するには、 $\hbar c = 197.326980$ MeV fm を用いて次のようにする：

$$\begin{aligned} R &= \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu/c^2[\text{MeV}]B[\text{MeV}]}} \\ &= \frac{\hbar c[\text{MeVfm}]}{\sqrt{2\mu B[\text{MeV}]}} \\ &= \frac{\hbar c}{\sqrt{2\mu B}} [\text{fm}]. \end{aligned}$$

*2 $N\Omega$ 束縛状態は遠心力障壁によって崩壊が抑制されるので崩壊幅が小さいと期待される。 $N\Omega$ はスピン $3/2$ の Ω とスピン $1/2$ の核子の束縛状態であるので、基底状態で期待される s 波でとりうるスピンは 2 と 1 であるが、束縛するのは $J^P = 2^+$ であると格子 QCD [50] により予言されている。 $N\Omega$ の束縛状態は $\Lambda\Xi$ と $\Sigma\Xi$ の崩壊チャンネルと結合するが、 Λ, Σ, Ξ はスピン $1/2$ であり、 $J^P = 2^+$ を組むには、軌道角運動量が 2 である必要がある。しかし、角運動量が大きいと遠心力障壁で崩壊が抑制されるため、崩壊幅は小さいと考えられる。

表 5.2 2 体系の散乱長 a_0 、有効レンジ r_e 、束縛状態の束縛エネルギー B 、束縛状態の半径 R 、相互作用距離 R_{int} 。

束縛状態	a_0	r_e	B	R	R_{int}
d	5.42 fm	1.75 fm	2.22 MeV	4.32 fm	1.43 fm
$X(3872)$	28.5 fm	-5.34 fm	18 keV	33.4 fm	1.43 fm
$N\Omega$ dibaryon	5.30 fm	1.26 fm	1.54 MeV	4.59 fm	0.676 fm
$\Omega\Omega$ dibaryon	4.6 fm	1.27 fm	1.6 MeV	3.81 fm	0.949 fm
${}^3_{\Lambda}\text{H}$	16.8 fm	2.3 fm	0.13 MeV	14.6 fm	4.31 fm
${}^4\text{He}$ dimer	189 B.R.	13.8 B.R.	1.30 mK	182.2 B.R.	10.2 B.R.

また ${}^4\text{He}$ dimer において、文献で mK で記述されている束縛エネルギーを B.R. に換算するには、 $1 \text{ mK} = 3.16682 \times 10^{-9} \hbar^2 / [m_e (\text{B.R.})^2]$ [34] に注意して次のようにする：

$$\begin{aligned}
 R &= \hbar / \sqrt{2\mu B} \\
 &= \hbar / \sqrt{m_{\text{He}} [\text{u}] B [\text{mK}]} \\
 &= \hbar / \sqrt{m_{\text{He}} [\text{u}] B \times 3.16682 \times 10^{-9} \hbar^2 / [m_e [u] (\text{B.R.})^2]} \\
 &= 1 / \sqrt{(m_{\text{He}} / m_e) B \times 3.16682 \times 10^{-9}} [\text{B.R.}] \\
 &= 182.2 [\text{B.R.}]
 \end{aligned}$$

ここで、 m_{He} はヘリウムの質量、 m_e は電子の質量である。以上の方法で束縛状態の半径 $R = (2\mu B)^{-1/2}$ を求めた結果を表 5.2 に示す。

弱束縛関係式から複合性を見積もるためには、観測量である散乱長、有効レンジ、束縛エネルギー以外に、誤差の計算のために相互作用距離 R_{int} を決定する必要がある。 R_{int} 自体は観測量ではないため、微視的理論の相互作用機構を基にして見積もる。本研究ではそれぞれの系において、 R_{int} を以下のように見積もる。

- 重陽子、 $X(3872)$ ：粒子 1,2 間の最も長距離の相互作用である π 中間子交換の長さスケール (π 中間子のコンプトン波長 $R_{\text{int}} \sim 1/m_{\pi}$)*³
- $N\Omega$ dibaryon：格子 QCD [50] の結果をフィッティングした形状因子を

*³ D^0 は $J^P = 0^-$ 、 π^0 は $J^P = 0^-$ であるから、スピンパリティの対称性により $D^0 \pi^0 D^0$ 頂点が禁止されるため、 $D^0 \bar{D}^{*0}$ の弾性散乱では π 中間子は交換できない。しかし、 D^{0*} は $J^P = 1^-$ であるため、始状態 $D^0 \bar{D}^{0*}$ で終状態 $D^{0*} \bar{D}^0$ の散乱では $D^0 \pi^0 D^{0*}$ 頂点と $\bar{D}^{*0} \pi^0 \bar{D}^0$ 頂点が許されるので π 中間子交換が可能である。(5.3) 式のように $X(3872)$ は $D^0 \bar{D}^{*0}$ と $\bar{D}^0 D^{*0}$ の線型結合により表されているので、 π 中間子交換が可能である。

含む (湯川)²+Gaussian ポテンシャル $V_{\text{fit}}(r) = b_1 \exp[-b_2 r^2] + b_3(1 - \exp[-b_4 r^2])^n (e^{-m_\pi^{\text{lat}} r}/r)^2$ ($b_{1,2,3}$ はパラメタ) 中の最も長距離の長さスケール ($R_{\text{int}} \sim 1/2m_\pi^{\text{lat}}$ 、ただし格子 QCD での π 中間子の質量 $m_\pi^{\text{lat}} = 146$ MeV)

- $\Omega\Omega$ dibaryon: 格子 QCD [51] の結果をポテンシャル $V_{\text{fit}}(r) = \sum_{j=1,2,3} c_j \exp[-(r/d_j)^2]$ でフィッティングして得られたパラメタ $c_{1,2,3}, d_{1,2,3}$ を用いて見積もられる最も長距離の長さスケール ($R_{\text{int}} \sim 1/d_3$, $d_3 \sim 0.949$)
- d - $\Lambda(^3\text{H}_\Lambda)$: 重陽子の半径
- ^4He dimer: 原子のポテンシャルに現れる長距離長さスケールのうちの 1 つである vanderWaals 長さ ($R_{\text{int}} \sim l_{\text{vdW}} = (mC_6/\hbar^2)^{1/4}$ 、ただし、 C_6 は文献 [59] で計算された $r \rightarrow \infty$ でのポテンシャルの形 $V(r) \rightarrow C_6/r_6$ の係数)

表 5.2 より、全ての系で散乱長 a_0 が $|r_e|, R_{\text{int}}$ より大きく、弱束縛の系になっていることがわかる。

5.2 有効レンジモデルでの適用可能範囲との比較

物理系へ応用するにあたり、従来の弱束縛関係式 (5.1) とレンジ補正で改良した (5.2) 式の適用可能範囲とそれぞれの系の長さスケールを比較する。そのための目安として、4.2 節で議論した有限の相互作用距離を持つ有効レンジモデルでの弱束縛関係式の適用可能性の結果と系のパラメタを比較する。以下では、各物理系では有効レンジ展開の高次項の係数に極端に大きいものは存在せず、 $R_{\text{eff}} = |r_e|$ となることを仮定する。それぞれの系に対する $\tilde{r}_e = r_e/a_0$ と $\tilde{R}_{\text{int}} = R_{\text{int}}/a_0$ を求め、表 5.3 に示す。長さスケールを散乱長 a_0 で無次元化することで、スケールの異なるハドロン系と原子系を同じ基準で扱うことができる。

表 5.3 に挙げた物理系のパラメタの点を、 $\tilde{R}_{\text{int}}-\tilde{r}_e$ 平面上における有効レンジモデルでの弱束縛関係式の適用可能範囲と共に図 5.1 に示す。図中の $r_e = \pm R_{\text{int}}$ の点線が改良した弱束縛関係式の誤差項を決めており、 $|r_e| < R_{\text{int}}$ の領域では $R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}$ となり従来の弱束縛関係式に帰着する。また、 $|r_e| > R_{\text{int}}$ の領域では $R_{\text{typ}} = |r_e|$ となる。よって、レンジ補正により改良した弱束縛関係式において、 $^3_\Lambda\text{H}$ 以外の状態は、 $R_{\text{typ}} = R_{\text{eff}}$ となり、 $^3_\Lambda\text{H}$ は $R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}$ となる。図 5.1 より、 $X(3872)$ は改良した弱束縛関係式のみ適用可能な領域にあることがわかる。よって、従来の弱束縛関係式では $X(3872)$ の複合性の真の値が見積もられた X の誤差の範囲に含まれていない可能性があり、改良した弱束縛関係式を使わないと $X(3872)$ の複合性を正確に見積もることができないと期待される。

表 5.3 束縛状態と結合する 2 体系の $\tilde{r}_e = r_e/a_0$ と $\tilde{R}_{\text{int}} = R_{\text{int}}/a_0$

束縛状態	\tilde{r}_e	\tilde{R}_{int}
d	0.323	0.264
$X(3872)$	-0.187	0.0501
$N\Omega$ dibaryon	0.238	0.128
$\Omega\Omega$ dibaryon	0.276	0.206
${}^3_{\Lambda}\text{H}$	0.137	0.257
${}^4\text{He}$ dimer	0.0731	0.0539

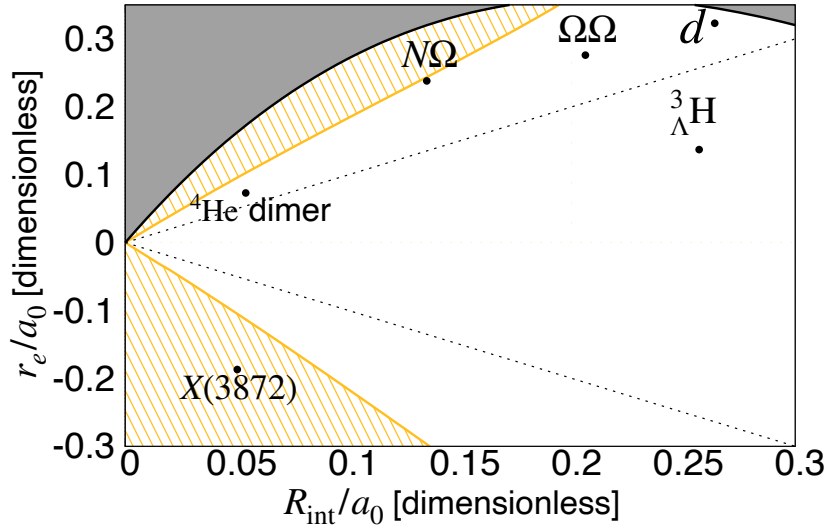


図 5.1 $\tilde{R}_{\text{int}}-\tilde{r}_e$ 平面での弱束縛関係式の適用可能範囲と物理系の比較。白い領域は従来の弱束縛関係式とレンジ補正で改良したものが適用可能な領域である。斜線の領域は改良した弱束縛関係式のみが適用可能な領域である。影付きの領域は Wigner bound を超えるため、有効レンジモデルでは実現できない。点線は $\tilde{r}_e = \pm\tilde{R}_{\text{int}}$ で、改良した弱束縛関係式の誤差項を決める境界を表している。

また、その他の系は従来の弱束縛関係式でも正確さの条件が成り立つ領域にあるが、 $N\Omega$ dibaryon や ${}^4\text{He}$ dimer は従来の弱束縛関係式の適用限界に近いことに注意する^{*4}。 ${}^3_{\Lambda}\text{H}$ は $|r_e| < R_{\text{int}}$ となる領域にあるが、改良した弱束縛関係式において $R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}$ であれば従来の弱束縛関係式に帰着するので、改良した弱束縛関係式も従来のものと同じ結果を

