平成 29 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 29 年 2 月 9 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

**1.** 線形代数, 微分積分 計 4 題を解答しなさい.

**2.** 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

**3.** 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

**4.** 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１．行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

で定まる $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $F : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \mapsto A\boldsymbol{x}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の階数を求めよ．

(2) $F$ の核 $\mathrm{Ker}F$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(3)

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + w = 0 \right\}$$

とする．ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

は $W$ の基底であることを示せ．

(4) $F$ を $W$ に制限したものを $F_W$ で表す．$W$ の基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ と $\mathbb{R}^4$ の標準基底に関する $F_W$ の表現行列 $B$ とその階数を求めよ．

問題２．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $U^{-1}AU$ が対角行列となるような正則行列 $U$ を 1 つ求め，$U^{-1}AU$ を求めよ．

(3) $B^2 = A$ を満たす 3 次正方行列 $B$ を 1 つ求めよ．

問題３．以下の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし，$\alpha$ を実数とする．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha$ に収束することの定義を述べよ．

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な実数列とし，$\alpha$ を実数とする．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全ての収束部分列の極限値が $\alpha$ ならば，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\alpha$ に収束することを示せ．

問題４．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha$ を正定数とし，$a_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ とする．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための $\alpha$ の必要十分条件を求め，そのときの極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ．

(2) $b_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\sin \pi x}{x}\,dx$ とする．数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列（基本列）であることを示せ．

(3) $c_n = \displaystyle\int_1^n \frac{|\sin \pi x|}{x}\,dx$ とする．数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散することを示せ．

(4) $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$ とし，$d_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{\sin \pi\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\,dxdy$ とする．数列 $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

平成 29 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 29 年 2 月 9 日）
数学 II (13:00 – 14:30)

**1.** 次の 9 題から 2 題を選択して解答しなさい.

**2.** 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

**3.** 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

**4.** 試験終了後, 答案用紙は 2 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１.

$\mathbb{R}^3$ 内で，直線 $l : x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-3}$ と，平面 $\alpha : 2x - 3y - z = 0$ を考える．$\mathbb{R}^3$ の点の座標を列ベクトルで表す．3 次正方行列 $A$ を左から掛けて定まる $\mathbb{R}^3$ の線形変換は，直線 $l$ 上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$ に写し，平面 $\alpha$ 上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} + (x-y)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ に写すとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ を求めよ．

(2) $A$ の固有値と，対応する固有空間の基底を 1 組求めよ．

(3) $A$ のジョルダン標準形 $J$ を求め，$P^{-1}AP = J$ となる正則行列 $P$ を 1 つ求めよ．ただしジョルダン細胞を並べる順序は問わない．

問題２.

以下の問いに答えよ．

(1) 巡回群の部分群は巡回群であることを示せ．

(2) $G$ を位数が 2 以上の群とする．$G$ の部分群が $G$ 自身と単位元のみから成る部分群しかないとき，$G$ は素数位数の巡回群であることを示せ．

(3) 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ で表す．加法群 $\mathbb{Z}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ は位数 2 の巡回群であることを示せ．

問題３．

$U, V$ を $\mathbb{R}^2$ の連結な開集合とし，$\boldsymbol{x} : U \to S$ と $\boldsymbol{x}^* : V \to S$ を同一の曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ の $C^\infty$ 級パラメータ表示とする．ここで $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}^*$ のヤコビ行列の階数はそれぞれ $U, V$ 上で恒等的に 2 であるとする．また，$(\boldsymbol{x}^*)^{-1} \circ \boldsymbol{x} : U \to V$ と $\boldsymbol{x}^{-1} \circ \boldsymbol{x}^* : V \to U$ は $C^\infty$ 級写像であるとする．$(\boldsymbol{x}^*)^{-1} \circ \boldsymbol{x}(u, v) = (\theta, \varphi)$ とおく．さらに，$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$ とし，$J^t$ は $J$ の転置行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}(u, v)$ に関する $S$ の第 1 基本量を $E$, $F$, $G$ とし，$\boldsymbol{x}^*(\theta, \varphi)$ に関する $S$ の第 1 基本量を $E^*$, $F^*$, $G^*$ とするとき，

