平成 30 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（平成 29 年 8 月 29 日）
数学 I (9:30 − 11:30)

1. 線形代数, 微分積分 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１. 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の正の整数 n に対して,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$$

が成り立つことを示せ.

(2) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$x_n = n^{\frac{1}{n}}$$

と定義する．$n \geq 3$ ならば

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{n(n+1)} \leq 1$$

が成り立つことを示せ.

(3) (2) で定義した数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であることを示し，その極限値を求めよ.

(4) $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $a \in \mathbb{R}$ に収束する実数列とする．数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

と定義するとき，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束することを示せ.

問題２. 以下の問いに答えよ.

(1) 領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 2\pi\}$ 上の次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sin(x+y)\,dxdy.$$

(2) α および β を正の定数とする．このとき, 次の広義重積分が収束するための α と β についての必要十分条件を求めよ.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha}(1+x^2+y^2)^{\beta}}\,dxdy.$$

問題３． a, b, c, d, e, f を実数とする．

$$A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ -5 & b & c \\ 5 & -a & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

は次の条件を全て満たすとする．

- A の固有値は $a, 1, -1$ であり，$\boldsymbol{v}$ は固有値 a に対する A の固有ベクトルである．
- A^{-1} の $(3,1)$ 成分は $\dfrac{5}{3}$ である．

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，答えだけでなく，答えを得た根拠も述べること．

(1) a と $\det A$ を求めよ．

(2) A の $(1,3)$ 余因子と b を求めよ．

(3) c を求めよ．

(4) A^2 のトレースと d を求めよ．

(5) e, f を求めよ．

問題４． a を実数として，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

とおく．線形写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ と $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ で定義する．$V = \operatorname{Ker} f$, $W = \operatorname{Ker} g$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) V の次元と１組の基底をそれぞれ求めよ．

(2) $\dim W = 2$ であるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対して，共通部分 $V \cap W$ の次元と１組の基底を求めよ．

(4) (2) で求めた a に対して，和空間 $V + W$ の次元と１組の基底を求めよ．

平成30年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（平成29年8月29日）
数学II (13:00 – 14:30)

1. 問題は全部で9題ある．そのうちの2題を選択して解答しなさい．

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4. 試験終了後, 答案用紙は2枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１． 以下の問いに答えよ．

(1) $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする．A が上三角行列であり，かつ，A の対角成分が全て 0 であるとき，A はべき零行列であることを証明せよ．

(2) 次の行列 A のジョルダン標準形 J と $J = P^{-1}AP$ となる正則行列 P を一組求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & -30 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

問題２． 多項式環 $\mathbb{Z}[x]$ のイデアル $I = (x^2+1)$, $J = (2, x^2+1)$ を考える．

(1) イデアル I は $\mathbb{Z}[x]$ の素イデアルになるか, 理由とともに答えよ．

(2) イデアル J は $\mathbb{Z}[x]$ の単項イデアルになるか, 理由とともに答えよ．

(3) イデアル J は $\mathbb{Z}[x]$ の素イデアルになるか, 理由とともに答えよ．

(4) イデアル I を含む $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアルの例を与えよ．それが極大イデアルになることも説明すること．

問題３． f を平面 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された C^2 級関数とし，関数 $p = p(x,y)$, $q = q(x,y)$, $r = r(x,y)$, $s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$ をそれぞれ，$p = f_x$, $q = f_y$, $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$, $t = f_{yy}$ で定義する．また，S をパラメータ表示 $\boldsymbol{\alpha}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ をもつ 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) S の点 $\boldsymbol{\alpha}(x,y)$ における第 1 基本量 E, F, G を，p, q を用いてあらわせ．

(2) S の点 $\boldsymbol{\alpha}(x,y)$ における第 2 基本量 L, M, N を，p, q, r, s, t を用いてあらわせ．

(3) S の点 $\boldsymbol{\alpha}(x,y)$ における平均曲率 H が 0 であることと，p, q が (x,y) において次の方程式をみたすことは同値である．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0$$

これを証明せよ．

問題４． $\mathbb{R}$ を実数全体とし，$\mathbb{R}$ の元 a, b に対して $a-b$ が有理数のとき $a \sim b$ と書き同値関係 $\sim$ を定める．また S を $\mathbb{R}$ の $\sim$ による商集合とし，S には $\mathbb{R}$ の標準的な位相から定まる商位相を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 位相空間がコンパクトであることの定義を述べよ．

(2) S はコンパクトであることを証明せよ．

(3) ハウスドルフ空間の定義を述べよ．

(4) S はハウスドルフ空間ではないことを証明せよ．

問題５． $\mathbb{R}^3$ の曲面 S を $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1,\ z = x^2-y^2\}$ とし，その境界を C とする．ただし，C の向きは，$(0,0,0) \to (1,0,1) \to (0,1,-1) \to (0,0,0)$ の順に進む方向とする．以下の問いに答えよ．