^{*4} 図 5.1 の適用限界は有効レンジモデルの場合の結果による目安なので、限界の内側の系での適用可能性を必ず保証するとは限らない。

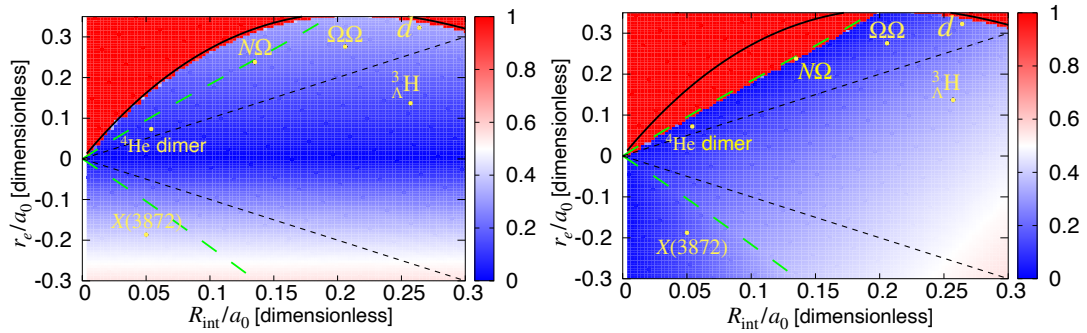


図 5.2 有効レンジモデルでの ξ_{eff} による \bar{E} (左) ξ_{int} による \bar{E} (右)。実線は Wigner bound、破線は従来の弱束縛関係式の適用限界、点線は $\tilde{r}_e = \pm \tilde{R}_{\text{int}}$ で、改良した弱束縛関係式の誤差項を決める境界を表している。

与える。

また、表 5.3 に挙げた物理系のパラメタの点を、 $\tilde{R}_{\text{int}}-\tilde{r}_e$ 平面上における有効レンジモデルでの誤差の幅 \bar{E} と共に図 5.2 に示す。表 5.3 に挙げた物理系は $\xi_{\text{eff}}, \xi_{\text{int}}$ の両方の誤差において $\bar{E} < 0.5$ となり、精度良く X を見積もることができる領域に含まれていることから、弱束縛関係式によって見積もられた X から複合的かそうでないかの有用な議論ができると期待される。

5.3 複合性を見積もり

弱束縛関係式を用いて上に挙げた系の束縛状態の複合性 X を見積もる。定量的に見積もった誤差 $\xi_{\text{eff}} = R_{\text{eff}}/R = |r_e|/R$ と $\xi_{\text{int}} = R_{\text{int}}/R$ とそれぞれの誤差をつけた X の中心値と上限と下限を表 5.4 に示す。従来の弱束縛関係式 (5.2) では常に $R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}$ なので $X(\xi_{\text{int}})$ が複合性の結果となる。一方、改良した弱束縛関係式 (5.1) では、 R_{int} と R_{eff} のうち大きい方が誤差として採用されるため、 ${}^3_{\Lambda}\text{H}$ では ξ_{int} 、それ以外は ξ_{eff} となる。つまり、 ${}^3_{\Lambda}\text{H}$ 以外の系で r_e によるレンジ補正が重要であることを示している。

表 5.4 より、 $X(3872)$ 以外の束縛状態の複合性の中心値 X_c は 1 を超え、 X の定義 $0 \leq X \leq 1$ と矛盾しているように見える。この原因は、束縛状態の半径 R が散乱長 a_0 より大きいことと考えられる。実際、 d の場合、 $R = 4.32 \text{ fm}$ であり、 $a_0 = 5.42 \text{ fm}$ なので、 $a_0 > R$ となっている。一方、3.1 節の議論から、誤差項を無視すると、 $X < 1$ の場合は必ず $a_0 < R$ となる。よって、 $a_0 > R$ となる物理系では、弱束縛関係式の誤差項の影響が重要であり、誤差値を無視して中心値を求めたために $X_c > 1$ が得られたと考えられる。 d の複合性の中心値が 1 を超える問題については、形状因子に対する補正を考える

表 5.4 弱束縛関係式の誤差 $\xi_{\text{eff}}, \xi_{\text{int}}$ と束縛状態の複合性 X の見積もり。従来の弱束縛関係式 (5.2) の結果は $X(\xi_{\text{int}})$ で、レンジ補正で改良した弱束縛関係式 (5.1) は最右列に示す結果を与える。

束縛状態	ξ_{eff}	ξ_{int}	$X(\xi_{\text{eff}})$	$X(\xi_{\text{int}})$	(5.1) の結果
d	0.405	0.331	$1.68^{+3.19}_{-0.943}$	$1.68^{+2.14}_{-0.823}$	$X(\xi_{\text{eff}})$
$X(3872)$	0.160	0.043	$0.743^{+0.282}_{-0.213}$	$0.743^{+0.0675}_{-0.0627}$	$X(\xi_{\text{eff}})$
$N\Omega$ dibaryon	0.277	0.149	$1.40^{+1.20}_{-0.600}$	$1.40^{+0.523}_{-0.364}$	$X(\xi_{\text{eff}})$
$\Omega\Omega$ dibaryon	0.337	0.252	$1.56^{+1.95}_{-0.773}$	$1.56^{+1.22}_{-0.626}$	$X(\xi_{\text{eff}})$
${}^3_{\Lambda}\text{H}$	0.157	0.295	$1.35^{+0.531}_{-0.366}$	$1.35^{+1.241}_{-0.603}$	$X(\xi_{\text{int}})$
${}^4\text{He}$ dimer	0.0760	0.0560	$1.08^{+0.179}_{-0.152}$	$1.08^{+0.129}_{-0.115}$	$X(\xi_{\text{eff}})$

ことで文献 [32] でも議論されている。

a_0 と R の大小は有効レンジ r_e の符号とも関係している。有効レンジ展開の k の 2 次まで考えたとき、3.1.3 節の (3.23) 式の計算より

$$a_0 = R \frac{1}{-r_e/(2R) + 1}, \quad (5.4)$$

と得られる。 $R > 0$ であるので、(5.4) 式の近似が妥当なとき、 $r_e > 0$ の場合は $a_0 > R$ 、 $r_e < 0$ の場合は $a_0 < R$ となる。よって、 $r_e > 0$ であれば弱束縛関係式で見積もった X の中心値が 1 を超えることが期待され、実際、表 5.4 では、 $r_e < 0$ の $X(3872)$ を除き X の中心値が 1 を超える結果を与えている。

$N\Omega$ dibaryon に注目すると、誤差を ξ_{int} とした X の下限が 1.04 であり、1 を超えていることがわかる。複合性 X は複合状態の重みと定義されていることから、弱束縛状態の場合は $[0, 1]$ の範囲に含まれる必要がある。よって、 $N\Omega$ dibaryon では、誤差を ξ_{int} としたときの X の誤差の範囲に X の真の値は含まれておらず、誤差項を ξ_{int} で見積もる従来の弱束縛関係式は適用不可能であることがわかる。有効レンジモデルでの弱束縛関係式の適用範囲と物理系を比較した 5.2 節での議論では、 $N\Omega$ dibaryon は従来の弱束縛関係式も適用可能な領域の限界近くにあったが、実際に見積もると従来の弱束縛関係式では正しく複合性を見積もることができないとわかる。

改良した弱束縛関係式を用い、束縛状態に対しては定義から $X \leq 1$ であることを用い

表 5.5 改良した弱束縛関係式 (5.1) による複合性 X の範囲

束縛状態	複合性 X
d	$0.738 \leq X \leq 1$
$X(3872)$	$0.530 \leq X \leq 1$
$N\Omega$ dibaryon	$0.801 \leq X \leq 1$
$\Omega\Omega$ dibaryon	$0.791 \leq X \leq 1$
${}^3_{\Lambda}\text{H}$	$0.745 \leq X \leq 1$
${}^4\text{He}$ dimer	$0.92 \leq X \leq 1$

ると、最終的に複合性 X の範囲は表 5.5 のように見積もられる。この結果より、全ての系において X は 1 に近い範囲に真の値を持つことがわかり、全体的にこれらの束縛状態は複合的な成分が支配的であるといえる。特に ${}^4\text{He}$ dimer は、 X の下限も他の系に比べて 1 に近く、ほぼ複合的な成分であるといえる。一方 $X(3872)$ の X の下限は、束縛状態に対して支配的な成分を決定できる境界である 0.5 に近く、どちらかという複合的な成分の方が多いが、それ以外の成分もある程度混合しているといえる。

重陽子 d に対する Weinberg の研究 [18] では、定量的な X の評価は行わず、 a_0, R_{int}, R の値から定性的に $X \sim 1$ と結論づけられていた。定量的な評価として、 d の複合性は先行研究 [60] において従来の弱束縛関係式を用いて $1.68^{+2.15}_{-0.83}$ と見積もられた。この結果と X の定義を合わせると、 $0.85 \leq X \leq 1$ となる。本研究の結果 $0.738 \leq X \leq 1$ と比較すると、どちらの結果も定性的に d が複合的であることを示している。 d の系の有効レンジが相互作用距離より大きいことから、本研究の X の不定性は、レンジ補正により定量的に先行研究のものより大きくなっている。このことから、レンジ補正を考慮しない先行研究の結果は誤差を過小評価している可能性があるといえる。

$X(3872)$ の内部構造に関するモデル計算 [61] では、 $X(3872)$ の波動関数を

$$|X(3872)\rangle = c_1 |c\bar{c}\rangle + c_2 |D^0 \bar{D}^{*0}\rangle + c_3 |D^+ D^{*-}\rangle \quad (5.5)$$

と仮定したときの c_2 の範囲が $-0.947 \leq c_2 \leq -0.871$ と得られた。 c_2 は $|D^0 \bar{D}^{*0}\rangle$ の重みなので、複合性 X は $|c_2|^2 = X$ に対応する。文献 [61] のモデル計算の結果は、 $0.759 \leq X \leq 0.897$ と解釈できるので、表 5.5 の弱束縛関係式での見積もりと矛盾がない

結果といえる。

第 6 章

不安定状態への拡張

本論文 5 章までで議論した弱束縛関係式のレンジ補正は安定な束縛状態が対象であった。一方、エキゾチックハドロンの多くは不安定な共鳴状態であり、複合性を見積もるためには弱束縛関係式を不安定状態に拡張する必要がある [19, 20]。この章では、不安定状態の弱束縛関係式に対するレンジ補正を考える準備として、ゼロレンジ極限での有効レンジモデルでの不安定状態の有効的な記述方法を議論する。また、ゼロレンジ極限の有効レンジモデルでの不安定状態の複合性 X の中心値の特徴について示す。

6.1 不安定状態の有効的な記述方法

不安定状態は散乱チャンネルとの結合を持ち、エネルギーのより低い散乱状態に崩壊する。弱束縛関係式を不安定状態に拡張するには、安定状態の弱束縛関係式を導出した Hamiltonian (2.93) によりエネルギーの低い散乱チャンネルを新たに 1 つ結合させたモデルを考える [20]。弱束縛関係式に用いる散乱状態をチャンネル 1、崩壊する状態をチャンネル 2 とし、不安定状態のエネルギーとの関係を図 6.1 に模式的に表す。2 つの閾値のエネルギー差を ν とし、閾値 1 をエネルギー E の原点にとると、閾値 2 は $E = -\nu$ にあることになる。崩壊チャンネル 2 の影響で、固有状態の固有エネルギーとチャンネル 1 の散乱長は複素数になる^{*1}。このように、不安定状態を記述するには、チャンネル結合散乱を考える必要がある。チャンネル結合がある場合、散乱振幅はチャンネルの添字を持つ行列 f_{ij} になる。チャンネル結合散乱行列のうち、対角成分は弾性散乱を表し、非対角成分

