平成 28 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 28 年 2 月 9 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1. 線形代数, 微分積分 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． $A_n(n \geq 3)$ は n 次正方行列で，対角成分が 2，$(i, i+1)$ 及び $(i+1, i)$ 成分 $(1 \leq i \leq n-1)$ が -1，他の成分はすべて 0 となるような行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\det A_3, \det A_4$ を求めよ．

(2) $\det A_{n+2}$ を $\det A_{n+1}$ と $\det A_n$ を用いて表せ．

(3) $\det A_n$ を求めよ．

問題２． $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V とベクトル $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4$ を

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z + w = 0 \right\}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で定める．f は $\mathbb{R}^4$ の線形変換で，すべての $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ であり，$f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$ であるとする．以下の問いに答えよ．

(1) V の基底を一組求めよ．

(2) (1) で求めた V の基底に $\boldsymbol{w}$ を付け加えたものを $\mathcal{B}$ とする．$\mathcal{B}$ が $\mathbb{R}^4$ の基底であることを示せ．

(3) (2) の基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列を求めよ．

(4) $\mathbb{R}^4$ の標準基底

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に関する f の表現行列を求めよ．

問題３． 以下の問いに答えよ．

(1) 重積分

$$\iint_D y\ dxdy$$

の値を求めよ． ただし，$D = \{(x, y) \mid x \geq y^2,\ y \geq x - 2\}$ とする．

(2) 広義積分

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\ dxdydz$$

の値を求めよ．

(3) 広義積分

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$$

の値を求めよ．

問題４． 関数 $f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で連続で $f(0) = 0$ かつ $x, y \in [0, 1]$ に対して

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

が成り立つとする． 以下の問いに答えよ．

(1) $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$ に対して

$$f\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{2^n}\right) \leq \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(x_n)}{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) $t \in [0, 1]$ のとき，t は

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{2^k}, \quad t_k \in \{0, 1\}$$

と表せることを証明せよ．

(3) $t \in [0, 1]$, $x, y \in [0, 1]$ に対して

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

が成り立つことを証明せよ．

平成 28 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 28 年 2 月 9 日）
数学 II (13:00 – 14:30)

1. 次の 9 題から 2 題を選択して解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 2 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１．

行列

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求め，それぞれの固有空間の基底を一組ずつ求めよ．

(2) A のジョルダン標準形を求めよ．

(3) A の最小多項式を求めよ．それが最小多項式であることも証明せよ．

(4) $A^6 - 34A^4 + 96A^3 - 60A^2$ を計算せよ．

問題２．

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}$$

と定めると，これは行列の積に関して群となる．以下では N を 2 以上の整数とし，整数 a, b に対し $a-b$ が N で割り切れるとき

$$a \equiv b \pmod N$$

と書くことにする．以下の問いに答えよ．

(1)

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

は $SL(2,\mathbb{Z})$ の部分群であること，及び $SL(2,\mathbb{Z})$ の正規部分群ではないことを示せ．

(2)

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N) \;\middle|\; a \equiv 1 \pmod N \text{ かつ } d \equiv 1 \pmod N \right\}$$

は $\Gamma_0(N)$ の正規部分群となることを示せ．

(3) 写像

$$\varphi\colon \Gamma_0(N) \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto [d]$$

を考える．ただし，$[d]$ は d の $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ での剰余類とする．

(a) φ の像は環 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の単元全体の集合 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ と一致することを示せ．

(b) φ は $\Gamma_0(N)$ から $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ への準同型写像を定めることを示せ．

(c) (b) で定めた準同型写像を φ_0 とおく．$\operatorname{Ker} \varphi_0 = \Gamma_1(N)$ であることを示せ．

問題３．

I. 正定数 a, b, r に対し，$\mathbb{R}^2$ 内の楕円 $E_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + by^2 = r^2\}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 平面曲線

$$c_r(t) = \left(\frac{r}{\sqrt{a}}\cos t, \frac{r}{\sqrt{b}}\sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

は E_r のパラメータ表示を与える．

(a) $t = t_0$ における曲線 c_r の単位接ベクトルを求めよ．

(b) c_r の $t \in [0, 2\pi]$ における曲率 $\kappa_{c_r}(t)$ を求めよ．

(c) $r \searrow 0$ および $r \nearrow \infty$ としたとき, $\kappa_{c_r}(t)$ の挙動を調べよ．

(2) 平面曲線

$$\gamma_r(t) = \left(\frac{r}{\sqrt{a}}\cos t, -\frac{r}{\sqrt{b}}\sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

も E_r のパラメータ表示を与える．

(a) γ_r の $t \in [0, 2\pi]$ における曲率 $\kappa_{\gamma_r}(t)$ を求めよ．

(b) $c_r(t) = \gamma_r(t)$ となる $t \in [0, 2\pi]$ を求めよ．またこのとき $\kappa_{c_r}(t)$ と $\kappa_{\gamma_r}(t)$ の関係を述べよ．

II. 空間曲線

$$\bar{c}_r(t) = \left(\frac{r}{\sqrt{a}}\cos t, \frac{r}{\sqrt{b}}\sin t, 1\right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

を考える．このとき $\bar{c}_r$ の $t \in [0, 2\pi]$ における捩率 $\tau_{\bar{c}_r}(t)$ を求めよ．

問題４.

