平成 27 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 26 年 9 月 2 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1. 線形代数, 微分積分 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． 以下の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を収束する実数列とする．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界数列であることを示せ．

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を収束する実数列とする．数列 $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ．

(3) a, m を実数, δ を正の実数とし, $I = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ とおく．f を I 上で定義された実数値関数とする．次の条件 (i), (ii) が同値であることを示せ．

(i) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = m$

(ii) $a_n \in I \ (n = 1, 2, \ldots)$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たす全ての実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n) = m$ が成り立つ．

問題２． $f(t)$ を区間 $[0, \infty)$ 上で定義された C^1 級関数とする．以下の問いに答えよ．ただし $0 < a < b$ かつ $n > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^n \left(\int_a^b f'(xy)dy \right) dx = \int_0^n \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\displaystyle\int_a^b \left(\int_0^n f'(xy)dx \right) dy = \int_a^b \frac{f(ny)}{y} dy - f(0) \log \frac{b}{a}$ が成り立つことを証明せよ．

(3) さらに $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ のとき

$$\int_0^{\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = -f(0) \log \frac{b}{a}$$

が成り立つことを証明せよ．

問題３． $a+b+c \neq 0$ を満たす定数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ について

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & 2b+2c & 2c+2a & 2a+2b \end{pmatrix}$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det A$ が 0 となるための, a, b, c に関する必要十分条件を求めよ.

(2) A の階数が 3 となるための, a, b, c に関する必要十分条件を求めよ.

(3) $\det A = 0$ かつ $a \neq b$ であるとき, 連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解空間の基底と次元を求めよ.

問題４． $t \in \mathbb{R}$ を定数とする. $\mathbb{R}^3$ の線形変換 f_t と $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_t をそれぞれ

$$f_t : \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \det(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}_t) \\ \det(\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{d}_t) \\ \det(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}_t\,\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad W_t = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_t \rangle \cap \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}_t \rangle$$

で定義するとき, 以下の問いに答えよ. ただし,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{d}_t = \begin{pmatrix} t+3 \\ t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}$$

とし, $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \rangle$ はベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ によって生成される部分空間を表す.

(1) $W_t \subset \mathrm{Ker}(f_t)$ が成り立つことを示せ.

(2) 次の条件を満たす行列 A_t を求めよ：全ての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し $f_t(\boldsymbol{x}) = A_t\boldsymbol{x}$ が成り立つ.

(3) $\mathrm{Ker}(f_t)$ の次元が 2 であるような $t \in \mathbb{R}$ を全て求めよ.

(4) 全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して $W_t = \mathrm{Ker}(f_t)$ が成り立つかどうか, 理由とともに答えよ.

平成 **27** 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 **26** 年 **9** 月 **2** 日）
数学 **II (13:00 – 14:30)**

1. **9** 題から **2** 題を選択して解答しなさい**.**

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること**.**

3. 全ての答案用紙に**,** 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること**.**

4. 試験終了後**,** 答案用紙は **2** 枚とも提出すること**.** 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること**.**

問題1. 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 7 & -3 & -11 \\ -5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし行列の成分は複素数の範囲で考える．

(1) A の固有値と固有空間の基底を求めよ．

(2) A のジョルダン標準形を求めよ．

(3) $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^3$ とし，漸化式 $\boldsymbol{x}_n = \dfrac{1}{2}A\boldsymbol{x}_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ により帰納的に $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{C}^3$ を定める．$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ となるための $\boldsymbol{x}_0$ の条件を求めよ．

問題2. $\mathbb{Q}(x)$ は x を変数とし，有理数を係数とする有理式全体のなす体とする．集合 R を

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{Q}(x) \,\middle|\, f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x] \text{ は互いに素で，} g(x) \text{ は } x^2+1 \text{ で割り切れない} \right\}$$

と定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) R は $\mathbb{Q}(x)$ の部分環であることを示せ．

(2) $\mathbb{Q}[x]$ の元 $f(x)$, $g(x)$ がともに x^2+1 で割り切れなければ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は R の単元になることを示せ．逆に R の任意の単元はこのような形に表せることを示せ．

(3) x^2+1 で生成される R のイデアルを $\langle x^2+1\rangle_R$ で表す．このとき，R における $\langle x^2+1\rangle_R$ の補集合 $R \setminus \langle x^2+1\rangle_R$ は R の単元全体と一致することを示せ．

(4) $\langle x^2+1\rangle_R$ は R の極大イデアルであることを示せ．

(5) M を R の任意の極大イデアルとする．M は $\langle x^2+1\rangle_R$ に一致することを示せ．

問題３． (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) a_0,a_1,b_0,b_1 を実数とするとき,

$$\max\{a_0+b_0,a_1+b_1\}\le\max\{a_0,a_1\}+\max\{b_0,b_1\}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 関数 $d:(X\times Y)\times(X\times Y)\to\mathbb{R}$ を

$$d((x_0,y_0),(x_1,y_1))=\max\{d_X(x_0,x_1),d_Y(y_0,y_1)\}$$

で定義する. d は $X\times Y$ 上の距離関数であることを示せ.

