平成 27 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 27 年 2 月 12 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1. 線形代数, 微分積分 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を単調非減少関数とし，$M = f(1) - f(0)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 各 $x \in (0,1)$ に対し，$f(x+0) - f(x-0) \leq M$ が成り立つことを示せ．ただし，$f(x+0)$, $f(x-0)$ はそれぞれ関数 f の点 x における右極限, 左極限を表す．

(2) 自然数 n に対し，

$$A_n = \left\{ x \in (0,1) \;\middle|\; f(x+0) - f(x-0) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

とおく．A_n は有限集合であり，A_n の元の個数は nM 以下であることを示せ．

(3) f は不連続点 $x_0 \in (0,1)$ を持つとする．このとき，$x_0 \in A_n$ を満たす自然数 n が存在することを示せ．

問題２． 以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle \lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy$ を求めよ．
ここで，$D_\varepsilon = \{(x,y) \mid (x,y) \in [0,1]^2$ かつ $(x,y) \notin [0,\varepsilon)^2\}$ とする．

問題３． 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(3) 自然数 n について A^n の $(3,3)$ 成分を n を用いて表せ．

問題４． $t \in \mathbb{R}$ を定数とする. $\mathbb{R}^3$ の線形変換 f_t を

$$f_t : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

で定義するとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ の標準基底

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に関する f_t の表現行列 A_t を求めよ.

(2) $\mathrm{rank}(f_t)$ を求めよ. ただし, 必要があれば t の値によって場合分けすること.

(3) $\mathrm{rank}(f_t) < 3$ を満たす各 $t \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathrm{Ker}(f_t)$ の基底を一組求めよ.

平成 27 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 27 年 2 月 12 日）
数学 II (13:00 − 14:30)

1. 9 題から 2 題を選択して解答しなさい．

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4. 試験終了後, 答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１. $\mathbb{R}^4$ を標準内積により計量線形空間とみなす. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ の両方に直交するベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ の全体を W とする. 以下の問いに答えよ.

(1) W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ.

(2) W の正規直交基底を一組求めよ. ただし, W における内積は $\mathbb{R}^4$ の内積を制限したものとする.

(3) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の W への正射影を求めよ.

問題２. 以下の問いに答えよ.

(1) k は $1 \leq k \leq 4$ を満たす整数とする.

$$k^3 \equiv 1 \pmod 5$$

ならば, $k = 1$ であることを示せ.

(2) G は群とする. g_1, g_2 は G の元で g_1 の位数は 3, g_2 の位数は 5 とする. 1 以上 4 以下の整数 k が存在して $g_1^{-1} g_2 g_1 = g_2^k$ が成り立つと仮定する.

(i) $k = 1$ であることを示せ.

(ii) g_1, g_2 で生成される G の部分群 $\langle g_1, g_2 \rangle$ が位数 15 の巡回群であることを示せ.

問題 3. Σ を各項が 0 または 1 であるような無限列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots)$ の全体からなる集合とする. Σ 上の距離 d を

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots) \in \Sigma)$$

で定義する. また, $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ に対し, $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ となる Σ の点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots)$ 全体からなる, Σ の部分集合を $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ の直径 $\mathrm{diam}(\Sigma_{a_1,\dots,a_n}) = \sup\{d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Sigma_{a_1,\dots,a_n}\}$ を求めよ.

(2) Σ の任意の無限点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, 単調減少列

$$\Sigma_{a_1} \supset \Sigma_{a_1,a_2} \supset \cdots \supset \Sigma_{a_1,\dots,a_i} \supset \Sigma_{a_1,\dots,a_i,a_{i+1}} \supset \cdots$$

で, 各 i に対し, $\{n \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{x}_n \in \Sigma_{a_1,\dots,a_i}\}$ が無限集合であるようなものが存在することを示せ.

(3) Σ は点列コンパクトである（すなわち Σ の任意の無限点列は収束する部分列を持つ）ことを証明せよ.

問題 4. $\mathbb{R}^3$ 内において, パラメータ (u, v) を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

と表された曲面を S とする. ただし, $x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)$ は C^2 級関数とする.

$$\boldsymbol{x}_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right), \ \boldsymbol{x}_v = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}\right)$$

とし, 各 (u, v) に対し, ベクトル $\boldsymbol{x}_u(u, v), \boldsymbol{x}_v(u, v)$ は 1 次独立であると仮定する. $\boldsymbol{x}$ の 2 階の偏微分 $\boldsymbol{x}_{uu}, \boldsymbol{x}_{uv}, \boldsymbol{x}_{vu}, \boldsymbol{x}_{vv}$ を同様に定める. 以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の標準内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と表したとき,

$$(\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u)(\boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_v) - (\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v)^2 > 0$$

となることを証明せよ.