^{*1} よりエネルギーの低いチャンネルとの結合を持たないチャンネル 2 の散乱長は実数になる。

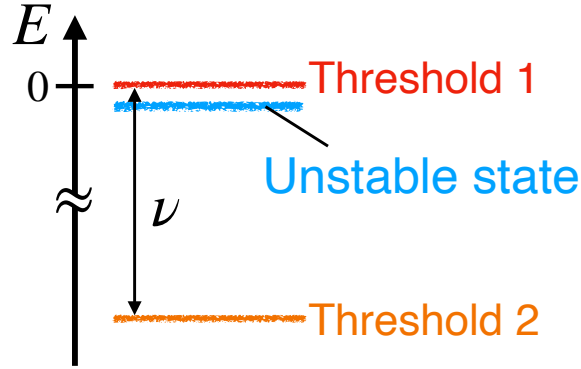


図 6.1 不安定状態のエネルギーと散乱チャンネルの閾値の模式図。

はチャンネル遷移を表す。チャンネル 1 の弾性散乱成分はチャンネル 1 の閾値近傍で

$$f_{11}(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 + \mathcal{O}(k^4) - ik \right]^{-1}, \quad (6.1)$$

とかける。ただし、 k はチャンネル 1 の運動量であり、 a_0, r_e は一般に複素数である。

チャンネル結合行列を扱う代わりに、1 チャンネル散乱で有効レンジ展開の係数である散乱長などの物理量を複素数にすると、有効的に不安定状態を記述できる^{*2}。1 チャンネルでの有効的な不安定状態の記述の例として、ゼロレンジ極限での有効レンジモデルの散乱振幅

$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 - ik \right]^{-1} \quad (a_0, r_e \in \mathbb{C}), \quad (6.2)$$

を考える。 a_0, r_e が複素数のとき、散乱振幅の極は一般に複素数の固有運動量を与えるため、不安定状態を記述できる。ここでは、位相 $\theta_{a_0}, \theta_{r_e}$ を導入して、散乱長と有効レンジを

$$a_0 = |a_0|e^{i\theta_{a_0}}, \quad (6.3)$$

$$r_e = -|r_e|e^{i\theta_{r_e}} \quad (6.4)$$

^{*2} 通常の 1 チャンネル散乱の場合、確率の保存を表す S 行列のユニタリ性から a_0, r_e などの有効レンジ展開の係数は実数である必要がある。よって、 a_0 や r_e を複素数にすると、S 行列はユニタリでなくなる。これはチャンネル結合の散乱行列の 1 成分のみを取り出した有効的な方法をとったことに起因しており、他のチャンネルへの遷移の効果がユニタリ性を破っている。チャンネル結合散乱行列の全ての成分を含めると、S 行列はユニタリであり、確率は保存している。

のように複素数にする。ここで、位相は $\theta_{a_0}, \theta_{r_e} \rightarrow 0$ の極限で安定状態に戻るよう定義されている*3。複素数にした散乱長と有効レンジから求まる固有運動量は

$$\begin{aligned}
k &= \frac{i}{r_e} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2r_e}{a_0}} \right) \\
&= \frac{i}{-|r_e|e^{i\theta_{r_e}}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{-2|r_e|e^{i\theta_{r_e}}}{|a_0|e^{i\theta_{a_0}}}} \right) \\
&= -\frac{ie^{-i\theta_{r_e}}}{|r_e|} \left(1 - \sqrt{1 + 2\frac{|r_e|}{|a_0|}e^{i(\theta_{r_e}-\theta_{a_0})}} \right), \tag{6.5}
\end{aligned}$$

となる。ここで、固有運動量 k は a_0 と r_e に独立に依存していることに注意する。

位相を入れて安定状態から連続的に不安定状態に変化させたときの、固有運動量の変化を考える。簡単のため $|a_0| \gg |r_e|$ の極限を考えると、固有運動量は

$$k = \frac{i}{a_0} = \frac{1}{|a_0|} e^{-i(\pi/2-\theta_{a_0})}, \tag{6.6}$$

となり、固有運動量の位相は散乱長の位相 θ_{a_0} のみに依存している。安定状態のとき、つまり $\theta_{a_0} = 0$ のとき、 k は正の虚軸上にあるから位相は $\pi/2$ になる。 k は a_0 の逆数に比例しているので、 a_0 の位相が $-\pi/2 \leq \theta_{a_0} \leq \pi/2$ のとき、 k の位相は $\pi/2 - \theta_{a_0}$ となり、 $\text{Im } k > 0$ かつ虚軸上ではないところに極がある。この場合、エネルギー $E = k^2/(2\mu)$ の位相は $\pi - 2\theta_{a_0}$ となるから、固有エネルギーは複素数になる。しかし、1チャンネル散乱で散乱長が実数なら、 $\text{Im } k > 0$ の場合の波動関数は2乗可積分であるから、Hermite 演算子である Hamiltonian の固有値が実数しか許されない。今、 $\text{Im } k > 0$ で複素の固有エネルギーを持った状態が得られた理由は、2チャンネルの散乱を有効的に1チャンネルで考えたからである。本来、2チャンネルの散乱問題では波動関数がチャンネルごとに2成分あり、チャンネル1の波動関数は遠方で収束するので2乗可積分であるが、チャンネル2の波動関数は遠方で発散するため、複素エネルギーが許されている。

θ_{a_0} の符号は固有エネルギーの虚部 $\text{Im } E$ の符号から決まる。準束縛状態の場合、 $\text{Im } E < 0$ なので E 平面の束縛状態 ($\text{Re } E < 0$ かつ $\text{Im } E = 0$) の極に比べて $\arg E$ は増加する。このとき k 平面で考えると束縛状態 ($\text{Re } k = 0$ かつ $\text{Im } k > 0$) から $\arg k$ が増加し、(6.6) 式より k と a_0 の位相は逆なので、 $\text{Im } E < 0$ とするには $\theta_{a_0} < 0$ という位相を導入する必要がある。

*3 安定状態の場合、弱束縛極限では $a_0 \rightarrow +\infty$ になるので、弱束縛の系では $a_0 > 0$ である。また、ゼロレンジ極限の有効レンジモデルでは $r_e < 0$ である (2.2節参照)。

6.2 ゼロレンジ極限の有効レンジモデルの X の中心値の特徴

ここで、不安定状態の複合性を議論するために、有効レンジモデルでゼロレンジ極限をとると複合性 X の中心値が散乱長 a_0 と有効レンジ r_e の比にしか依存しないことを示す。2.2 節より、 $\Lambda \rightarrow \infty$ のゼロレンジ極限の場合、有効レンジモデルの散乱振幅は散乱長 a_0 と有効レンジ r_e のみの関数になる：

$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 - ik \right]^{-1}. \quad (6.7)$$

散乱長 a_0 と束縛状態の半径 R で記述した複合性 X の表式 (2.136) で誤差項を無視した中心値は

$$X(a_0, R) = \frac{a_0}{2R - a_0}, \quad (6.8)$$

となる。この式から、有効レンジ展開の k の 2 次まで考慮した束縛状態の条件式 (2.137)

$$-\frac{1}{a_0} - \frac{r_e}{2R^2} + \frac{1}{R} = 0, \quad (6.9)$$

を用いて R を消去し、 a_0 と r_e で記述した X を求める。 $R = 1/\kappa$ を考慮すると、(3.20) 式より

$$R_{\pm} = \frac{r_e}{1 \pm \sqrt{1 - 2r_e/a_0}}, \quad (6.10)$$

となり、束縛状態を表すのは R_- である。 R_- を a_0 と R で記述した X (6.8) に代入すると

$$\begin{aligned} X(a_0, r_e) &= \frac{a_0}{\frac{2r_e}{1 - \sqrt{1 - 2r_e/a_0}} - a_0} \\ &= \left[\frac{2r_e/a_0}{1 - \sqrt{1 - 2r_e/a_0}} - 1 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

となり、 $X(a_0, r_e)$ は r_e/a_0 のみの関数になることがわかる。この理由は次のようにわかる。 X は無次元量なので、長さの次元を持つ変数は、比をとって無次元化される必要がある。実際、(6.8) 式は a_0 と R の比の関数になっている。ここから R を消去して a_0 と r_e の関数にした場合、 X は r_e/a_0 のみの関数になる。ただし、 Λ が有限でゼロレンジ極限で

ない場合、有効レンジ展開の k の高次項が残るので a_0, r_e, R の関係は (6.9) 式にならず、 X は a_0 と r_e に独立に依存する。これは新たな長さスケール $1/\Lambda$ が導入されるためと理解できる。

6.3 ゼロレンジ極限での有効レンジモデルの不安定状態の複合性

6.2 節での議論から、ゼロレンジ極限の有効レンジモデルでの複合性の中心値 X_c は a_0 と r_e の比のみの関数であることが示された。この結果は a_0 と r_e が複素数でも同様なので、不安定状態を有効的に記述した有効レンジモデルでの X_c も r_e/a_0 の関数になる。一方、固有運動量は (6.5) 式より a_0 と r_e の独立な関数であるから、以下に示すように異なる k が同じ X を与える場合がある。

具体的に、(6.3) 式、(6.4) 式の位相を $\theta_{a_0} = \theta_{r_e}$ とすると、 a_0 と r_e の比は変わらず r_e/a_0 は実数で固定されている。固有運動量 k と複合性 X_c のそれぞれに対して、 $\theta_{a_0} = \theta_{r_e}$ となる位相を導入すると

$$\begin{aligned} k &= -\frac{ie^{-i\theta_{r_e}}}{|r_e|} \left(1 - \sqrt{1 + 2\frac{|r_e|}{|a_0|}} \right) \\ &\neq \frac{i}{-|r_e|} \left(1 - \sqrt{1 - 2\frac{-|r_e|}{|a_0|}} \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} X_c &= \left[\frac{2r_e/a_0}{1 - \sqrt{1 - 2r_e/a_0}} - 1 \right]^{-1} \\ &= \left[\frac{-2|r_e|e^{i\theta_{r_e}}/|a_0|e^{i\theta_{a_0}}}{1 - \sqrt{1 + 2|r_e|e^{i\theta_{r_e}}/|a_0|e^{i\theta_{a_0}}}} - 1 \right]^{-1} \\ &= \left[\frac{2(-|r_e|)/|a_0|}{1 - \sqrt{1 - 2(-|r_e|)/|a_0|}} - 1 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

となる。ここで束縛状態の場合、 $a_0 > 0, r_e < 0$ より $r_e/a_0 = -|r_e|/|a_0|$ である。よって、 X_c は位相に依存しないが、 k は r_e の位相に依存するので、異なる固有運動量 k に対して同じ複合性の中心値 X_c が得られる。また、 $\theta_{a_0} = \theta_{r_e} \neq 0$ の場合、固有エネルギーは複素数で不安定状態に対応するが、 X_c は安定状態と同じ位相 $\theta_{a_0} = \theta_{r_e} = 0$ から変化しないため、実数のままである。この特徴は、数値的に有効レンジモデルでの複合性を計算する際に、計算の確認に役立つと期待される。

第7章

まとめと展望

近年の実験では、 qqq または $q\bar{q}$ 以外の内部構造を持つエキゾチックハドロンの候補が多数見つかっている。エキゾチックハドロンの内部構造を解明するために現在研究が盛んに行われている。エキゾチックハドロンの内部構造のモデル非依存な解析方法の1つとして、弱束縛関係式により束縛状態の複合性を見積もることが挙げられる。複合性とは、弱束縛状態の波動関数のハドロンの分子成分の重みとして定義され、弱束縛関係式によって束縛エネルギーが小さい状態の複合性を観測量のみから決定することができる。本研究では、散乱振幅の逆数を運動量 k のべきで展開した有効レンジ展開に現れる長さスケールが、系の相互作用距離より大きい場合に必要なレンジ補正を取り入れ、弱束縛関係式の改良を議論した。また、レンジ補正により改良した弱束縛関係式の適用可能範囲を数値計算によって調べ、改良の妥当性を評価した。最後に、改良した弱束縛関係式を実際の物理系に適用し、内部構造をモデル非依存に解析した。また、不安定状態の弱束縛関係式のレンジ補正を議論する準備として、有効的に不安定状態を取り扱う方法を述べた。

