平成 26 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 26 年 2 月 12 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1. 線形代数, 微分積分 計４題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． A を $\mathbb{R}$ 上の n 次正方行列で, $A^2 = A$ を満たすとする．このとき以下の問いに答えよ.

1. A の固有値は 0 または 1 になることを示せ.
2. A が零行列でも単位行列でもないとき, $A^2 = A$ を満たす行列を一つ求めよ.
3. 1. の行列 A は対角化可能であることを示せ.

問題２． 2 次形式 $f = 14x^2 + 14y^2 + 2z^2 - 8xy + 16xz + 16yz$ について以下の問いに答えよ.

1. f を実対称行列 A とベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を用いて $f = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表すとき, A の固有値を求めよ.
2. 直交行列 P で ${}^tPAP$ が対角行列になるものを求めよ.
3. f の直交標準形を求めよ.

問題３． 以下の問いに答えよ.

1. 関数 $f(x)$ が 0 を含む開区間 (a, b) で n 回連続微分可能のとき, $f(x)$ のマクローリンの定理をかけ（ただし, 剰余項は $\theta\,(0 < \theta < 1)$ を用いて表すこと).
2. $x > 0$ において次の不等式がなりたつことを示せ.

$$1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots - \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} < e^{-x} < 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

3. 2 変数関数 $g(x, y) = \cos(x + 3y^2)$ のマクローリン級数の xy^2, xy^3, x^4, y^4 の係数を求めよ.

問題4．以下の問いに答えよ.

1. $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx \ (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ とおく. このとき, 任意の $n \geq 2$ に対し,

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & (n\,\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3} & (n\,\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことを証明せよ.

2. 任意の自然数 n に対し, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\left\{\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left\{\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}^2 \frac{1}{2n}$$

3. $\pi = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{16^n (n!)^4}{n\{(2n)!\}^2}$ を示せ.

平成 26 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 26 年 2 月 12 日）
数学 II (13:00 – 14:30)

1. 次の 9 題から 2 題を選択して解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 2 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． 次の行列について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. A の固有多項式を求めよ.
2. A の最小多項式を求めよ.
3. A の各固有値に対し, 固有空間の次元を求めよ.
4. A のジョルダン標準形を一つ求めよ.

問題２． R は積に関する単位元を含む可換環とし, I, J は R のイデアルとする.

$$\begin{aligned} IJ &= \text{集合 } \{xy \mid x \in I, y \in J\} \text{ で生成されたイデアル} \\ M_{IJ} &= \{xy \mid x \in I,\, y \in J\} \\ I + J &= \{x + y \mid x \in I,\, y \in J\} \end{aligned}$$

と定義する. このとき以下の問いに答えよ.

1. $I + J$ は R のイデアルとなることを示せ.
2. I, J がともに単項イデアルならば, $M_{IJ} = IJ$ となることを示せ.
3. I, J がともに単項イデアルという仮定を除いたとき, $M_{IJ} = IJ$ は成り立つか？ 成り立つのであれば, これを証明し, そうでない場合は反例を挙げよ.
4. $I + J = R$ が成立するとき, $IJ = I \cap J$ が成り立つことを示せ.

問題３． 任意の自然数 n に対し, $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を以下で定義する.

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

このとき以下の問いに答えよ.

1. $\mathcal{O}$ が $\mathbb{N}$ の位相を定めることを示せ.
2. 位相空間 $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ が連結であることを示せ.

3. 位相空間 $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ がコンパクトでないことを示せ.

問題４. 以下の問いに答えよ.

1. $\mathbb{R}^3$ 内の連結な曲線 C の各点 p において, p を通り p における C の速度ベクトルに垂直な平面が $\mathbb{R}^3$ の原点を通るとき, C はある球面に含まれることを証明せよ.
2. $\mathbb{R}^3$ 内の連結な曲面 S の各点 p において, p を通り p における S の接平面に垂直な直線が $\mathbb{R}^3$ の原点を通るとき, S はある球面に含まれることを証明せよ.

問題５. 以下の問いに答えよ.

$\mathbb{R}^3$ の閉領域 D を

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

と定める．ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (-x, y, z)$ とおく．D の境界を S として, S 上の面積分

$$\iint_S \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ここで, $\boldsymbol{n}$ は S 上の外向き単位法線ベクトルで, dS は S 上の面積要素を表す．

問題６. $\mathbb{C}$ 上の関数 φ を

$$\varphi(z) = e^{-z^2}$$

で定める. $R > 0$ とし, 曲線 $C_{j,R}$ $(j = 1, 2, 3)$ を

$$\begin{aligned}
C_{1,R} &: [0, R] \ni t \longmapsto t \in \mathbb{C}, \\
C_{2,R} &: [0, \pi/4] \ni \theta \longmapsto Re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \\
C_{3,R} &: [0, R] \ni t \longmapsto e^{\frac{\pi}{4}i}(R - t) \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

で定め,

$$C_R = C_{1,R} + C_{2,R} + C_{3,R}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

1. 積分路 C_R を図示せよ.

2. 線積分

$$\int_{C_R} \varphi(z)\,dz$$

の値を求めよ.