(2) $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}(u, v)$ を点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ における S の単位法線ベクトルとし, S の点 $\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ において $(\boldsymbol{x}_{uu} \cdot \boldsymbol{N})(\boldsymbol{x}_{vv} \cdot \boldsymbol{N}) - (\boldsymbol{x}_{uv} \cdot \boldsymbol{N})^2 > 0$ かつ $\boldsymbol{x}_{uu} \cdot \boldsymbol{N} > 0$ が成り立つと仮定する. このとき, ある正数 ε が存在して, $(u, v) \neq (u_0, v_0)$ かつ $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 < \varepsilon$ を満たす任意の (u, v) に対して

$$(\boldsymbol{x}(u, v) - \boldsymbol{x}(u_0, v_0)) \cdot \boldsymbol{N}(u_0, v_0) > 0$$

が成り立つことを証明せよ.

問題 5.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < -x(x-2)(x-4)^2\}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) D の面積を求めよ.

(2) D の境界に正の向きを付けたものを C とおく. 線積分 $\displaystyle\int_C y^2 dx + 4x dy$ の値を求めよ.

問題 6. 複素関数に関する以下の問いに答えよ.

(1) $f(z) = |z|^2$ とおく. 全ての $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, f は点 a で複素微分不可能であることを示せ.

(2) 原点を中心とする半径 1 の円に正の向きを付けたものを C とする. 線積分

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z^2}\, dz$$

の値を求めよ.

(3) r, M を正定数とする. 関数 f が閉円板 $|z| \leq r$ を含むある開集合で正則で, 円 $|z| = r$ 上で $|f(z)| \leq M$ ならば, 全ての非負整数 n に対し,

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!\,M}{r^n}$$

が成り立つことを示せ.

問題 7. $a > 0$ を定数として, 以下の問いに答えよ.

(1) 次の初期値問題の解を求めよ. また, $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} y(t)$ および $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t)$ の値を求め, $y(t)$ のグラフの概形を描け.

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{\dfrac{a}{2}}\,(1 - y(t)^2) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(2) 次の初期値問題の解を求めよ.

$$\begin{cases} y''(t) + a\,(y(t) - y(t)^3) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{\dfrac{a}{2}} \end{cases}$$

問題８． アルファベット $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ 上で, 次のような有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\}\rangle$ を考える.

状態の集合 $Q = \{q_0, q_1\}$

初期状態 q_0

受理状態の集合 $\{q_1\}$

状態遷移関数 $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

$\delta(q_0, 0) = q_0$，$\delta(q_0, 1) = q_1$，$\delta(q_0, 2) = q_0$，$\delta(q_1, 0) = q_1$，$\delta(q_1, 1) = q_1$，$\delta(q_1, 2) = q_1$

(1) M の状態遷移図を描け. 理由の説明は不要である.

(2) Σ 上の語のうち, M によって受理され, かつ長さが 6 であるものはいくつあるか求めよ. 導き方のあらましも述べること.

(3) M と等価な正規文法（regular grammar）G の例を一つ与えよ. 等価であることの証明は不要である.

(4) (3) で答えた G において語 0120 を生成する過程を示せ.

問題９． 有理係数の k 次多項式 $P_k(x)$ が $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, 漸化式

$$kP_k(x) = (2k-1)xP_{k-1}(x) - (k-1)P_{k-2}(x) \quad (k \geq 2)$$

により定義されているものとする.

C 言語で記述された関数 `evalpolys` は関数値を返さない関数であって, その仮引数は 3 個あり, それらは順に, 倍精度浮動小数点型の `x`, 整数型の `n`, 倍精度浮動小数点型の配列 `p` であるとする. 関数 `evalpolys` は呼び出されると, 上記の関係を用いて `x` における次数 `n` 以下の全ての多項式の値 $P_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots,$ `n` を倍精度浮動小数点計算により求めて, その結果を配列 `p` の先頭から `n` $+ 1$ 個の要素へ順番に格納する. ただし, 引数 `n` の値が負のときには配列 `p` には何も格納しない.

以上の処理を行なう関数 `evalpolys` の定義を C 言語で記述せよ. また, C 言語の代わりに Java または C++を用いてもよい. ただし, どの言語を選んだかを明示すること.