3章では、弱束縛の系に成り立つ特徴である低エネルギー普遍性と弱束縛関係式の関係性を議論した。そして、有効レンジ展開の k^2 の係数である有効レンジ r_e が相互作用距離より大きい場合に、レンジ補正が必要であることを示した。次に、有効レンジの起源が Hamiltonian の微分結合相互作用の項と離散固有状態との結合の項にあることを示し、2つの項の寄与は分離できないことを示した。以上に基づき、弱束縛関係式の誤差項への改良を提案した。

4章では、誤差項にレンジ補正を施す改良をした弱束縛関係式の適用可能性を数値計算により評価した。評価のために、弱束縛関係式が適用可能である条件（正確さの条件）を複合性の真の値が弱束縛関係式から見積もられた複合性の誤差の範囲に含まれていることと定義した。数値計算では、有限の相互作用距離 R_{int} と有効レンジ r_e を持つ有効レンジ

モデルを用い、正確さの条件が成り立つ領域を r_e - R_{int} 平面で調べた。結果として、改良した弱束縛関係式の方が適用可能範囲が広いことを示した。また、先行研究 [20] で述べられていた、弱束縛関係式の有効レンジ展開の高次項を取り入れた改良を数値計算を用いて議論した。結果として、中心値の改良による変化は対応する誤差に比べて非常に小さく、適用可能範囲を広げないことがわかった。

5章では、改良した弱束縛関係式をハドロン系である重陽子、 $X(3872)$ 、 $N\Omega$ dibaryon、 $\Omega\Omega$ dibaryon と、ハイパー核である ${}^3_\Lambda\text{H}$ 、原子系である ${}^4\text{He}$ dimer に適用し、複合性を求めることで内部構造を議論した。弱束縛関係式は低エネルギー普遍性に基づく式であり、ハドロン系、原子核系、原子系などの系の典型的長さスケールが違う束縛状態に対しても適用することができる。本研究で適用した束縛状態のうち、 $X(3872)$ と $N\Omega$ dibaryon は改良した弱束縛関係式のみ適用可能であり、複合性を正しく見積もるにはレンジ補正が必要であることが示された。また、全ての束縛状態は複合性が 1 に近い複合的な状態であることがわかった。

6章では、不安定状態の弱束縛関係式と、崩壊チャンネル結合をもつ不安定状態を有効的に 1 チャンネルとして記述する方法について触れ、不安定状態でのゼロレンジ極限での有効レンジモデルの複合性の特徴について議論した。

今後の展望の 1 つは、4章での弱束縛関係式のレンジ補正による改良の妥当性の評価を有効レンジモデル以外で評価することである。具体的には、複合性が $X < 1$ となる有限の相互作用長さを持つ共鳴モデルに弱束縛関係式を適用し、レンジ補正が適用可能範囲を広げるかを数値的に検証する。

別の方向性として、不安定な共鳴状態に適用可能な弱束縛関係式 [20] に対するレンジ補正を行い、共鳴状態のエキゾチックハドロン候補に対するレンジ補正の効果を調べることである。そのために、本論文の 6章で述べた不安定状態の取り扱い手法を完成させ、弱束縛関係式にレンジ補正を導入し、不安定なハドロンに適用する。具体的には、先行研究 [20] で複合的と結論づけられた $\Lambda(1405)$, $f_0(980)$, $a_0(980)$ や、先行研究 [23, 28] で複合的でないとして結論づけられた $\Lambda_c(2595)$, ρ , K^* についてレンジ補正により改良した弱束縛関係式を適用し、内部構造について議論したい。特に、 $\Lambda(1405)$ や $\Lambda_c(2595)$ は有効レンジの大きさが無視できないことが知られており、レンジ補正の重要性が期待される。 p 波散乱と結合する ρ , K^* に対しては、 s 波散乱と結合する状態に対する関係式である弱束縛関係式は直接適用できないため、別の方法を開発する必要がある。また、現在の実験結果 [13] より、 T_{cc} の有効レンジが $-11.9 < r_e \leq 0$ fm で与えられているが、有効レンジの不定性が広すぎるため意味のある複合性の値を見積もることができなかった。今後の実験において、より精密なデータが得られ有効レンジの不定性が減少すれば、弱束縛関係式

が T_{cc} へ適用できると考えられる。

付録 A

解析計算

A.1 運動量積分

この節では、有効場の理論の LS 方程式に現れる運動量積分を計算する。

A.1.1 I_0 の計算

まず、2.1 節のゼロレンジモデルの計算に必要な

$$I_0(E) \equiv \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E - q^2/m + i0^+}, \quad (\text{A.1})$$

を計算する。この積分は運動量の大きさ q が $q \rightarrow \infty$ で線形発散するので、 q の上限を Λ とし正則化する：

$$\begin{aligned} I_0(E) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\Theta(\Lambda - q)}{E - q^2/m + i0^+} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^\Lambda dq \frac{q^2}{E - q^2/m + i0^+} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda dq \frac{q^2}{(E + i0^+) - q^2/m}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ここで、 $E^+ \equiv E + i0^+$ とおくと

$$\begin{aligned} I_0(E) &= m \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda dq \frac{q^2 - mE^+ + mE^+}{mE^+ - q^2} \\ &= m \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \left[\int_0^\Lambda dq \frac{q^2 - mE^+}{mE^+ - q^2} + \int_0^\Lambda dq \frac{mE^+}{mE^+ - q^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -m \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \left[\Lambda - \int_0^\Lambda dq \frac{1}{\frac{q^2}{-mE^+} + 1} \right] \\
&= -m \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \left[\Lambda - \sqrt{-mE^+} \arctan \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{-mE^+}} \right) \right] \\
&= -\frac{m}{2\pi^2} \left[\Lambda - \sqrt{-mE^+} \arctan \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{-mE^+}} \right) \right], \tag{A.3}
\end{aligned}$$

となる。^{*1}ここで、物理的な散乱 $E > 0$ の場合、on-shell 運動量 $k > 0$ に対して

$$\sqrt{-mE^+} = -i\sqrt{m|E|} = -i\sqrt{k^2} = -ik, \tag{A.4}$$

なので、(A.3) 式は

$$I_0(E) = -\frac{m}{2\pi^2} \left[\Lambda + ik \arctan \left(\frac{\Lambda}{-ik} \right) \right], \tag{A.5}$$

となる。arctangent の $|z| \rightarrow \infty$ まわりの展開は

$$\arctan(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^5}\right), \tag{A.6}$$

であるので、 $k \ll \Lambda$ の低エネルギー散乱のとき (A.5) 式は

$$I_0(E) = -\frac{m}{2\pi^2} \left[\Lambda + ik \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{-ik}{\Lambda} + \frac{1}{3} \left(\frac{-ik}{\Lambda} \right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{k^5}{\Lambda^5}\right) \right\} \right], \tag{A.7}$$

となる。ここで、 I_0 の展開にあらわれる k のべきは、1 次の項だけ虚数の係数を持っており、残りは実数の係数を持つ偶数次の項のみである。 Λ が十分大きいときに残るのは

$$\begin{aligned}
I_0(E) &= -\frac{m}{2\pi^2} \left[\Lambda \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right) \right) + i\frac{\pi}{2}k \right] \\
&\rightarrow -\frac{m}{2\pi^2} \left[\Lambda + i\frac{\pi}{2}k \right], \tag{A.8}
\end{aligned}$$

となる。

^{*1} ここで $+i0^+$ を残す形で書いたのは、平方根の中が負の場合に不定性があるからである。具体的には、 $i\sqrt{x}$ と $-i\sqrt{x}$ ($x > 0$) はどちらも二乗したら $-x$ になる (不定性がある) ということである。 $x \in \mathbb{C}$ のとき \sqrt{x} の関数は、 $x < 0$ の実軸上に cut がある (x 軸上の負の領域に上半面を通過して近づくのと下半面を通過して近づくのは別の値になる) といえるので、cut に上から近づいた値 ($\sqrt{x+i0^+}$) と少から近づいた値 ($\sqrt{x-i0^+}$) の2つを区別する必要がある。一方、 $E = -B$ のときはルートの中身が正になるので $\sqrt{2\mu B+i0^+} = \sqrt{2\mu B-i0^+}$ となり、不定性がなくなるので $i0^+$ をつける必要はなくなる。

A.1.2 I_{2n} の計算

2.2 節の有効レンジモデルの計算に必要な積分をするために、 I_{2n} を次のように定義する:

$$I_{2n}(E) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^{2n} \Theta(\Lambda - q)}{E - q^2/m + i0^+}. \quad (\text{A.9})$$

ただし、 q の積分の上限は Λ (カットオフ) としている。 I_{2n} を変形すると

$$\begin{aligned} I_{2n}(E) &= m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^{2n-2} \frac{q^2/m}{E - q^2/m + i0^+} \\ &= m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^{2n-2} \frac{q^2/m + E - E + i0^+ - i0^+}{E - q^2/m + i0^+} \\ &= m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^{2n-2} \left(-1 + \frac{E + i0^+}{E - q^2/m + i0^+} \right) \\ &= -m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^{2n-2} + (mE + i0^+) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^{2n-2}}{E - q^2/m + i0^+} \\ &= -m \int d\Omega \int_0^\Lambda dq \frac{1}{(2\pi)^3} q^{2n} - (-mE - i0^+) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^{2n-2}}{E - q^2/m + i0^+} \\ &= -\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^{2n+1}}{2n+1} - \kappa^2 I_{2n-2}(E), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

と I_{2n-2} であらわせるので、 I_{2n} はこの漸化式に従うことがわかる。ここで、 $\kappa^2 \equiv (-mE - i0^+)$ と定義する。

2.2 節の計算では I_0, I_2, I_4 が必要である。A.1.1 節で求めた $k \ll \Lambda$ の場合の I_0 に $k = i\kappa$ を代入すると

$$I_0(E) = -\frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right), \quad (\text{A.11})$$

となるので、この I_0 を (A.10) に代入すると、 I_2 は

$$\begin{aligned} I_2(E) &= -\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} - \kappa^2 I_0(E) \\ &= -\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

と求まる。ここから I_4 は、

$$\begin{aligned}
I_4(E) &= -\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} - \kappa^2 I_2(E) \\
&= -\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} - \kappa^2 \left[-\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right] \\
&= -\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} - \kappa^4 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right), \tag{A.13}
\end{aligned}$$

となる。ここでは $\Lambda \rightarrow \infty$ で 0 となる項は落としてある。

A.2 有効レンジモデルの計算

この節では、2.2 節の有効レンジモデルの計算の詳細を述べる。

A.2.1 相互作用 Hamiltonian の書き換え

2.2 章の有効レンジモデルの相互作用 Hamiltonian (2.24) 式を変形し、(2.25) 式を導出する。 ψ は Boson 場なので、交換関係は

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})] = [\psi^\dagger(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{x})] = 0, \tag{A.14}$$

である。ここから、 $\psi(\mathbf{x})$ と $\psi^\dagger(\mathbf{x}')$ の交換に対し

$$\psi(\mathbf{x})\psi^\dagger(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \psi^\dagger(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}), \tag{A.15}$$

となるが、このモデルは相互作用が点状の接触相互作用なので、(2.24) 式の Hamiltonian の場合は全て同じ座標で定義されている。よって、同じ点での $\psi(\mathbf{x})$ と $\psi^\dagger(\mathbf{x})$ の交換は

$$\psi(\mathbf{x})\psi^\dagger(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{0}) + \psi^\dagger(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}), \tag{A.16}$$

