平成28年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成27年9月1日）
数学I (9:30 – 11:30)

1. 線形代数, 微分積分 計4題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は4枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

で定まる $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 $F_A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ について以下の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) F_A の核 $\mathrm{Ker}F_A$ の次元と基底を一組求めよ．

(3) ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{bmatrix}$ が F_A の像に属するような c の値を求めよ．

問題２． $a \in \mathbb{C}$ を定数として，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & a+4 & -a-2 \\ -3 & a+2 & -a \end{bmatrix}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A が対角化可能となるための a に関する必要十分条件を求めよ．

(3) A が対角化可能であるとき，$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を一つ求めよ．また，そのときの $P^{-1}AP$ も求めよ．

問題３．以下の問いに答えよ.

(1) 正の実数 α に対して，無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

の収束・発散を調べよ.

(2) 正の実数 α に対して，広義積分

$$\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$$

の収束・発散を調べよ.

(3) 非負の数列 $a_n,\, n = 1, 2, \ldots$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば，$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ も収束することを示せ.

問題４．関数 $F(x, y)$ を

$$F(x, y) = \cos x + x^2 + \sin y + y - 1$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $F(x, y) = 0$ の定める陰関数 $y = \phi(x)$ が微分可能であるとき，y' を x と y を用いて表せ.

(2) 陰関数 $y = \phi(x)$ の極値を求めよ.

(3) x, y が条件 $F(x, y) = 0$ をみたすとき，y の最大値を求めよ.

平成 28 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）

理工学研究科　数理情報科学専攻

入学試験（平成 27 年 9 月 1 日）

数学 II (13:00 – 14:30)

1. 次の 9 題から 2 題を選択して解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 2 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１.

複素数 t に対して

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく．A のジョルダン標準形にジョルダン細胞 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ が現れるとき，以下の問いに答えよ．

(1) E を 4 次の単位行列とするとき，$A - E$ の階数を求めよ．

(2) A のジョルダン標準形を求めよ．

(3) A の最小多項式 $m_A(x)$ を求めよ．

(4) t の値を求めよ．

問題２.

虚数単位 i に対して，複素数体の部分環

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \ \in \mathbb{Z}\}$$

を考える．写像 $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$ を

$$N(a + bi) = a^2 + b^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

によって定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ に対して，$N(xy) = N(x)N(y)$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\mathbb{Z}[i]$ の元 x が $\mathbb{Z}[i]$ の単元であることと，$N(x) = 1$ となることが同値であることを証明せよ．それを利用して $\mathbb{Z}[i]$ の単元をすべて求めよ．

(3) $\mathbb{Z}[i]$ の任意の元 x に対して，

$$x = (1 + i)y + z \qquad \text{かつ} \quad N(z) < 2$$

をみたす $y, z \in \mathbb{Z}[i]$ が存在することを示せ．

(4) $1 + i$ を含む $\mathbb{Z}[i]$ の極大イデアルは $1 + i$ が生成するイデアル $(1 + i)$ に限ることを証明せよ．

問題３．

$\gamma(u)$ $(u \in \mathbb{R})$ を空間 $\mathbb{R}^3$ 内の以下の条件をみたすなめらかな曲線とする．

(a) 任意の $u \in \mathbb{R}$ に対して，$\gamma'(u) \neq 0$. ただし，$\gamma'(u) = \dfrac{d\gamma}{du}$.

(b) $\gamma(u)$ には曲率が 0 になる点がない．

このとき，空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ を

$$\boldsymbol{p}(u,v) = \gamma(u) + v\gamma'(u), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

と定める．

(1) $\boldsymbol{p}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}$, $\boldsymbol{p}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}$ と定義する．$\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ が一次独立になるような (u,v) 全体のなす $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を求めよ．

(2) D において，曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ のガウス曲率 $K(u,v)$ を求めよ．

(3) D において，曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ の平均曲率 $H(u,v)$ が恒等的に 0 となるための必要十分条件は曲線 $\gamma(u)$ が空間 $\mathbb{R}^3$ 内のある平面に含まれることであることを示せ．

問題４．

以下の問いに答えよ．

(1) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であることの定義を書け．

(2) 任意の距離空間 (X, d) はハウスドルフ空間であることを示せ．

(3) 数直線 $\mathbb{R}$ の部分空間 $[-1,1] \cup [2,4]$ を考える．ただし，$\mathbb{R}$ は通常の位相をもつとする．任意の $x \in [-1,1]$ $(x \neq 0)$ と $x+3 \in [2,4]$ を同一視する．ただし，0 と 3 は同一視しない．X をこの同一視によって $[-1,1] \cup [2,4]$ から得られる商空間とする．このとき，X はハウスドルフ空間でないことを示せ．

問題５.

以下の問いに答えよ.

(1) 積分 $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} y\,dx\,dy\,dz$ の値を求めよ.