$$\begin{bmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{bmatrix} = J^t \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} J$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\boldsymbol{x}(u, v)$ に関する $S$ の第 2 基本量を $L$, $M$, $N$ とし，単位法ベクトルを $\boldsymbol{N}$ とする．また，$\boldsymbol{x}^*(\theta, \varphi)$ に関する $S$ の第 2 基本量を $L^*$, $M^*$, $N^*$ とし，単位法ベクトルを $\boldsymbol{N}^*$ とする．このとき，

$$\begin{bmatrix} L^* & M^* \\ M^* & N^* \end{bmatrix} = \varepsilon J^t \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} J$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^*$ のときは，$\varepsilon = 1$ とし，そうでないときは，$\varepsilon = -1$ とする．

(3) $\boldsymbol{x}(u, v)$ に関するガウス曲率 $K$ は，$\boldsymbol{x}^*(\theta, \varphi)$ に関するガウス曲率 $K^*$ に一致することを示せ．

問題４.

$z, w \in \mathbb{C}$ に対して，

$$d(z,w) = \frac{|z-w|}{(1+|z|)(1+|w|)}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $(\mathbb{C}, d)$ が距離空間になることを示せ.

(2) $\alpha \in \mathbb{C}$ を固定し，

$$U(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; d(z,\alpha) < \frac{1}{(1+|\alpha|)(2+|\alpha|)} \right\}$$

とおく．$z \in U(\alpha)$ に対し，$|z| < 1 + |\alpha|$ が成立することを示せ.

(3) $\alpha \in \mathbb{C}$ を固定する.

$$\lim_{n\to\infty} d(z_n, \alpha) = 0$$

を満たす $\mathbb{C}$ の点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - \alpha| = 0$$

が成立することを示せ.

問題５.

$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ 上の関数 $\phi_+ : D \to \mathbb{R},\ \phi_- : D \to \mathbb{R}$ を

$$\phi_+(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}, \quad \phi_-(x,y) = -\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 集合 $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ \phi_-(x,y) \leq z \leq \phi_+(x,y)\}$ を図示せよ．

(2) $B$ の境界 $\partial B$ の点 $(x,y,z)$ における外向き単位法線ベクトル $n$ を $x,y,z$ で表せ．

(3) $B$ 上の実数値 $C^1$ 級関数 $f$ に対し，$B$ 上のベクトル場 $F$ を $F=(0,0,f)$ と定める．このとき

$$\iiint_B \frac{\partial f}{\partial z}\,dxdydz = \iint_{\partial B} F \cdot n\,dA$$

が成り立つことを示せ．ただし $dA$ は $\partial B$ の面積素を表すとする．

(4) 集合 $B$ の体積を求めよ．

問題６.

整関数

$$f(z) = z - \sin z$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の零点 $z=0$ の位数を求めよ．

(2) $\sin z$ のマクローリン展開（原点を中心とするテイラー展開）を用いて，$0 < |z| \leq 1$ に対し

$$\left| -f(z) + \frac{z^3}{3!} \right| < \frac{|z|^3}{3!}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 単位円 $|z|=1$ に反時計回りの向きを与えたものを $C$ で表す．複素線積分

$$\int_C \frac{1}{f(z)}\,dz$$

の値を求めよ．

問題７．

$a>0$ を定数とする．$p(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数であり，ある定数 $T>0$ が存在して，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し，$p(t+T)=p(t)$ が成り立つものとする．次の初期値問題の解 $u(t)$ について考える．

$$u'(t)=p(t)u(t)-u(t)^2 \quad (t>0), \qquad u(0)=a$$

以下の問いに答えよ．

(1) $v(t)=1/u(t)$ とおくと，

$$-v'(t)=p(t)v(t)-1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $q(t):=\displaystyle\int_0^t p(s)\,ds$ を用いて，解 $u(t)$ を表せ．