となる。よって、Hamiltonian (2.24) 式の第 1 項は、座標の添字を省略して

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\lambda_0(\psi^\dagger\psi)^2 &= \frac{1}{4}\lambda_0\psi^\dagger(\delta(\mathbf{0}) + \psi^\dagger\psi)\psi \\
&= \frac{1}{4}\lambda_0\psi^\dagger(\delta(\mathbf{0}) + \psi^\dagger\psi)\psi \\
&= \frac{1}{4}\lambda_0\delta(\mathbf{0})\psi^\dagger\psi + \frac{1}{4}\lambda_0\psi^\dagger\psi^\dagger\psi\psi \\
&= \frac{1}{4}\lambda_0\psi^\dagger\psi^\dagger\psi\psi, \tag{A.17}
\end{aligned}$$

と変形できる。ただし最後の行では、エネルギーの原点をずらして $(1/4)\lambda_0\delta(\mathbf{0})\psi^\dagger\psi = 0$ とした。また、(2.24) 式の第 2 項について

$$\frac{1}{4}\rho_0\nabla(\psi^\dagger\psi)\cdot\nabla(\psi^\dagger\psi) = -\frac{1}{16}\rho_0[(\psi^2)^\dagger(\psi\overleftrightarrow{\nabla}^2\psi) + (\psi\overleftrightarrow{\nabla}^2\psi)^\dagger\psi^2], \quad (\text{A.18})$$

となることを示す。ここでは、(A.18) の右辺から左辺を導出する。初めに $\psi\overleftrightarrow{\nabla}^2\psi$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \psi\overleftrightarrow{\nabla}^2\psi &= \psi\overleftrightarrow{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{\nabla}\psi) \\ &= \psi\nabla\cdot\overleftrightarrow{\nabla}\psi - (\nabla\psi)\cdot(\overleftrightarrow{\nabla}\psi) \\ &= \psi\overleftrightarrow{\nabla}\cdot\nabla\psi - (\nabla\psi)\cdot(\overleftrightarrow{\nabla}\psi) \\ &= \psi\Delta\psi - (\nabla\psi)\cdot\nabla\psi - (\nabla\psi)\cdot\nabla\psi + (\Delta\psi)\psi \\ &= \psi\Delta\psi - 2(\nabla\psi)\cdot\nabla\psi + (\Delta\psi)\psi, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

となる。これを用いて、(A.18) の各項を順に計算する。最初に、(A.18) の第 1 項は

$$\begin{aligned} (\psi^2)^\dagger(\psi\overleftrightarrow{\nabla}\psi) &= \psi^\dagger\psi^\dagger(\psi\Delta\psi - 2(\nabla\psi)\cdot\nabla\psi + (\Delta\psi)\psi) \\ &= \psi^\dagger\psi^\dagger\psi\Delta\psi - 2\psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi)\cdot\nabla\psi + \psi^\dagger\psi^\dagger(\Delta\psi)\psi, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

であり、さらに (A.20) の第 1 項は

$$(\psi^\dagger\psi^\dagger\psi)\nabla\cdot(\nabla\psi) = \nabla\cdot(\psi^\dagger\psi^\dagger\psi\nabla\psi) - \nabla(\psi^\dagger\psi^\dagger\psi)\cdot\nabla\psi, \quad (\text{A.21})$$

となるが、体積積分後の表面項を 0 とすると、全微分は消えるので

$$\begin{aligned} (\psi^\dagger\psi^\dagger\psi)\nabla\cdot(\nabla\psi) &= -\nabla(\psi^\dagger\psi^\dagger\psi)\cdot\nabla\psi \\ &= -[(\nabla\psi^\dagger)\psi^\dagger\psi\cdot\nabla\psi + \psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger)\psi\cdot\nabla\psi + \psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi)\cdot\nabla\psi] \\ &= -[\psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger)\psi\cdot\nabla\psi + \psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger)\psi\cdot\nabla\psi + \psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi)\cdot\nabla\psi] \\ &= -[2\psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger)\psi\cdot\nabla\psi + \psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi)\cdot\nabla\psi], \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{r}), \nabla_r\psi(\mathbf{r})] &= \lim_{\mathbf{r}'\rightarrow\mathbf{r}} [\psi(\mathbf{r}'), \nabla_r\psi(\mathbf{r})] \\ &= \lim_{\mathbf{r}'\rightarrow\mathbf{r}} \nabla_r[\psi(\mathbf{r}'), \psi(\mathbf{r})] \\ &= \lim_{\mathbf{r}'\rightarrow\mathbf{r}} \nabla_r 0 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

より、 $[\psi, \nabla\psi] = [\psi^\dagger, \nabla\psi^\dagger] = 0$ を用いた。同様に、(A.20) の第 3 項は、

$$\begin{aligned}\psi^\dagger\psi^\dagger(\Delta\psi)\psi &= -[(\nabla\psi^\dagger)\psi^\dagger \cdot (\nabla\psi)\psi + \psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger) \cdot (\nabla\psi)\psi + \psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi) \cdot \nabla\psi] \\ &= -[\psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger)\psi \cdot \nabla\psi + \psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger)\psi \cdot \nabla\psi + \psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi) \cdot \nabla\psi] \\ &= -[2\psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger)\psi \cdot \nabla\psi + \psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi) \cdot \nabla\psi],\end{aligned}\tag{A.24}$$

となる。よって、(A.20) の左辺つまり (A.18) の第 1 項は

$$\begin{aligned}(\psi^\dagger)^2(\Delta\psi)\psi &= -2[2\psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger)\psi \cdot \nabla\psi + \psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi) \cdot \nabla\psi] - 2\psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi) \cdot \nabla\psi \\ &= -4\psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi) \cdot \nabla\psi - 4(\nabla\psi^\dagger)\psi^\dagger \cdot \nabla\psi\psi,\end{aligned}\tag{A.25}$$

となることがわかる。この結果より (A.18) の第 2 項は

$$\begin{aligned}(\psi \overleftrightarrow{\nabla}^2 \psi)^\dagger \psi^2 &= [(\psi^2)^\dagger (\psi \overleftrightarrow{\nabla}^2 \psi)]^\dagger \\ &= -4[(\nabla\psi^\dagger)(\nabla\psi^\dagger)\psi\psi + \psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger)\psi\nabla\psi],\end{aligned}\tag{A.26}$$

となる。 $[\psi, \nabla\psi^\dagger] = [\nabla\psi, \psi^\dagger] = 0$ を用いると (A.18) の右辺は、

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{16}\rho_0[(\psi^2)^\dagger(\psi \overleftrightarrow{\nabla}^2 \psi) + (\psi \overleftrightarrow{\nabla}^2 \psi)^\dagger\psi^2] \\ &= \frac{1}{4}\rho_0[\psi^\dagger\psi^\dagger(\nabla\psi) \cdot \nabla\psi + (\nabla\psi^\dagger)\psi^\dagger \cdot (\nabla\psi)\psi + (\nabla\psi^\dagger) \cdot (\nabla\psi^\dagger)\psi\psi + \psi^\dagger(\nabla\psi^\dagger)\psi \cdot \nabla\psi] \\ &= \frac{1}{4}\rho_0[\psi^\dagger(\nabla\psi)\psi^\dagger \cdot \nabla\psi + (\nabla\psi^\dagger)\psi\psi^\dagger \cdot \nabla\psi + (\nabla\psi^\dagger)\psi \cdot (\nabla\psi^\dagger)\psi + \psi^\dagger(\nabla\psi) \cdot \nabla\psi^\dagger\psi] \\ &= \frac{1}{4}\rho_0[\nabla(\psi^\dagger\psi)\nabla(\psi^\dagger\psi)],\end{aligned}\tag{A.27}$$

となる。ここから、(2.25) 式が得られる。

A.2.2 LS 方程式の行列表示

連立方程式である有効レンジモデルの LS 方程式が行列表示 (2.39) と等価になることを示す。 T_1, T_2, T_3 の形で書いた T 行列 (2.34) を s 波の LS 方程式 (2.31) に代入すると

$$\begin{aligned}& T_1 + T_2(k'^2 + k^2) + T_3k'^2k^2 \\ &= \lambda_0 + \rho_0(k'^2 + k^2) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\lambda_0 + \rho_0(k'^2 + q^2)] G[T_1 + T_2(q^2 + k^2) + T_3q^2k^2],\end{aligned}\tag{A.28}$$

となる。ここで、エネルギー E 依存性は省略して表記する。積分を評価すると

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\lambda_0 + \rho_0(k'^2 + q^2)] G [T_1 + T_2(q^2 + k^2) + T_3q^2k^2] \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\lambda_0GT_1 + \lambda_0GT_2(q^2 + k^2) + \lambda_0GT_3q^2k^2 + \rho_0(k'^2 + q^2)GT_1 \\
&\quad + \rho_0(k'^2 + q^2)GT_2(q^2 + k^2) + \rho_0(k'^2 + q^2)GT_3q^2k^2] \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\lambda_0GT_1 + \lambda_0GT_2q^2 + \rho_0q^2GT_1 + \rho_0q^2GT_2q^2] \\
&\quad + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\lambda_0GT_2k^2 + \lambda_0GT_3q^2k^2 + \rho_0q^2GT_2k^2 + \rho_0q^2GT_3q^2k^2] \\
&\quad + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\rho_0k'^2GT_1 + \rho_0k'^2GT_2q^2] \\
&\quad + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\rho_0k'^2GT_2k^2 + \rho_0k'^2GT_3q^2k^2] \\
&= [\lambda_0I_0T_1 + \lambda_0T_2I_2 + \rho_0I_2T_1 + \rho_0I_4T_2] \\
&\quad + k^2[\lambda_0I_0T_2 + \lambda_0T_3I_2 + \rho_0I_2T_2 + \rho_0I_4T_3] \\
&\quad + k'^2[\rho_0I_0T_1 + \rho_0I_2T_2] \\
&\quad + k'^2k^2[\rho_0I_0T_2 + \rho_0I_2T_3],
\end{aligned}$$

となる。ここで、 I_n を

$$I_{2n}(E) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^{2n}}{E - q^2/m + i0^+}, \quad (\text{A.29})$$

と定義した。よって、(A.28) 式の係数を比較すると

$$T_1 = \lambda_0 + \lambda_0 \frac{1}{2}(I_0T_1 + I_2T_2) + \rho_0 \frac{1}{2}(I_2T_1 + I_4T_2), \quad (\text{A.30})$$

$$T_2 = \rho_0 + \lambda_0 \frac{1}{2}(I_0T_2 + I_2T_3) + \rho_0 \frac{1}{2}(I_2T_2 + I_4T_3), \quad (\text{A.31})$$

$$T_2 = \rho_0 + \rho_0 \frac{1}{2}(I_0T_1 + I_2T_2), \quad (\text{A.32})$$

$$T_3 = \rho_0 \frac{1}{2}(I_0T_2 + I_2T_3), \quad (\text{A.33})$$

となる。これらは $T_{1,2,3}$ に対する連立方程式になっている。LS 方程式 (A.28) が k と k' について対称でないから、右辺の k^2 の係数と k'^2 の係数が異なり、独立な 3 つの $T_{1,2,3}$ に対して式が 4 つ得られた。 $T = V + 1/2(TGV + VGT)$ のように対称化した LS 方程式を用いると k'^2 と k^2 の係数は等しくなり、独立な式は 3 つであることがわかる。ここ

では、行列表示でも非対角な $T = V + VGT$ の形を用いて、LS 方程式と行列表示 (2.39) が等価であることを示す。

(2.39) 式に λ, τ, g の行列表示を代入すると

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_0 & \frac{1}{2}I_2 \\ \frac{1}{2}I_2 & \frac{1}{2}I_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.34})$$

となり、第 2 項を評価すると

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \lambda_0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_0 & \frac{1}{2}I_2 \\ \frac{1}{2}I_2 & \frac{1}{2}I_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0T_1 + I_2T_2 & I_0T_2 + I_2T_3 \\ I_2T_1 + I_4T_2 & I_2T_2 + I_4T_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_0(I_0T_1 + I_2T_2) + \rho_0(I_2T_1 + I_4T_2) & \lambda_0(I_0T_2 + I_2T_3) + \rho_0(I_2T_2 + I_4T_3) \\ \rho_0(I_0T_1 + I_2T_2) & \rho_0(I_0T_2 + I_2T_3) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