(2) 曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ の外向き単位法線ベクトル場を $\mathbf{n}$ と表す. 面積分

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2y^2z^2, xy^3z, x^2y^2z)\cdot\mathbf{n}dS$$

の値を求めよ. ここで, dS は曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ の面積要素である.

問題６.

複素関数 $f(z)=\cosh z\left(=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}\right)$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)=0$ となる z をすべて求めよ.

(2) $R>0$ とし, $-R,\ R,\ R+\pi i,\ -R+\pi i$ を表す複素平面上の点を順に A, B, C, D とする. また, $a\in\mathbb{R}$ として, $g_a(z)=\dfrac{e^{az}}{f(z)}$ とおく. 長方形 ABCD の内部にある g_a の極における留数を求めよ.

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_{-R}^{R} g_a(x)\ dx+\int_{R}^{-R} g_a(x+\pi i)\ dx=2(1+e^{\pi ai})\int_0^R \frac{\cosh ax}{\cosh x}\ dx$$

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cosh\frac{x}{2}}{\cosh x}\ dx$ の値を求めよ.

問題 7.

以下の問いに答えよ.

(1) 次の 2 階線形微分方程式の初期条件をみたす解 $y_0(x)$ を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = -2.$$

(2) 次の 2 階線形微分方程式に対して，以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x.$$

(a) (1) の解 y_0 を用いて $y(x) = u(x)y_0(x)$ とするとき，$u(x)$ がみたす微分方程式を求めよ.

(b) 一般解 $y(x)$ を求めよ.

(c) 一般解 $y(x)$ に対して，極限 $\lim_{x\to\infty} e^{-x}y(x)$ を求めよ.

問題８．

本問でグラフとは，無向単純グラフのことであるとする．すなわち，辺に向きは定めず，各辺はちょうど2つの端点をもち，端点が同じ頂点となる辺（ループ）はなく，複数の辺で同じ端点集合をもつもの（多重辺）もないとする．

各頂点に接続している辺の個数が3であるグラフを「3正則グラフ」とよぶ．例えば，4個の頂点からなる完全グラフ K_4 は3正則グラフである（図1参照）．

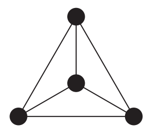

図 1: K_4

G を辺の個数が9である3正則グラフとするとき，以下の問いに答えよ．

(1) G の頂点の集合を V，辺の集合を E とする．関数 $f : V \times E \to \{0, 1\}$ を

$$f(v,e) := \begin{cases} 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではない場合}) \\ 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点である場合}) \end{cases}$$

で定める．和

$$\sum_{(v,e)\in V\times E} f(v,e)$$

を求めよ．

(2) G の頂点の個数を求めよ．

(3) G は K_4 と同型な部分グラフをもたないことを示せ．

(4) 辺の個数が9である3正則グラフのうち同型でないものを2つ挙げよ．

問題９.

以下の問いにおいては「プログラミング言語」として，C 言語，Fortran 言語，Pascal 言語の中からどれか一つを選び，それを用いて解答せよ．どの言語を選んだのかを解答中に明記すること．

(1) 要素が整数で要素数が m の配列を x とする．そのとき整数型の関数 findmax は整数 m と配列 x を引数として全ての x の要素の値のうちから最も大きい値を関数値として返す．ただし，関数の中では配列 x の各要素の値はそれぞれ 1 回ずつ読み出されるだけで，配列 x に値が書き込まれることはないとする．また，x 以外の配列を利用することもないとする．そのような関数 findmax の定義をプログラミング言語で記述せよ．

(2) m と n はそれぞれ整数で値は 0 以上 100 以下とする．そうして p を要素が整数で要素数が m の配列とし，q を要素が整数で要素数が n の配列とする．p および q の要素は絶対値が 100 以下であるとする．そのとき，p の要素と q の要素の順序対 (x, y) のうちで不等式 $y \geq x^2$ を満たすものの個数を求めて返す関数 countpair の定義をプログラミング言語で書け．この関数は引数として順に，整数値 m と n，さらに整数の配列 p と q の情報を，プログラミング言語に沿ったやりかたで渡すとする．

(3) r は 100 未満の正の実数とする．xy 平面内で原点を中心とし半径が r の円周の内側にあり座標がすべて正の整数である格子点の個数を数えてその個数を整数の関数値として返す関数 countgrid の定義をプログラミング言語で記述せよ．関数の引数には実数 r の値を与える．ただし，もしも「引数 r の値が 100 未満の正の実数」という前提条件を満たさない場合は，関数値としては -1 を返すものとする．

注記：通常のプログラミング言語では実数を有限の精度で近似した値で表している．しかし本問題の解答としてはあたかも実数の演算や比較が厳密にできるかのようにプログラムを書いてもよいことにする．