平成 29 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）

理工学研究科　数理情報科学専攻

入学試験（平成 28 年 8 月 30 日）

数学 I (9:30 – 11:30)

1. 線形代数, 微分積分 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１．$\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{bmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{4} a_k b_k$ と定義する．a, b を正の定数とし，$\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i = a,\ \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = -b\ (i \neq j$ のとき) をみたすと仮定する．4 次正方行列 A を $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix}$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) ${}^tAA$ を求めよ．ただし，${}^tA$ は A の転置行列とする．

(2) $\det({}^tAA)$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が $\mathbb{R}^4$ の基底となるための必要十分条件を a, b で表せ．

問題２．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ で $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の標準内積を表す．$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ とおき，写像

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) f が線形写像になることを示せ．

(2) 標準基底に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間 V を

$$V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$$

とおいたとき，V の基底を一組求めよ．

問題３．以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $\cos x$ および関数 e^x の Maclaurin 展開（原点を中心とする Taylor 展開）を求めよ.

(2) 次の広義積分が収束する場合は収束することを示し, 発散する場合は発散することを示せ.

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1-\cos x}\, dx$$

(3) 次の広義積分が収束する場合は収束することを示し, 発散する場合は発散することを示せ.

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}\, dx$$

問題４．$\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = (x^2+y^2-2y)(x^2-2y)$$

と実数 a に対して,

$$\varphi(t) = f(t, at)$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\varphi(t)$ は $t=0$ で極小値をとることを示せ.

(2) f の臨界点（$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ をみたす点）をすべて求めよ.

(3) 円 $x^2+y^2-2y=0$ と放物線 $x^2-2y=0$ の共有点を求めよ.

(4) $f(x,y)$ の極値を求め，極大か極小か判定せよ.

平成 29 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 28 年 8 月 30 日）
数学 II (13:00 – 14:30)

1. 次の 9 題から 2 題を選択して解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 2 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１.

V を高々2次の実多項式全体からなる $\mathbb{R}[x]$ の線形部分空間とする．実数 p を固定して，$f(x) \in V$ に対し多項式 $Tf(x)$ を

$$Tf(x) = f(px+1)$$

で定める．$f(x)$ に $Tf(x)$ を対応させる写像が V の線形変換であることは認めてよい．この線形変換を T と書く．以下の問いに答えよ．

(1) V の基底 $1, x, x^2$ に関する T の表現行列 A を求めよ．

(2) T が単射でないとき p の値を求めよ．

(3) T が単射である場合に，(1) の A のジョルダン標準形 J を p の値で場合分けして求めよ．ただしジョルダン細胞を並べる順序は問わない．

問題２.

素数 p に対し，$\mathbb{Q}$ の部分環 $R_p := \{ap^k \mid a, k \in \mathbb{Z},\ a \notin p\mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ を考える．R_p の単元群を $R_p^\times$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，R_p が $\mathbb{Q}$ の部分環であることや，$R_p^\times$ が群であることは示さなくてよい．

(1) $R_p^\times = \{up^k \mid u \in \{1, -1\},\ k \in \mathbb{Z}\}$ を示せ．

(2) 環の準同型 $f : R_2 \to R_3$ は存在するかどうかを答えよ．また，その答えが正しいことを示せ．ただし，f は R_2 の乗法単位元を R_3 の乗法単位元に写すものとする．

(3) 群 $R_2^\times$ と $R_3^\times$ は同型かどうかを答えよ．また，その答えが正しいことを示せ．

問題３．

a を正の定数として，関数

$$z = a(x^2 + y^2)$$

のグラフとして与えられる $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S のパラメータ表示を一つ与えよ．

(2) (1) で与えたパラメータ表示を用いて，曲面 S のガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ．

(3) $t > 0$ として，S の z 成分が t 以下の部分を S_t とする．すなわち，

$$S_t = \{(x, y, z) \in S \mid z \leq t\}$$

である．S_t 上でのガウス曲率 K の積分 $\displaystyle\int_{S_t} K\,dA$ を求め，さらに極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{S_t} K\,dA$ の値を求めよ．ただし，dA は S_t の面積素を表すとする．

問題４．

A を距離空間 (X, d) の空でない部分集合とする．A の任意の開被覆が有限部分被覆をもつとき，A は**コンパクト**であるという．以下の問いに答えよ．ただし,「コンパクト」の定義は上記のものに限るとする．

(1) A がコンパクトのとき，A は有界集合であることを示せ．

(2) A がコンパクトのとき，A は閉集合であることを示せ．

問題５．

$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S_1 を $x^2+y^2+z^2=9,\ z>0$ で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S_1 の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ で，z 成分が正となるものを求めよ．