となる。よって、(A.34) 式の各成分は

$$T_1 = \lambda_0 + \lambda_0 \frac{1}{2}(I_0T_1 + I_2T_2) + \rho_0 \frac{1}{2}(I_2T_1 + I_4T_2), \quad (\text{A.36})$$

$$T_2 = \rho_0 + \lambda_0 \frac{1}{2}(I_0T_2 + I_2T_3) + \rho_0 \frac{1}{2}(I_2T_2 + I_4T_3), \quad (\text{A.37})$$

$$T_2 = \rho_0 + \rho_0 \frac{1}{2}(I_0T_1 + I_2T_2), \quad (\text{A.38})$$

$$T_3 = \rho_0 \frac{1}{2}(I_0T_2 + I_2T_3), \quad (\text{A.39})$$

となり、(A.30)-(A.33) 式と同じ連立方程式が得られた。よって、LS 方程式と行列表示 (2.39) が等価であることがわかる。

A.2.3 行列式の計算

行列 τ を求めるために、(2.49) 式の行列式を計算する。

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}I_0 & \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{2}I_2 \\ \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{2}I_2 & -\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} - \frac{1}{2}I_4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}I_0 \left(\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} + \frac{1}{2}I_4 \right) - \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{2}I_2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2}\kappa \right) \right] \left(\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} - \kappa^4 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2}\kappa \right) \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{2} \left[-\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right] \right)^2 \\
& = -\frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \left(\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} - \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} + \kappa^2 \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} - \kappa^4 \frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right) \\
& \quad - \left(\left[\frac{1}{\rho_0} + \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \right] - \kappa^2 \frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right)^2 \\
& = -\frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \left(\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} - \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} + \kappa^2 \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \right) - \frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \left(-\kappa^4 \frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right) \\
& \quad - \left[\frac{1}{\rho_0} + \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \right]^2 + 2 \left[\frac{1}{\rho_0} + \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \right] \kappa^2 \frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) - \left[\kappa^2 \frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right]^2 \\
& = \frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \left[2\kappa^2 \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \right) - \left(\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} - \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} + \kappa^2 \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \right) \right] - \left[\frac{1}{\rho_0} + \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \right]^2 \\
& = -\frac{1}{\rho_0^2} \left\{ \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right]^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{m}{4\pi^2} \left[2\kappa^2 \left(\rho_0 + \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \rho_0^2 \right) - \left(\lambda_0 - \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} \rho_0^2 + \kappa^2 \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \rho_0^2 \right) \right] \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right\} \\
& = -\frac{1}{\rho_0^2} \left\{ \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right]^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{m}{4\pi^2} \left[-2\kappa^2 \rho_0 - 2\kappa^2 \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \rho_0^2 + \lambda_0 - \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} \rho_0^2 + \kappa^2 \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \rho_0^2 \right] \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right\} \\
& = -\frac{1}{\rho_0^2} \left\{ \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right]^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{m}{4\pi^2} \left[\left(\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \rho_0^2 \Lambda^5 \right) - 2\rho_0 \left(1 + \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \rho_0 - \frac{1}{2} \frac{m}{4\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \rho_0 \right) \kappa^2 \right] \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right\} \\
& = -\frac{1}{\rho_0^2} \left\{ \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right]^2 + \frac{m}{4\pi^2} \left[\left(\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \rho_0^2 \Lambda^5 \right) - 2\rho_0 \left(1 + \frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right) \kappa^2 \right] \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right\} \\
& = -\frac{1}{\rho_0^2} D(E), \tag{A.40}
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$D(E) = \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right]^2 + \frac{m}{4\pi^2} \left[\left(\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \rho_0^2 \Lambda^5 \right) - 2\rho_0 \left(1 + \frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right) \kappa^2 \right] \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right), \tag{A.41}$$

と定義した。

A.2.4 $N(E, k', k)$ の計算

T 行列 (2.56) を計算する。ここで、

$$T(E, k', k) = \frac{N(E, k', k)}{D(E)}, \quad (\text{A.42})$$

と $N(E, k', k)$ を定義すると、(2.56) 式より

$$\begin{aligned} N(E, k', k) &= \lambda_0 + \frac{\rho_0^2}{2} I_4 + \left[\rho_0 - \frac{\rho_0^2}{2} I_2 \right] (k'^2 + k^2) + \frac{\rho_0^2}{2} I_0 k'^2 k^2 \\ &= \lambda_0 + \frac{\rho_0^2}{2} \left[-\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} - \kappa^4 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right] \\ &\quad + \left\{ \rho_0 - \left[-\frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \right] \frac{\rho_0^2}{2} \right\} (k'^2 + k^2) - \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \frac{\rho_0^2}{2} k'^2 k^2 \\ &= \lambda_0 - \frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} \frac{\rho_0^2}{2} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \frac{\rho_0^2}{2} - \kappa^4 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \frac{\rho_0^2}{2} \\ &\quad + \left\{ \rho_0 + \frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \frac{\rho_0^2}{2} - \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \frac{\rho_0^2}{2} \right\} (k'^2 + k^2) - \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \frac{\rho_0^2}{2} k'^2 k^2 \\ &= -\kappa^4 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \frac{\rho_0^2}{2} - \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \frac{\rho_0^2}{2} k'^2 k^2 - \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \frac{\rho_0^2}{2} (k'^2 + k^2) \\ &\quad + \left[\rho_0 + \frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \frac{\rho_0^2}{2} \right] (k'^2 + k^2) + \lambda_0 - \frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^5}{5} \frac{\rho_0^2}{2} + \kappa^2 \frac{m}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3} \frac{\rho_0^2}{2} \\ &= -\frac{m}{4\pi^2} \rho_0^2 \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) \left[\kappa^4 + \kappa^2 (k'^2 + k^2) + k'^2 k^2 \right] \\ &\quad + \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2 \right] + \left[\rho_0 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0^2 \right] (k'^2 + k^2) + \kappa^2 \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0^2 \\ &= -\frac{m}{4\pi^2} \rho_0^2 \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) (\kappa^2 + k'^2)(\kappa^2 + k^2) \\ &\quad + \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2 \right] - \kappa^2 \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0^2 - 2\kappa^2 \rho_0 \\ &\quad + \left[\rho_0 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0^2 \right] (k'^2 + k^2) + 2\kappa^2 \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0^2 + 2\kappa^2 \rho_0 \\ &= \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2 \right] - 2\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1 \right) \kappa^2 \\ &\quad + \rho_0 \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right] (k'^2 + k^2) + 2\kappa^2 \rho_0 \left(\frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1 \right) \\ &\quad - \frac{m}{4\pi^2} \rho_0^2 \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) (\kappa^2 + k'^2)(\kappa^2 + k^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2 \right] - 2\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1 \right) \kappa^2 \\
&\quad + \rho_0 \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right] (2\kappa^2 + k'^2 + k^2) \\
&\quad - \frac{m}{4\pi^2} \rho_0^2 \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) (\kappa^2 + k'^2)(\kappa^2 + k^2), \tag{A.43}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
N(E, k', k) &= \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2} \Lambda^5 \rho_0^2 \right] - 2\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 + 1 \right) \kappa^2 \\
&\quad + \rho_0 \left[1 + \frac{m}{12\pi^2} \Lambda^3 \rho_0 \right] (2\kappa^2 + k'^2 + k^2) \\
&\quad - \frac{m}{4\pi^2} \rho_0^2 \left(\Lambda - \frac{\pi}{2} \kappa \right) (\kappa^2 + k'^2)(\kappa^2 + k^2), \tag{A.44}
\end{aligned}$$

となる。

A.2.5 H_{free} の固有エネルギーの計算

散乱状態 $|\mathbf{k}\rangle$ と離散固有状態 $|B_0\rangle$

$$|\mathbf{k}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{V_k}} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\phi}^\dagger(-\mathbf{k}) |0\rangle, \tag{A.45}$$

$$|B_0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{V_k}} \tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{0}) |0\rangle, \tag{A.46}$$

が H_{free} (2.94) の固有状態であることを確認し、固有エネルギーを計算する。ここで、系の移送体積は $V_k = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{0})$ であり、真空 $|0\rangle$ を任意の \mathbf{k} に対して

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) |0\rangle = \tilde{\psi}(\mathbf{k}) |0\rangle = \tilde{B}_0(\mathbf{k}) |0\rangle, \quad \langle 0|0\rangle = 1, \tag{A.47}$$

と定義する。

まず、 H_{free} の波数表示を導く。ここで、場 $\alpha(\mathbf{x})$ の Fourier 変換は

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}), \tag{A.48}$$

$$\alpha(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\alpha}(\mathbf{k}), \tag{A.49}$$

と定義する。この定義のもとで、 H_{free} を Fourier 変換すると

$$\begin{aligned}
(H_{\text{free}}\text{の第1項}) &= \int d^3x \frac{1}{2M} \nabla \psi^\dagger(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{2M} \int d^3x \nabla \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \\
&\quad \times \nabla \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \right] \\
&= \frac{1}{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \left[\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\psi}(\mathbf{k}') (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right] \\
&= \frac{1}{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\mathbf{k}^2 \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{2M} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\psi}(\mathbf{k}), \tag{A.50}
\end{aligned}$$

となる。 ϕ, B_0 の運動項 (第2項、第3項) も同様に計算できる。また、 H_{free} の第4項は

$$\begin{aligned}
(H_{\text{free}}\text{の第4項}) &= \int d^3x \omega_0 B_0^\dagger(\mathbf{x}) B_0(\mathbf{x}) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_0 \tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{B}_0(\mathbf{k}), \tag{A.51}
\end{aligned}$$

となる。以上をまとめると、 H_{free} の波数表示は

$$\begin{aligned}
H_{\text{free}} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{2M} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\psi}(\mathbf{k}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{2m} \tilde{\phi}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\phi}(\mathbf{k}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{2M_0} \tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{B}_0(\mathbf{k}) \\
&\quad + \omega_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{B}_0(\mathbf{k}), \tag{A.52}
\end{aligned}$$

となる。

次に、それぞれの場の交換関係の波数表示を導く。例えば ψ の場を考えると、(A.48) 式より

$$\begin{aligned}
[\tilde{\psi}(\mathbf{k}), \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}')]_{\pm} &= \int d^3x d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} [\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{x}')]_{\pm} \\
&= \int d^3x d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= \int d^3x e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\
&= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{A.53}
\end{aligned}$$

また、他の ϕ, B_0 についても同様に、

$$[\tilde{\phi}(\mathbf{k}), \tilde{\phi}^\dagger(\mathbf{k}')]_{\pm} = [\tilde{B}_0(\mathbf{k}), \tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{k}')]_{\pm} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (\text{A.54})$$

である。

最後に、 H_{free} とそれぞれの場の交換関係の波数表示を用いて、 H_{free} (2.94) の散乱状態と離散固有状態の固有エネルギーを計算する。Hamiltonian (2.94) の第 1 項の散乱状態 $|\mathbf{k}\rangle$ の固有エネルギーは

$$\begin{aligned} (H_{\text{free}} \text{の第 1 項}) |\mathbf{k}\rangle &= \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}'^2}{2M} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}') \tilde{\psi}(\mathbf{k}') \left[\frac{1}{\sqrt{V_k}} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\phi}^\dagger(-\mathbf{k}) \right] |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}'^2}{2M} \frac{1}{\sqrt{V_k}} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}') \tilde{\phi}^\dagger(-\mathbf{k}) \cancel{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') |0\rangle \\ &\quad + \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}'^2}{2M} \frac{1}{\sqrt{V_k}} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}') \tilde{\phi}^\dagger(-\mathbf{k}) \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\psi}(\mathbf{k}') |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{V_k}} \frac{\mathbf{k}^2}{2M} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\phi}^\dagger(-\mathbf{k}) |0\rangle \\ &= \frac{\mathbf{k}^2}{2M} |\mathbf{k}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

