平成 26 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 25 年 9 月 3 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1. 線形代数, 微分積分 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１．

1. 次の連立一次方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + \ \ x_3 + 8x_4 &= \ 0 \\ \ \ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= \ 0 \\ \ \ x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 + 4x_4 &= \ 0 \end{cases}$$

2. V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を V の k 個の元とする．次の問いに答えよ．

   (a) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立であることの定義を与えよ．

   (b) $k \geq 2$ とし, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立であるとき, 次のベクトルの組が一次独立であるかどうか答えよ．

      (i) $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} + \boldsymbol{a}_k$

      (ii) $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} + \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_1$

      (iii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i$

問題２．

1. A は複素数を成分とする n 次正方行列とする．A の固有ベクトルの定義を書け．

2. 行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対し, $P^{-1}BP$ が対角行列になるように, 正則行列 P を求めよ．さらに $P^{-1}BP$ も求めよ．

3. c を複素数とするとき, 行列 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ が対角化可能であることを示せ．

4. a, b, c を複素数とする．行列 $D = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ が対角化可能ならば, $a = b = 0$ であることを示せ．

問題３.

1. 開区間 $(0,1)$ 上の連続関数 $f(x) = 1/x$ に対して, 各 $x \in (0,1)$ において, 正の数 $\varepsilon < 1/2$ が任意に与えられたとき,

$$|h| < \delta,\ x+h \in (0,1) \Longrightarrow |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

をみたすような正数 $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ をひとつ求めよ.

2. 開区間 $(0,1)$ 上の連続関数 $f(x) = x^2$ に対して, 各 $x \in (0,1)$ において, 正の数 $\varepsilon < 1/2$ が任意に与えられたとき,

$$|h| < \delta,\ x+h \in (0,1) \Longrightarrow |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

をみたすような正数 $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ をひとつ求めよ.

3. 閉区間 $[a,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$ が, この区間で一様連続であることの定義を述べよ.

4. 導関数が閉区間 $[a,b]$ 上で連続となるような関数は一様連続であることを示せ.

問題４. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ を

$$\mathbb{R}^2_{\geq 0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

で定義する. さらに, 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ の部分集合 D_n, Δ_n を

$$D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \,|\, x^2 + y^2 \leq n^2\},\ \Delta_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \,|\, x \leq n,\ y \leq n\}$$

で定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

1. $\{D_n\}$ が, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ をみたす単調増大列であることを利用して,

$$\iint_{\mathbb{R}^2_{\geq 0}} 3^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

の値を求めよ.

2. $\{\Delta_n\}$ が, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ をみたす単調増大列であることを利用して,

$$\int_0^{\infty} 3^{-x^2} dx$$

の値を求めよ.

平成26年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成25年9月3日）
数学II (13:00 – 14:30)

1. 次の9題から2題を選択して解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. 全ての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は2枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． a を複素数とする. 次の行列について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} -2a-3 & a+1 & 0 \\ -6a-12 & 3a+4 & 0 \\ -2a+10 & a-3 & -1 \end{bmatrix}$$

1. A の固有多項式を求めよ.
2. A が対角化可能であるための, a に関する必要十分条件を求めよ.
3. A のジョルダン標準形を一つ求めよ. ただし, 必要に応じて a の値に関する場合分けを行うこと.

問題２． G は群, N は G の部分群とする. 以下の問いに答えよ.

1. (i) N が G の正規部分群であることの定義を与えよ.
   (ii) N が G の正規部分群ではないような群 G と N の例を与えよ.
2. H を G の部分群とし, $HN = \{hn \in G \mid h \in H,\ n \in N\}$ と定める.
   (i) N が G の正規部分群であるとき, HN は G の部分群となることを示せ.
   (ii) N が G の正規部分群でない場合, HN は G の部分群となるかどうか答えよ. もし, HN が部分群となる場合は証明し, そうでない場合は反例を挙げよ.
   (iii) 2 つの条件
   - $G = HN$,
   - $H \cap N = \{e\}$ (e は G の単位元を表す)

   をみたすとき, G の任意の元 g は $g = hn$ $(h \in H, n \in N)$ と一意的に表わせることを示せ.