(1) S 上の点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) S の曲面積を求めよ．

(3) S 上のベクトル場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz, x(2z+1), xy)$ の回転 $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ を求めよ．

(4) (3) で定めたベクトル場 $\mathbf{F}$ の曲線 C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよ．

問題６． 複素関数 $f(z) = e^z - i$ について，以下の問いに答えよ．

(1) α を $f(z)$ の零点とするとき，$f(z)$ の α における Taylor 展開を求めよ．

(2) $f(z)$ のすべての零点とその位数を求めよ．

(3) α を $f(z)$ の零点とし，$C(\alpha)$ を α を中心とする半径 1 の円で向きは正の向き（反時計回り）とする．線積分

$$\int_{C(\alpha)} \frac{1}{f(z)}\, dz$$

の値を求めよ．

(4) $C(\alpha)$ は (3) と同じとする．$f(z)$ の任意の零点 α に対し，線積分

$$I(\alpha) = \int_{C(\alpha)} \frac{z^2}{f(z)}\, dz$$

の値は実数であることを示せ．また，α が $f(z)$ のすべての零点の集合上を動くとき，$I(\alpha)$ の最大値を求めよ．

問題７． p を正の定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の初期値問題の解 $u(t)$ を求めよ．

$$\begin{cases} -u''(t) + p^2 u(t) = 0,\ t \in \mathbb{R} \\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1. \end{cases}$$

(2) 次の初期値問題の解 $v(t)$ を求めよ．

$$\begin{cases} -v''(t) + p^2 v(t) = e^{-pt},\ t \in \mathbb{R} \\ v(0) = 0,\ v'(0) = 1. \end{cases}$$

(3) (2) の解 $v(t)$ に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{v(t)}{e^{pt}}$ を求めよ．

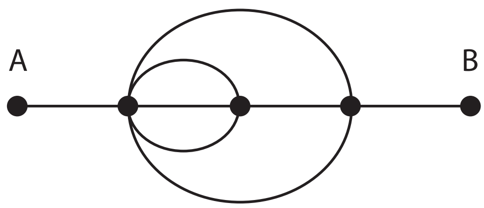
問題８． この問いでは，グラフは無向多重グラフのこととする．すなわち，辺に向きは定めず，一般にはループ（両端点が同じ頂点である辺）や多重辺（同じ端点集合をもつ複数の辺）をもつことを許容するものとする．

頂点集合 V と辺集合 E からなるグラフ G を考える．頂点と辺の交互列

$$W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n) \quad (v_0, \ldots, v_n \in V,\ e_1, \ldots, e_n \in E)$$

に対し，各 $i = 1, \ldots, n$ について辺 e_i の端点集合が $\{v_{i-1}, v_i\}$ であるとき，W を v_0 から v_n への長さ n の道という．以下の問いに答えよ．

(1) 図のグラフに対し，頂点 A から頂点 B への長さ 6 の道は何通りあるか．



(2) 一般に，頂点が 5 個，辺が 8 個のグラフには，次数が 4 以上の頂点が存在することを示せ．

(3) グラフ G は次の条件 a), b), c) をすべて満たすとする．このような G を同型を除いてすべて求めよ．

a) 5 個の頂点と 8 個の辺からなる．

b) ループも多重辺もない．

c) オイラー路がない．

ただし，すべての辺をちょうど 1 回ずつ通る道をオイラー路という．

問題９．以下の各問に対して答えなさい．ただし解答の記述に用いる「プログラム言語」としては，C，Pascal，Java，Fortran のいずれかを用いること．ただしどの言語を用いたかを解答中に明記すること．

(1) 二つの整数 m と n の値をこの順番に引数に持ち,「プログラム言語」の乗算の演算を使わずに，m と n の積の値を計算して関数値として返す関数 multnum の「プログラム言語」による定義を示しなさい．また同様に，二つの整数 m と n の値をこの順番に引数に持ち,「プログラム言語」の乗算や除算の演算を使わずに，m を n で割った整数商の値（たとえば $m = 11,\ n = 4$ のときは 2）を計算して関数値として返す関数 divnum の「プログラム言語」による定義を示しなさい．ただし，整数の積を求める関数の場合には積の値は「プログラム言語」で扱える整数の範囲を超えないと仮定して良いとし，また整数の整数商を求める関数の場合には二つの整数の引数はどちらも正の値であると仮定して良いとする．

(2) 要素数が m の整数の配列 a と要素数が n の整数の配列 b に対して，$f(a[i], b[j])$ の値を最小にするような添字 i と j の組み合わせの個数を求めて関数値として返す関数 cntminval の「プログラム言語」による定義を示しなさい．その引数は四つで順番に整数値 m と n および配列 a と b とする．なお，整数値を返す関数 f は，たとえば

```
int f(int x, int y) { return x*x + y*y; }
```

のように既に前で定義されていて，呼び出すだけで使えるものとする（この例で用いた「プログラム言語」は C である）．