となる。同様に、第 2 項の固有エネルギーは

$$\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}'^2}{2m} \tilde{\phi}^\dagger(\mathbf{k}') \tilde{\phi}(\mathbf{k}') |\mathbf{k}\rangle = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} |\mathbf{k}\rangle, \quad (\text{A.56})$$

となる。ここで、 ϕ と ψ は交換することに注意し、 $\tilde{\phi}(\mathbf{k}')$ と $\tilde{\phi}^\dagger(\mathbf{k})$ の交換関係 (A.54) を用いた。また、 B_0 の項に含まれる全ての場が交換することから、 H_{free} の第 3 項目は

$$(H_{\text{free}} \text{の第 3 項}) |\mathbf{k}\rangle = 0, \quad (\text{A.57})$$

となる。離散固有状態 $|B_0\rangle$ の固有エネルギーは、

$$\begin{aligned} (H_{\text{free}} \text{の第 4 項}) |B_0\rangle &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_0 \tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{B}_0(\mathbf{k}) \left[\frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{V_k}} \tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{0}) \right] \\ &= \omega_0 \int \frac{d^3 k}{\sqrt{V_k}} \tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{0}) |0\rangle \\ &= \omega_0 |B_0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

ここで、 $\tilde{B}_0(\mathbf{k})$ と $\tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{k})$ の交換関係と (2.99) を用いた。また、今、重心系なので B_0 の固有運動量は 0 になり、 H_{free} の第 3 項を $|B_0\rangle$ に作用させても 0 になる。これらをまと

めると、計算の結果次の固有エネルギーを得る：

$$H_{\text{free}} |\mathbf{k}\rangle = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{\mathbf{k}^2}{2M} = \frac{\mathbf{k}^2}{2\mu} |\mathbf{k}\rangle, \quad (\text{A.59})$$

$$H_{\text{free}} |B_0\rangle = \omega_0 |B_0\rangle. \quad (\text{A.60})$$

ここで、 $\mu = (1/M + 1/m)^{-1}$ は換算質量である。

A.2.6 弱束縛関係式の計算

相互作用 V と運動量積分 G で書かれた散乱長 (2.131) から弱束縛関係式を導出する。まず、 $G(-B)$ は、(A.7) 式で $m \rightarrow 2\mu$, $-ik \rightarrow \sqrt{2\mu B}$ と置き換えることで

$$\begin{aligned} G(-B) &= \frac{\mu}{\pi^2} \left[-\Lambda + \sqrt{2\mu B} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2\mu B}}{\Lambda} + \frac{1}{3} \frac{(2\mu B)^{3/2}}{\Lambda^3} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{\mu}{\pi^2} \left[-\Lambda + \frac{\pi}{2} \sqrt{2\mu B} - \frac{2\mu B}{\Lambda} + \frac{1}{3} \frac{(2\mu B)^2}{\Lambda^3} + \dots \right], \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

と得られる。

G のエネルギーの 1 回微分に関する項 ($-BG'(-B)$) は

$$G'(-B) = \frac{dG(-B)}{d(-B)} = \frac{\mu}{\pi^2} \left[-\frac{\mu\pi}{2} (-2\mu B)^{-1/2} + \frac{2\mu}{\Lambda} + \dots \right], \quad (\text{A.62})$$

より、

$$\begin{aligned} -BG'(-B) &= -B \frac{\mu}{\pi^2} \left[-\frac{\mu\pi}{2} (2\mu B)^{-1/2} + \frac{2\mu}{\Lambda} + \dots \right] \\ &= \frac{\mu^2}{2\pi} B (2\mu B)^{-1/2} - B \frac{2\mu^2}{\Lambda\pi^2} + \dots \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \sqrt{2\mu B} - \frac{\mu}{\pi^2} \left(\frac{2\mu B}{\Lambda} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

となる。ここで、 $1/\Lambda = R_{\text{typ}}$ 、 $R = 1/\sqrt{2\mu B}$ を代入すると

$$\begin{aligned} -BG'(-B) &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} - \frac{\mu}{\pi^2} \left(\frac{R_{\text{typ}}}{R^2} \right) + \dots \\ &= \frac{\mu}{4\pi R} \left[1 - \frac{4}{\pi} \left(\frac{R_{\text{typ}}}{R} \right) + \dots \right] \\ &= \frac{\mu}{4\pi R} \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{R_{\text{typ}}}{R} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

が得られる。

次に、 B の 2 次以上の項 $(-\Delta G(-B))$ の具体的な形を求める。 $B \rightarrow 0$ の弱束縛極限では B の整数べきの項である (A.61) 式の第 3 項以降は $\mathcal{O}(B^0)$ になるが、 B の $1/2$ 乗の項である第 2 項は

$$\begin{aligned}\lim_{B \rightarrow 0} \Delta G(-B) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} G^{(n)}(-B) B^n \\ &\sim \mathcal{O}\left(B^{\frac{1}{2}-n}\right) B^n \\ &= \mathcal{O}\left(B^{1/2}\right),\end{aligned}\tag{A.65}$$

となり全ての項で $B^{1/2} \sim 1/R$ の寄与が残る。よって、 B が小さい弱束縛のとき B の 2 次以上の項 $\Delta G(-B)$ は $\mathcal{O}(1/R)$ の 1 次の項 $-BG'(-B)$ に比べて無視できないとわかる。 $G(-B)$ の n 回微分を考えると

$$\begin{aligned}G^{(n)}(-B) &= \frac{d^n}{d(-B)^n} \left\{ \frac{\mu}{2\pi} \sqrt{2\mu B} + \mathcal{O}(B^0) \right\} \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \sqrt{2\mu} \frac{d^n}{d(-B)^n} B^{1/2} + \text{多項式},\end{aligned}\tag{A.66}$$

となる。微分の項を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{d(-B)^n} B^{1/2} &= \frac{d^{n-1}}{d(-B)^{n-1}} \frac{d}{d(-B)} B^{1/2} \\ &= \frac{d^{n-1}}{d(-B)^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot -1 \cdot B^{1/2-1} \\ &= \frac{d^{n-2}}{d(-B)^{n-2}} \cdot (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) B^{1/2-2} \\ &\dots \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{2} \right)^n \{1(1-2) \cdots (1-2(n-1))\} B^{1/2-n} \\ &= (-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \{(2-1) \cdots (2n-3)\} B^{1/2-n} \\ &= - \left(\frac{1}{2} \right)^n (2n-3)!! B^{1/2-n},\end{aligned}\tag{A.67}$$

となり、(A.66) 式は

$$G^{(n)}(-B) = -\frac{\mu}{2\pi} \sqrt{2\mu} \left(\frac{1}{2} \right)^n (2n-3)!! B^{1/2-n} + \text{多項式},\tag{A.68}$$

となる。よって、 $G(-B)$ の 2 次以上の項は

$$\begin{aligned}
-\Delta G(-B) &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} G^{(n)}(-B) B^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mu}{2\pi} \sqrt{2\mu} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n (2n-3)!! B^{1/2-n} + \mathcal{O}(B^0) \right] B^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mu}{2\pi} \sqrt{2\mu} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n (2n-3)!! B^{1/2} + \mathcal{O}(B^n) \right] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mu}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n (2n-3)!! \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \mathcal{O}\left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right)^{2n-1}\right) \right], \quad (\text{A.69})
\end{aligned}$$

とわかる。ここで、 $\sqrt{2\mu B} = 1/R$ と、展開中で運動量の次元を持つのは $\Lambda = 1/R_{\text{typ}}$ のみであることを用いた。公式

$$\sum_{r=1}^n \frac{(2r-1)!!}{(2r+2)!!} = \frac{1}{2} - \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}, \quad (\text{A.70})$$

を用いて (A.69) 式の第 1 項を計算すると

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n (2n-3)!! &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \frac{1}{n!} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{(2r-1)!!}{(2r+2)!!} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \frac{2m-1}{2m} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2}, \quad (\text{A.71})
\end{aligned}$$

となるので、以上より

$$\begin{aligned}
-\Delta G(-B) &= \frac{\mu}{2\pi R} \left[\frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right)^3\right) \right] \\
&= \frac{\mu}{4\pi R} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right)^3\right) \right], \quad (\text{A.72})
\end{aligned}$$

が得られる。

付録 B

数値計算

B.1 複合性 X の中心値と誤差

4.2.2 節では、相互作用の到達距離 $R_{\text{int}} \neq 0$ の有効レンジモデルにおいて、 $R_{\text{int}} = 0.1a_0$ と $R_{\text{int}} = 0.5a_0$ の場合に複合性 X の中心値と誤差項を散乱長 a_0 で無次元化した有効レンジ r_e/a_0 の関数としてプロットした。さらに R_{int} を $R_{\text{int}} = 0.2a_0, 0.3a_0, 0.4a_0$ に変えてプロットしたものを示す。図 B.1 から図 B.3 から、 R_{int} を変化させても 4.2.2 節で示した X_c, X_u, X_l と X_{exact} の関係は定性的に変化がないことがわかる。

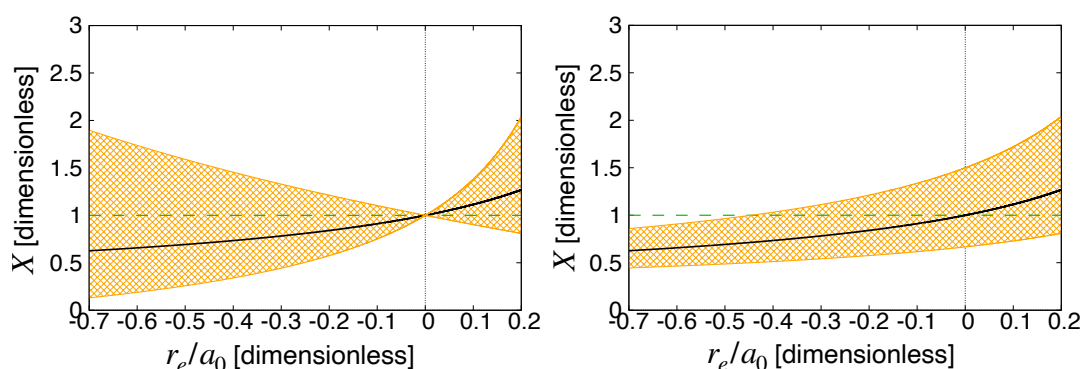


図 B.1 複合性の真の値 $X_{\text{exact}} = 1$ (破線) と弱束縛関係式を使った見積もり (実線) と誤差の範囲。 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.2$ の場合。左図は有効レンジによる誤差 ξ_{eff} の場合で、右図は相互作用距離による誤差 ξ_{int} の場合。

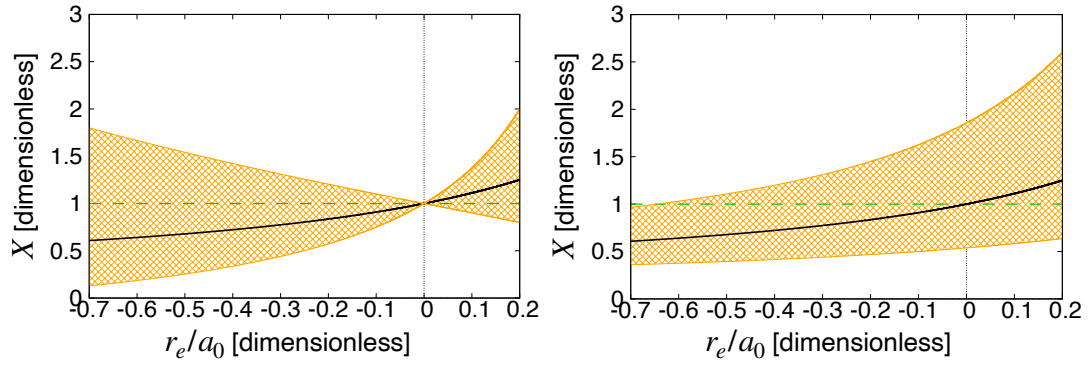


図 B.2 複合性の真の値 $X_{\text{exact}} = 1$ (破線) と弱束縛関係式を使った見積もり (実線) と誤差の範囲。 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.3$ の場合。左図は有効レンジによる誤差 ξ_{eff} の場合で、右図は相互作用距離による誤差 ξ_{int} の場合。