(3) $X\times Y$ の部分集合 W が距離空間 $(X\times Y,d)$ の開集合であるための必要十分条件は, W の任意の点 (x,y) に対し, $(x,y)\in U\times V$ かつ $U\times V\subset W$ を満たす (X,d_X) の開集合 U と (Y,d_Y) の開集合 V が存在することである. これを示せ.

問題４． M を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $z=-x^2-y^2$ とし, M の点を $\boldsymbol{p}(x,y)=(x,y,-x^2-y^2)$ により表す. M の点 $\boldsymbol{p}$ における単位法ベクトルで, z 成分が正のものを $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{p}}$ とする. $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を $\varphi(x,y)=\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{p}(x,y)}$ で定める. また, M と平面 $z=-1$ との交わりを C とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\varphi(x,y)$ を求めよ.

(2) ベクトル $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$ と $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$ の外積 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$ を求めよ.

(3) 点 $\boldsymbol{p}(x,y)$ における M のガウス曲率 K を求めよ.

(4) 曲線 C の曲率を求めよ.

(5) 曲線 C を, 弧長パラメータを用いて $\gamma(s)$ で表す. $T_{\gamma(s)}M$ を点 $\gamma(s)$ における M の接平面とする. $\gamma''(s)$ を $T_{\gamma(s)}M$ に正射影して得られるベクトルのノルムを求めよ.

問題５．以下の問いに答えよ．

(1) 球の境界 $S\colon x^2+y^2+z^2=16$ 上の外向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ で表し, $d\sigma$ を面積要素とする．積分

$$\iint_S (x^3, xyz, z^3)\cdot \mathbf{n}(x,y,z)\, d\sigma(x,y,z)$$

の値を求めよ．ただし $\cdot$ は内積を表す．

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の三角形領域

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<1,\, 0<y<x\}$$

の境界に正の向きを付けたものを C で表す．線積分

$$\int_C (x^2+y^3)\,dx + (x^3-y^2)\,dy$$

の値を求めよ．

問題６．以下の問いに答えよ．

(1) $\cos\pi z = 0$ を満たす複素数 z を全て求めよ．

(2) 関数

$$f(z)=\frac{\tan\pi z}{z^2+\dfrac{3}{4}}$$

を考える．また, n を自然数とし, 4 つの複素数 $n+ni$, $-n+ni$, $-n-ni$, $n-ni$ を頂点とする複素平面上の正方形の周に正の向きを付けたものを C とおく．C で囲まれる正方形の内部にある $f(z)$ の全ての極と, その極における留数を求めよ．

(3) f と C を (2) の通りとし, $S_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n-1}\frac{1}{k^2+k+1}$ とおく．$\displaystyle\int_C f(z)dz$ を S_n を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+k+1}$ の値を求めよ．

問題７． $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．各成分が, 与えられた実数値連続関数であるようなベクトル値関数 $\mathbf{f}(t)$ および初期ベクトル $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して, 次の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

ここで

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

である．このとき以下の問いに答えよ.

(1) 上記の行列 A と実数 t に対して, 指数関数行列 e^{tA} を求めよ.

(2) 解が次の公式で表されることを証明せよ.

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA}\mathbf{u}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{f}(s)\,ds$$

(3) 関数 $\mathbf{f}(t)$ は $\mathbf{f}(t + 2\pi) = \mathbf{f}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ を満たすものとする．上記の解 $\mathbf{u}(t)$ が周期 2π の周期解となるための $\mathbf{f}(t)$ に関する必要十分条件を求めよ.

問題８． 以下の問いに答えよ.

(1) 方程式 $x + y + z = 30$ を満たす非負整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ．

(2) 不等式 $x + y + z \leq 30$ を満たす非負整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ．

(3) 方程式 $x + y + z = 40$ を満たす整数の組 (x, y, z) で，$2 \leq x \leq 14$, $3 \leq y \leq 18$, $5 \leq z \leq 25$ を満たすものの個数を求めよ．

問題９． 非負整数 a に対し, $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{n-1}$ $(0 \leq a_n \leq 9)$ を満たす整数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．たとえば $a = 192$ のとき $a_1 = 2, a_2 = 9, a_3 = 1, a_n = 0$ $(n \geq 4)$ である．以下の問いに答えよ.

(1) 非負整数 a と正の整数 n に対して a_n を出力するＣ言語の関数

```
int f ( unsigned int a, unsigned int n )
```

を作成せよ．$n = 0$ のときは a の値に関わらず 0 を出力するものとする.

(2) 上の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調非増加のとき 1 を, そうでないとき 0 を出力するＣ言語の関数

```
int g ( unsigned int a )
```

を作成せよ．上記小問の `f` を呼び出してもよい.

なお (1), (2) のいずれにおいても, 再帰呼び出しを用いてもよい．また, Ｃ言語の代わりにＪａｖａまたはＣ＋＋を用いてもよい．ただし, どの言語を選んだかを明示すること．ヘッダファイルのインクルードや名前空間の指定（たとえばＣ言語における `#include <stdio.h>` やＣ＋＋における `#include <iostream>, using namespace std;` など）は省略してよい.