(2) ベクトル場 $\mathbf{a}(x,y,z)=(-2y,x,x+y+z)$ に対して，面積分

$$\iint_{S_1} \mathrm{rot}\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

の値を求めよ．ここで dS は曲面 S_1 の面積素を表すとする．

(3) ベクトル場 $\mathbf{b}(x,y,z)=(xz,yz,z^2)$ に対して，面積分

$$\iint_{S_1} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

の値を求めよ．ここで dS は曲面 S_1 の面積素を表すとする．

問題６．

複素関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy)$ は複素平面全体で正則で，

$$u(x,y)=e^{-y}\cos x, \qquad f(0)=1$$

をみたしている．n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(z)$ を求めよ．

(2) 関数 $\dfrac{f(z)}{z^{2n+1}}$ の $z=0$ を中心とするローラン展開を求めよ．

(3) C を円 $|z|=1$ で向きを正の向き (反時計回り) とするとき，複素線積分 $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z^{2n+1}}\, dz$ の値を求めよ．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\sin\theta}\cos(\cos\theta-2n\theta)\, d\theta$ の値を求めよ．

問題７．

k を実数の定数とする．次の微分方程式の実数値解 $u(t)$ を考える．

$$u''(t) + 2u'(t) + ku(t) = f(t)$$

以下の問いに答えよ．

(1) $k \leq 1$ かつ f が恒等的に 0 のとき，一般解 $u(t)$ を求めよ．

(2) $k \leq 1$ かつ $f(t) = t$ のとき，一般解 $u(t)$ を求めよ．

(3) ω を正の実数とする．$k = \omega^2 + 1$ かつ f が恒等的に 0 のときの解で，$u(0) = 0$ かつ $u'(0) = \omega$ をみたすものを求めよ．

(4) (3) の解を $u(\omega, t)$ とする．極限 $\displaystyle\lim_{\omega \to \infty} \int_0^\infty u(\omega, t)dt$ の値を求めよ．

問題８.

正規言語（regular language）とポンプ補題（pumping lemma，ポンプ定理ともいう）について，以下の問いに答えよ．ただしアルファベット Σ に対し，Σ^* は Σ 上の語（Σ 上の有限列）全体の集合を表す．また，x が語であるとき，その長さを $|x|$ で表す．

(1) 以下の文章がポンプ補題の内容となるように，空欄 $\boxed{\text{ア}}$ にふさわしい文言（あるいは数式）を書け.（答えのみでよい.）

「Σ は有限集合，L は無限集合であり，かつ L はアルファベット Σ 上の正規言語であるとき，次の性質をみたすような，正の整数 r が存在する．L の元 x で，$|x| > r$ をみたすものは，必ず $x = uvw$（$u, v, w \in \Sigma^*$，$|v| \neq 0$，$|uv| \leq r$）と分解できて，以下が成り立つ. $\boxed{\qquad\qquad\text{ア}\qquad\qquad}$
なお，L を受理する決定性有限オートマトンが与えられたとき，上記の定数 r として，このオートマトンの状態数以下の整数をとることができる.」

(2) アルファベット $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ 上の言語 $L_1 := \{0^n 1^{2n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ が正規言語でないことを示せ．必要ならポンプ補題を用いてよい.

問題９．

以下の問いにおいてはプログラム言語として，C 言語，C++，Java，Python の中から一つを選び，それを用いて解答せよ．どの言語を選んだのかを解答中に明記すること．

(1) 昇順に整列済みの２つの配列 b と c がある．配列要素数は同じで n とする．例えば b[]={1,3,5,8}, c[]={2,6,8,10} のとき n=4 である．このように整列された２つの配列を統合（merge）してひとつの整列された配列を作るプログラムを示しなさい．上の例では統合された配列 a は{1,2,3,5,6,8,8,10}となる．プログラムを記述するにあたって整数型配列 b 及び c は配列宣言されて値が格納されていると仮定してよい．またその要素数は変数 n に収められている．統合される配列 a もすでに要素数 2*n で領域は確保されているとする．

(2) (1) と同様な問題を考える．昇順に整列された２つの配列の統合を考えるがこの２つの配列の要素数が異なる場合を取り扱えるように改造したプログラムを示しなさい．要素数の差異，どちらの配列が長いかを問わない一般的な場合について示すこと．プログラムを記述するにあたっての条件は上と同じだが配列 b と c の要素数はそれぞれ nb と nc とする．配列 a は n（=(nb+nc)）の要素数分で領域は確保されているとする．