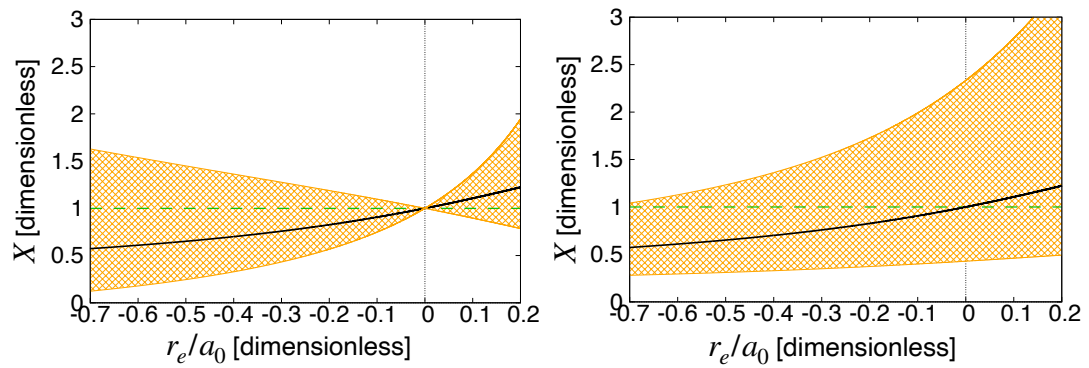


図 B.3 複合性の真の値 $X_{\text{exact}} = 1$ (破線) と弱束縛関係式を使った見積もり (実線) と誤差の範囲。 $\tilde{R}_{\text{int}} = 0.4$ の場合。左図は有効レンジによる誤差 ξ_{eff} の場合で、右図は相互作用距離による誤差 ξ_{int} の場合。

謝辞

本論文の執筆にあたり、以下の方々にお世話になりました。兵藤先生、1人ではまだ何もできない私に、原子核ハドロン分野の基礎知識から、研究のやり方、論文の書き方に至るまで根気よく指導して下さい本当に感謝いたします。また、美味しいお茶とお菓子もいつもありがとうございました。先生のおかげでとても楽しく、恵まれた研究生活を送ることができました。それから、学会や研究会、国際会議で質問やコメントをくださった Kamiya さん、Hosaka さん、Denny さん、Yamaguchi さん、Ohnishi さん、Sekihara さん、Oset さん、Takizawa さん、Jido さん、Endo さん、PANIC の座長の方、ありがとうございました。研究内容について理解を深めたり、研究を進めたりする貴重なきっかけになりました。忘れてしまったけれど他にも質問やコメントをしてくださった方がいると思います。その方々もありがとうございました。そして、この研究のきっかけとなるコメントをくださった東工大の西田祐介さんにも深くお礼申し上げます。

さらに、寺島くんと西淵くんは大学院から入ってきて知り合いのいない私と仲良くしてくれて嬉しかったです。ありがとうございます。そして、大学院に行きたいというわがままを聞いてくれ、学費を出してくれた父と母には本当に感謝します。同年代の人が働いている中、好きなことのみやる生活を送るといった贅沢ができました。それから、勝手に写真を撮って勝手に発表スライドの表紙に載せていた、かわいい愛犬さくらとかわいいパンダのリーリーにもありがとうを言いたいです。発表が始まる前の緊張をかわいさでほぐしてくれました。他にも、私を応援してくださった方々、見守ってくださった方々、反面教師になってくださった方々など、お世話になった全ての方もお礼を申し上げます。そして最後に、この論文をここまで読んでくださった方々、ありがとうございました。

参考文献

- [1] A. Hosaka, T. Iijima, K. Miyabayashi, Y. Sakai, and S. Yasui, PTEP **2016**, 062C01 (2016), arXiv:1603.09229.
- [2] F.-K. Guo *et al.*, Rev. Mod. Phys. **90**, 015004 (2018), arXiv:1705.00141.
- [3] N. Brambilla *et al.*, Phys. Rept. **873**, 1 (2020), arXiv:1907.07583.
- [4] D. J. Griffiths, 素粒子物理学, (丸善出版, 2019).
- [5] Particle Data Group, P. A. Zyla *et al.*, PTEP **2020**, 083C01 (2020).
- [6] N. Isgur and G. Karl, Phys. Rev. D **18**, 4187 (1978).
- [7] S. Godfrey and N. Isgur, Phys. Rev. D **32**, 189 (1985).
- [8] U.-G. Meißner, Symmetry **12**, 981 (2020), arXiv:2005.06909.
- [9] M. Mai, Eur. Phys. J. ST **230**, 1593 (2021), arXiv:2010.00056.
- [10] T. Hyodo and M. Niiyama, Prog. Part. Nucl. Phys. **120**, 103868 (2021), arXiv:2010.07592.
- [11] LHCb, R. Aaij *et al.*, Phys. Rev. D **102**, 112003 (2020), arXiv:2009.00026.
- [12] LHCb, R. Aaij *et al.*, (2021), arXiv:2109.01038.
- [13] LHCb, R. Aaij *et al.*, (2021), arXiv:2109.01056.
- [14] Belle, S. K. Choi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 262001 (2003), hep-ex/0309032.
- [15] LHCb, R. Aaij *et al.*, Phys. Rev. Lett. **115**, 072001 (2015), arXiv:1507.03414.
- [16] LHCb, R. Aaij *et al.*, Phys. Rev. Lett. **122**, 222001 (2019), arXiv:1904.03947.
- [17] T. Hyodo, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1330045 (2013), arXiv:1310.1176.
- [18] S. Weinberg, Phys. Rev. **137**, B672 (1965).
- [19] Y. Kamiya and T. Hyodo, Phys. Rev. C **93**, 035203 (2016), arXiv:1509.00146.
- [20] Y. Kamiya and T. Hyodo, PTEP **2017**, 023D02 (2017), arXiv:1607.01899.
- [21] V. Baru, J. Haidenbauer, C. Hanhart, Y. Kalashnikova, and A. E. Kudryavtsev, Phys. Lett. B **586**, 53 (2004), hep-ph/0308129.

- [22] C. Hanhart, Y. S. Kalashnikova, and A. V. Nefediev, *Eur. Phys. J. A* **47**, 101 (2011), arXiv:1106.1185.
- [23] T. Hyodo, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 132002 (2013), arXiv:1305.1999.
- [24] I. Matuschek, V. Baru, F.-K. Guo, and C. Hanhart, *Eur. Phys. J. A* **57**, 101 (2021), arXiv:2007.05329.
- [25] T. Hyodo, D. Jido, and A. Hosaka, *Phys. Rev. C* **85**, 015201 (2012), arXiv:1108.5524.
- [26] F. Aceti and E. Oset, *Phys. Rev. D* **86**, 014012 (2012), arXiv:1202.4607.
- [27] C. Hanhart, J. R. Pelaez, and G. Rios, *Phys. Lett. B* **739**, 375 (2014), arXiv:1407.7452.
- [28] T. Sekihara, T. Hyodo, and D. Jido, *PTEP* **2015**, 063D04 (2015), arXiv:1411.2308.
- [29] Z.-H. Guo and J. A. Oller, *Phys. Rev. D* **93**, 096001 (2016), arXiv:1508.06400.
- [30] T. Sekihara, T. Arai, J. Yamagata-Sekihara, and S. Yasui, *Phys. Rev. C* **93**, 035204 (2016), arXiv:1511.01200.
- [31] T. Sekihara, *Phys. Rev. C* **95**, 025206 (2017), arXiv:1609.09496.
- [32] Y. Li, F.-K. Guo, J.-Y. Pang, and J.-J. Wu, (2021), arXiv:2110.02766.
- [33] J. Song, L. R. Dai, and E. Oset, (2022), arXiv:2201.04414.
- [34] E. Braaten and H. W. Hammer, *Phys. Rept.* **428**, 259 (2006), cond-mat/0410417.
- [35] P. Naidon and S. Endo, *Rept. Prog. Phys.* **80**, 056001 (2017), arXiv:1610.09805.
- [36] V. N. Efimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **12**, 589 (1971).
- [37] V. Baru *et al.*, (2021), arXiv:2110.07484.
- [38] T. Kinugawa and T. Hyodo, Role of the effective range in the weak-binding relation, 2021, arXiv:2112.00249.
- [39] T. Kinugawa and T. Hyodo, Range correction in the weak-binding relation for unstable states, in *Particles and Nuclei International Conference*, 2021, arXiv:2111.06619.
- [40] T. Kinugawa and T. Hyodo, Application of the weak-binding relation with range correction, in *19th International Conference on Hadron Spectroscopy and Structure*, 2022, arXiv:2201.04283.
- [41] W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936), physics/0605038.
- [42] J. Gasser and H. Leutwyler, *Nucl. Phys. B* **250**, 465 (1985).
- [43] E. Braaten, M. Kusunoki, and D. Zhang, *Annals Phys.* **323**, 1770 (2008),

arXiv:0709.0499.

- [44] D. R. Phillips, S. R. Beane, and T. D. Cohen, *Annals Phys.* **263**, 255 (1998), hep-th/9706070.
- [45] D. B. Kaplan, *Nucl. Phys. B* **494**, 471 (1997), nucl-th/9610052.
- [46] H. Feshbach, *Annals Phys.* **5**, 357 (1958).
- [47] H. Feshbach, *Annals Phys.* **19**, 287 (1962).
- [48] T. Kohler, K. Goral, and P. S. Julienne, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1311 (2006), cond-mat/0601420.
- [49] T. Hyodo, *Phys. Rev. C* **90**, 055208 (2014), arXiv:1407.2372.
- [50] HAL QCD, T. Iritani *et al.*, *Phys. Lett. B* **792**, 284 (2019), arXiv:1810.03416.
- [51] S. Gongyo *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 212001 (2018), arXiv:1709.00654.
- [52] M. Wang, W. J. Huang, F. G. Kondev, G. Audi, and S. Naimi, *Chin. Phys. C* **45**, 030003 (2021).
- [53] T. Sekihara, Y. Kamiya, and T. Hyodo, *Phys. Rev. C* **98**, 015205 (2018), arXiv:1805.04024.
- [54] R. Machleidt, *Phys. Rev. C* **63**, 024001 (2001), nucl-th/0006014.
- [55] A. Esposito, L. Maiani, A. Pilloni, A. D. Polosa, and V. Riquer, (2021), arXiv:2108.11413.
- [56] H. W. Hammer, *Nucl. Phys. A* **705**, 173 (2002), nucl-th/01110031.
- [57] M. Juric *et al.*, *Nucl. Phys. B* **52**, 1 (1973).
- [58] A. Kievsky and M. Gattobigio, *Phys. Rev. A* **87**, 052719 (2013), arXiv:1212.3457.
- [59] Z.-C. Yan, J. Babb, A. Dalgarno, and G. Drake, *Phys. Rev. A* **54**, 2824 (1996).
- [60] Y. Kamiya and T. Hyodo, *PoS INPC2016*, 270 (2017), arXiv:1701.08941.
- [61] M. Takizawa and S. Takeuchi, *PTEP* **2013**, 093D01 (2013), arXiv:1206.4877.