(3) $p(t)$ がさらに $\displaystyle\int_0^T p(s)\,ds=0$ を満たすとき，極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}u(t)$ の値を求めよ．

問題８．

本問でグラフとは，単純無向グラフのことをいう．すなわち，辺は向きをもたず，各辺はちょうど２つの端点をもち，端点が同じ頂点となる辺（ループ）はなく，複数の辺が同じ端点集合をもつ場合（多重辺）もないとする．各頂点に接続している辺の個数が５であるグラフを「５正則グラフ」とよぶ．例を示そう．以下，頂点 $n$ 個の完全グラフを $K_n$ で表し，その頂点を $v_1,\dots,v_n$ とする．

例１．$K_6$ は５正則グラフである．

例２．$K_5$ と，そのコピー $K_5'$（頂点を $v_1',\dots,v_5'$ とする）を並べ，５個の辺 $(v_1,v_1'),\dots,(v_5,v_5')$ を追加してできるものは，５正則グラフである．

以下の問いに答えよ．

(1) 頂点がちょうど８個の，連結な５正則グラフが存在することを示せ．

(2) 頂点がちょうど12個の，連結な５正則グラフが存在することを示せ．

(3) $n$ が６以上の偶数であるとき，頂点がちょうど $n$ 個の，連結な５正則グラフが存在することを示せ．

問題９．

連続関数 $f(x)$ をプログラム言語で置き換えて記述した関数の定義が与えられているとする．ただし関数の引数と関数の返す値の型はプログラム言語が持つ実数型（浮動小数点数型）であるとする．この定義で計算される関数値は本来の関数値の非常に良い近似値を与えるものとする．

実数 $a < b$ に対し，閉区間 $[a, b]$ の両端での $f(x)$ の値がそれぞれ非零で符号が相異なる場合，区間 $[a, b]$ には連続関数 $f(x)$ の零点が（少なくとも 1 つ）存在する．この零点の近似値を二分法を用いて区間を縮小して求めよう．

> 最初は $k = 0$ とし，初期区間 $I^{(0)}$ を $[a, b]$ とする．
>
> 第 $k$ 段の処理では，区間 $I^{(k)}$ を $[\alpha, \beta]$ とするとき，その中点 $m = (\alpha + \beta)/2$ を求めて，区間の幅 $\beta - \alpha$ がある与えられた小さい正数 $\delta$ よりも小さければ中点 $x = m$ を零点の近似値として計算を終了する．そうでなければ関数値 $f(m)$ を計算して，$f(m)$ の絶対値がある与えられた小さい正数 $\epsilon$ よりも小さければ，やはり中点 $m$ を求める零点の近似値として計算を終了する．どちらでもない場合は，もしも $f(\alpha)$ と $f(m)$ の符号が相異なるならば次段の区間 $I^{(k+1)}$ は $[\alpha, m]$ として，そうでなければ次段の区間 $I^{(k+1)}$ は $[m, \beta]$ として第 $k + 1$ 段の処理に行く．

上記の方針に基づき，二分法で $f(x)$ の零点の近似値を求めて関数値として返す「プログラム言語」の関数を `bisect(a,b,delta,eps)` とする．

`bisect(a,b,delta,eps)` をプログラム言語で書け．

ただしプログラム言語として，`C` 言語，`C++`，`Java`，`Python` の中から 1 つを選び，それを用いて解答せよ．どの言語を選んだのかを解答中に明記すること．ここで `a`，`b` はそれぞれ零点を探す初期区間の左端と右端の値であり，`delta` は再分割をやめるときの区間の幅の許容値，`eps` は関数値の絶対値を十分零に近いとみなす許容値である．あらかじめ $f(a)$ と $f(b)$ は非零で符号が互いに異なると仮定して計算を開始しても良いとする．また関数 $f(x)$ は「プログラム言語」により定義があらかじめ記述されていて，関数 `bisect` の中からその名前で呼び出せば利用できるものとする．