平成 30 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（平成 30 年 2 月 8 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1. 線形代数, 微分積分 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１．実数を係数とする 2 次以下の 1 変数多項式全体のなす実ベクトル空間を

$$V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

とする．写像

$$T : V \ni f(x) \mapsto f(x) - f'(x) \in V$$

について以下の問いに答えよ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．

(1) T が線形写像であることを示せ．ただし，微分に関する基本事項は認めてよい．

(2) V の基底 $1,\ x,\ x^2$ に関する T の表現行列 A を求めよ．

(3) 行列 A が対角化可能であるかどうか，理由とともに答えよ．

(4) $(A - E)^3$ および A^{100} を求めよ．ただし，E は 3 次の単位行列とする．

問題２．$n \geq 2$ を整数，a を 0 でない実数とする．列ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ が ${}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} = [1]$ を満たすとする．ただし，${}^t\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}$ を転置して得られる行ベクトルを表す．E を n 次の単位行列として，$A = E - a\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{u}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) A が対称行列であることを示せ．

(2) A が直交行列であるための a に関する必要十分条件を求めよ．

(3) θ を実数とし，$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ とする．a が (2) で求めた条件を満たすとき $\det A$ を求めよ．

問題３．$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = x^4 - 3x^2 + y^4 - 3y^2 + 4xy$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の臨界点をすべて求めよ．すなわち，$f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ を満たす (a,b) をすべて求めよ．

(2) $f(x,y)$ が極大値をとる点と極小値をとる点をそれぞれすべて求めよ．

問題４．以下の問いに答えよ．

(1) 閉区間 $[0,1]$ 上で定義された実数値関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ と実数値関数 $f(x)$ を考える．$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,1]$ 上で $f(x)$ に一様収束することの定義を述べよ．

(2) 閉区間 $[0,1]$ 上の関数列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を以下で定義する：

$$g_n(x) = \begin{cases} 2nx & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n}\right) \\ -2nx + 2 & \left(\dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{1}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

$$f_n(x) = \max\{x, g_n(x)\}.$$

(a) $y = f_n(x)$ のグラフの概形を描け．

(b) 各 $x \in [0,1]$ に対して $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ と定義するとき，$f(x)$ を求めよ．

(c) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,1]$ 上で $f(x)$ に一様収束しないことを示せ．

平成 30 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（平成 30 年 2 月 8 日）
数学 II (13:00 − 14:30)

1. 問題は全部で 9 題ある．そのうちの 2 題を選択して解答しなさい．

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4. 試験終了後, 答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１．行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -10 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有多項式を求めよ．

(2) A のジョルダン標準形を求めよ．

(3) 対角化可能な行列 S とべき零行列 N で次を満たすものを一組求めよ．

$$A = S + N, \quad SN = NS.$$

問題２．整数 a, b に対し行列 $X_{a,b}$ を

$$X_{a,b} = \begin{pmatrix} a-b & 4b \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

と定める．$R = \{X_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) R は $\mathbb{R}$ 上の 2 次全行列環 $M(2, \mathbb{R})$ の部分環をなすことを示せ．

(2) R が整域かどうか，理由とともに答えよ．

(3) $|X_{a,b}| \in \{1, -1\}$ であることと，$X_{a,b}$ が R の単元であることは同値であることを示せ．ただし $|X_{a,b}|$ は行列 $X_{a,b}$ の行列式を表す．

問題３．空間 $\mathbb{R}^3$ 内の直線 l を次で定める．

$$l = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, y = z\}$$

$\mathbb{R}^3$ 内において z 軸を回転軸として，直線 l を回転して得られる曲面を S とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲面 S のパラメータ表示を与えよ．

(2) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ （一葉双曲面）であることを示せ．

(3) (1) で与えたパラメータ表示に対し，S の第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N を求めよ．

(4) 曲面 S 上においてガウス曲率が最小となる点の集合 A を求めよ．

問題 4．本問では $\mathbb{R}^2$ のユークリッド位相を考える．関数 $f_n(x) = (n+1)x^n(1-x)$ に対し，

$$A_n = \{(x, f_n(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$$

と定義し，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の整数 $n \geq 1$ に対し $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ が成り立つことを示せ．また，A が弧状連結であることを示せ．

(2) A の開被覆 $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，任意の整数 $n \geq 1$ に対し以下の条件を満たすものを構成せよ．

$$\text{(i) } A_1 \cup \cdots \cup A_n \subset O_n \qquad \text{(ii) } A_{n+1} \not\subset O_n$$

(3) A の $\mathbb{R}^2$ における閉包 $\bar{A}$ が次の集合を含むことを示せ．

$$\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq e^{-1}\}.$$

問題 5．$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 10z \leq 0\}$ とする．

(1) V の境界 ∂V はどのような図形か答えよ．

(2) ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z) = (x^2 + xy, y^2 - xz, -z^2)$ の発散 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ を計算せよ．