２次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^2$の点列を

$$\mathbf{a}_n = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n}, \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

とする．ただし，$\mathbb{N}$は正の整数全体の集合とする．$A_1 = \{(0,0)\}$，$n \geq 2$に対してはA_nは$\mathbf{a}_n$と原点を結ぶ線分とする． このとき以下の問いに答えよ.

(1) 集合$\{\mathbf{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$が$\mathbb{R}^2$の閉集合ではないことを示せ.

(2) 集合$\{(1,0)\} \cup \{\mathbf{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$が$\mathbb{R}^2$の閉集合であることを示せ.

(3) 集合$\{(1,0)\} \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$の有限部分被覆をもたない無限開被覆を構成せよ.

問題５.

(1) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$で定義されたベクトル場

$$\mathbf{a}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right)$$

の発散を求めよ.

(2) 曲面$x^2 + y^2 + z^2 = 1$の外向き単位法線ベクトル場を$\mathbf{n}$と表す．(1) で定義した$\mathbf{a}(x,y,z)$に対し，面積分

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} \mathbf{a}(x,y,z) \cdot \mathbf{n} dS$$

の値を求めよ． ここで，dSは曲面$x^2+y^2+z^2=1$の面積要素である.

(3) 次の関係式を満たす３つの滑らかな関数$u, v, w : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$は存在しないことを示せ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \ , \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \ , \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \ . \end{aligned}$$

問題６.

原点を中心とする単位円板を D で表す: $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. D 上の関数 f を

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

で定める． 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0, \quad z \in D.$$

(2) f の $z = 0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(3) f が D から $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z = 0,\ \mathrm{Re}\, z \leq -\frac{1}{4}\}$ の上への双正則写像であることを示せ.

問題７.

$0 < \epsilon < 1$ を正の定数とする． 以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式 $-\epsilon^2 u''(x) + u(x) = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $-\epsilon^2 u''(x) + u(x) = e^x$ の一般解を求めよ.

(3) 境界値問題：

$$-\epsilon^2 u''(x) + u(x) = e^x,\ 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 0$$

の解 $u(x)$ を求めよ.

(4) (3) の解を $u_\epsilon(x)$ と書くとき,

$$0 \leq u_\epsilon(x) \leq \frac{1}{1-\epsilon^2} e^x \ (0 \leq x \leq 1)$$

を示せ．また， $0 < x < 1$ に対して， 極限 $\lim_{\epsilon \to 0} u_\epsilon(x)$ を求めよ.

問題８．

非負整数 x と正の整数 d に対して，x を十進表記したときの下から d 桁目までをアルファベット $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 上の語とみなし $f(x,d)$ で表す．x の桁数より d が大きいときは十進表記の先頭に 0 を補う．たとえば $f(1920397,3) = 397$，$f(192,5) = 00192$ とする．また，Σ 上の語 u, v（ただし u の長さは v の長さ以上とする）が与えられたとき，u の中に連続した部分として v が現れる回数を $g(u,v)$ とする．たとえば $g(303034,303) = 2$ である．非負整数 x, y に対して $h(x,y) = g(f(x,10), f(y,3))$ の値を計算するＣ言語の関数

```
int h ( long x, long y )
```

を作成せよ．`long` の代わりに `int` を用いても可とする．Ｃ言語の代わりにＪａｖａまたはＣ＋＋を用いてもよい．ただし，どの言語を選んだかを明示すること．ヘッダファイルのインクルードや名前空間の指定（たとえばＣ言語における `#include <stdio.h>` やＣ＋＋における `#include <iostream>`, `using namespace std;` など）は省略してよい．また，x, y に負の数が入力されたときの動作は気にしなくてよい．

問題９．

以下の問題にＣ言語，C++またはＪａｖａを用いて答えよ．ただし，どの言語を選んだかを明示すること．ヘッダファイルのインクルードや名前空間の指定（たとえばＣ言語における `#include <stdio.h>` やＣ＋＋における `#include <iostream>`, `using namespace std;` など）は省略してよい．

(1) $n!$ は非負整数 n の階乗を意味していて，値は $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ で与えられる．整数 n を引数として与え $n!$ を計算する整数関数 `int fact(int n)` を，選択したプログラム言語の様式にのっとり再帰的呼び出しを使って書き出せ．なお $0! = 1$ である．

(2) 組合せ数 ${}_nC_m$（ここで n, m は非負整数で $n \geq m$，以下同様）は以下の定義で与えられる．

$$
{}_nC_m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.
$$

2 つの整数引数 `n` と `m` を入力値としてとり，この組合せ数を計算する整数関数

`int combi0(int n,int m)` を書き出せ．ここで n の階乗計算 $n!$ には上記の `fact` を用いてもよい．

(3) ${}_nC_m$ はまた以下のようにも定義される．

$$
{}_nC_0 = 1, \quad {}_nC_m = {}_nC_{m-1} \times \frac{n-m+1}{m}, \ (m \geq 1).
$$

この定義に基づく `combi0` と同様な整数関数 `int combi1(int n,int m)` を書き出せ．

(4) ${}_nC_m$ はさらに

$$
{}_nC_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \text{ または } m = n \text{ のとき} \\ {}_{n-1}C_{m-1} + {}_{n-1}C_m & \text{それ以外のとき} \end{cases}
$$

としても定義される．この定義に基づく `combi1` と同様な整数関数

`int combi2(int n,int m)` を書き出せ．