3. 等式

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_{2,R}} \varphi(z)\,dz = 0$$

が成り立つことを示せ.

4. 広義積分

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$$

の値を求めよ.

問題７． 以下の問いに答えよ.

1. 次の連立微分方程式の解を求めよ.

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t) - 3v(t), \quad \frac{dv(t)}{dt} = 2u(t) - 4v(t), \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0$$

2. 次の連立微分方程式の解が時間大域的に存在するとする.

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t) - u(t)^3 - 3v(t), \quad \frac{dv(t)}{dt} = 2u(t) - 4v(t), \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0$$

このとき, $W(t) = u(t)^2 + \frac{3}{2}v(t)^2$ に対して,

$$\frac{dW(t)}{dt} \le -2W(t) + 2 \qquad (t \ge 0)$$

が成り立つことを示せ.

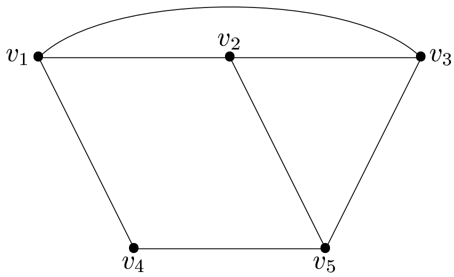
3. 2. の解 $u(t), v(t)$ に対して

$$u(t)^2 + \frac{3}{2}v(t)^2 \le 1 \qquad (t \ge 0)$$

が成り立つことを示せ.

問題８． 本問ではグラフとして, 無向グラフかつ単純グラフ（多重辺やループを持たないグラフ）であるもののみを扱う．頂点集合 V と辺集合 E からなるグラフ $G=(V,E)$ を考える．頂点の列 $W=(v_1,\ldots,v_n)$ に対し, 辺 $v_{i-1}v_i$ $(2\leq i\leq n)$ がすべて E に属するとき, W を v_1 から v_n への歩道 (walk) といい, $n-1$ を歩道 W の長さという．グラフ G の歩道 $W=(v_1,\ldots,v_n)$ がオイラー回路 (Euler circuit) であるとは, 辺 v_1v_2, v_2v_3, $\ldots$, $v_{n-1}v_n$ が E のすべての要素をちょうど 1 度ずつ含み, $v_1=v_n$ となることである．

下図のグラフ G について, 以下の問いに答えよ．



1. グラフ G の隣接行列 A を求めよ．ただし, A の第 i 行, 第 i 列が頂点 v_i に対応するものとする．
2. 頂点 v_1 から頂点 v_5 への長さ 3 の歩道の数を求めよ．
3. 頂点 v_1 から頂点 v_5 への長さ 4 以下の歩道の数を求めよ．
4. グラフ G はオイラー回路を持つかどうか, 理由とともに答えよ．

問題９． 以下の問いに答えよ．

ただし, 各設問の文章中における「プログラム言語」には `C`，`Pascal`，`Java`，`Fortran` のなかから一つを選び, 解答にはどの言語を選択したのかも併せて記述すること．

各設問では, 指示された関数の定義を 1 個だけ書き, それ以外の関数を利用したりマクロ処理系の機能を使わないこと．

プログラムでは, 関数の引数である配列は処理の過程で要素の値を変更しないこと．また, 引数として与える以外の配列を用いないこと．

プログラム中で実数のデータや変数を用いる場合に, 使用するプログラム言語に複数種類の実数型があるならば, そのどれか一種類を適切に選んで記述せよ．

1. 関数 `mon1` の引数は順番に, 整数 m, 要素の個数が m の実数の配列 a, 実数 x の 3 個であるとする．この関数は呼び出されると, 値が x 以上である配列 a の要素の個数を

求めて, その整数値を関数値として返す．このような仕様を満たす関数 `mon1` の定義をプログラム言語で記述せよ．

2. 関数 `mon2` の引数は順番に, 整数 n, 要素の個数が n の整数の配列 b の 2 個であるとする．この関数は呼び出されると, 配列 b のすべての要素の値の中に重複するものがあれば整数値 1 を, 重複するものがなければ整数値 0 を関数値として返す．このような仕様を満たす関数 `mon2` の定義をプログラム言語で記述せよ．

3. 関数 `mon3` の引数は順番に, 整数 n, 要素の個数が n の整数の配列 c, 整数 x の 3 個であるとする．この関数は呼び出されると, x よりも大きい値を持つ c の要素のうちで値が最小のものに対する添字 k （もしも該当する添字が複数ある場合にはそれらのうちで最小のもの）を求めて, それを関数値として返す．あるいはそのような添字が存在しない場合には関数値として -1 を返す．このような仕様を満たす関数 `mon3` の定義をプログラム言語で記述せよ．

4. 関数 `mon4` の引数は順番に, 整数 k, 要素の個数が k の整数の配列 f の 2 個であるとする．この関数は呼び出されると, 配列 f の要素の値には異なるものが何種類あるのかを調べて, その数 s を関数値として返す．このような仕様を満たす関数 `mon4` の定義をプログラム言語で記述せよ．