(3) ∂V の外向き単位法線ベクトル場を $\mathbf{n}$ として，$\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ を計算せよ．ただし，$d\sigma$ は面素を表す．

問題 6．a を正の実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 領域 $D = \{z \mid z = re^{i\theta},\ 0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ における関数 $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z^2 + a^2}$ の極とその点での留数を求めよ．

(2) 次の積分を計算せよ：

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2 + a^2}\, dx$$

問題7． $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を次の漸化式で定める:

$$f_0(t) = 1,$$
$$f_n(t) = 1 + \int_0^t f_{n-1}(s)\,ds, \quad n = 1, 2, \ldots$$

以下の問いに答えよ.

(1) 各整数 $n \geq 0$ に対し, $f_n(t)$ を具体的に求めよ.

(2) $\mathbb{R}$ 上のある関数 f が存在し，関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は f に $\mathbb{R}$ 上で広義一様収束することを示せ.

(3) (2) の関数 f が次の初期値問題の解であることを示せ.

$$f'(t) = f(t), \quad f(0) = 1$$

問題8． 原始帰納的関数（primitive recursive function, 原始再帰的関数ともいう）について，以下の問いに答えよ．ただし非負整数全体の集合を $\mathbb{N}_0$ で表す.

(1) 以下の文章が原始帰納的関数の定義となるように，空欄 $\boxed{\textbf{ア}}$ にふさわしい文章（数式を含んでもかまわない）を書け．本小問 (1) については，答えのみを書けばよい.

(I) **（初期関数）** 各 $a \in \mathbb{N}_0$ に対し，定数関数 $c_a(x_1, \ldots, x_n) = a$ は原始帰納的関数である．また，後者関数 $\mathrm{Next}(x) = x + 1$ も原始帰納的関数である．さらに，各自然数 i（$1 \leq i \leq n$）に対し，射影関数 $U_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ も原始帰納的関数である.

(II) **（合成演算）** $h_1, \ldots, h_m$ と g が原始帰納的関数であるとき，合成関数 $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$ も原始帰納的関数である.

(III) **（原始帰納法演算）**

ア

(IV) 以上によってできたもののみが原始帰納的関数である.

(2) 非負整数の加法 $f_+(x, y) = x + y$ および乗法 $f_\times(x, y) = xy$ が原始帰納的関数であることを示せ.

(3) 以下の関数 f は原始帰納的関数か？理由とともに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 3 \text{ のとき}) \\ x - 3 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

問題９．以下の問題をいわゆる関数型プログラム言語と呼ばれるものを使って解答しなさい．なお使用した言語の名前は最初に明示すること．それは広く知られているものに限る．関数型言語では

1. リスト構造へのアクセスとしてリストの第一要素を抜き出す関数（`car`）
2. リストの第二要素以降最後の要素までをリストとして抜き出す関数（`cdr`）
3. いくつかの要素群をまとめてリストを作る関数（`list`）
4. ある要素を既存のリストの先頭に加える関数（`cons`）
5. あるリストが空リスト（要素数=0）である場合，戻り値が真（true）となる述語関数`null?`が使えるものとする．

が備わっているものとする．上の例ではプログラム言語 Scheme の関数名を書いている．それらの関数の機能は，例えばリスト`xlst`が`(1 2 3 4 5)`（長さ5）であるとすると，第一要素の1は`(car xlst)`の戻り値として得られ，`(cdr xlst)`で第二要素以降最後までのリスト，つまり`(2 3 4 5)`が得られることになる．また`(cons 10 xlst)`とすると新たなリスト`(10 1 2 3 4 5)`が得られることになる．また数値2,4,6,8の4つからなるリストは`(list 2 4 6 8)`として`list`関数より構成される．

(1) ある一つのリストを引数として，そのリストの要素を逆に並べたリストを返す関数`(srev xs)`を定義しなさい．今`xs`が`(1 4 9 16)`だとすると戻り値が`(16 9 4 1)`となる関数である．

(2) 2つのリスト`xs`, `ys`を引数として，以下に述べる仕様を満たす関数`(transp xs ys)`を定義しなさい．

   1. `ys`が空リストであれば`xs`を戻す．
   2. そうでなければ第一引数は`ys`の先頭要素を第一要素にして，第二要素以降は`xs`そのものにしたリスト，第二引数には`ys`の第二要素以降のリストを与え`transp`を再帰的に呼び出す．

(3) `transp`を使って`srev`と同じ機能を持つ（リストの逆順リストを戻す）関数`(trev xs)`を定義しなさい．