問題３． 以下の問いに答えよ.

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

と定義する.

1. d, e はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数になることを示せ.

2. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対し,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq 2d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成立することを示せ.

3. 距離関数 d, e が定める $\mathbb{R}^2$ の開集合族をそれぞれ $\mathcal{O}_d, \mathcal{O}_e$ で表すとき, $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_e$ であることを示せ.

問題４. xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ において, xz 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線

$$\gamma(s) = (f(s), 0, g(s))$$

を z 軸のまわりに回転してできる曲面を S とする. ただし, $f(s)$, $g(s)$ はなめらかな関数であり, $f(s) > 0$ とし, s は曲線 $\gamma(s)$ の弧長パラメータであるとする. このとき以下の問いに答えよ.

1. 曲面 S のパラメータ表示を一つ与えよ.
2. 1. で与えたパラメータ表示を使って, 曲面 S の第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N を求めよ.
3. 1. で与えたパラメータ表示を使って, 曲面 S のガウス曲率 K を求めよ.
4. $K = 0$ であるならば, S は円柱面, 円錐面, 平面のいずれかの一部になることを示せ.

問題５. $\mathbb{R}^3$ 上の閉領域 V_1, V_2 を次の式で定める.

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$
$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z \leq -8\}$$

V_1 の境界と V_2 の境界の共通部分を C とする. このとき以下の問いに答えよ.

1. C は円であるが, その円の中心, 半径および C を含む平面の方程式を求めよ.
2. ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ と定める. $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}(x, y, z)$ を求めよ.
3. z 軸の正の側から見て反時計回りの向きを C に入れる. C に沿った線積分

$$\int_C \mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{r}$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルとする.

問題６． $z = e^{i\theta}$ (i は虚数単位, $-\pi \leq \theta \leq \pi$), a を $0 < |a| < 1$ をみたす複素数とする．以下の問いに答えよ.

1. $\cos\theta$, $\cos 2\theta$ を z の式で表せ.
2. $\dfrac{\cos 2\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$ を z で表した式を $f(z)$ とする．$\dfrac{f(z)}{z}$ の極のうち, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ に含まれるものを求めよ.
3. 2. の極における $\dfrac{f(z)}{z}$ の留数を求めよ.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$ を a の式で表せ.

問題７． 以下の問いに答えよ.

1. 次の 2 階線形微分方程式の初期条件を満たす解を求めよ.
   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dfrac{dy}{dx}(0) = -4$
   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad \dfrac{dy}{dx}(0) = 3$
2. 次の 2 階線形微分方程式を考える.
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^3$$
   (a) 3 次式の形をした特殊解 $y_0(x)$ を求めよ.
   (b) 初期条件 $y(0) = -1$, $\dfrac{dy}{dx}(0) = 2$ を満たす解を求めよ.

問題８． 整数 x, y, z が与えられたとき, 集合 $\{x, y, z\}$ のベキ集合の濃度 (要素の個数) を $f(x, y, z)$ で表す．以下の問いに答えよ.

1. $f(0, 0, 0)$ の値を求めよ.
2. 集合 $\{x, y, z\}$ の濃度を m とするとき, m の関数として $f(x, y, z)$ を表せ.
3. 整数 x, y, z に対して $f(x, y, z)$ の値を求めるＣ言語の関数

```
int f (int x, int y, int z)
```

を作成せよ．同様の機能を実現できるのであれば, C 言語の代わりに Java, C++, PASCAL のいずれかのプログラミング言語を用いてもよい．

ただし, どの言語を選んだかを明示すること．ヘッダファイルのインクルードや名前空間の指定（たとえばC 言語における #include <stdio.h> や C++における

#include <iostream>,using namespace std; など）は省略してよい．

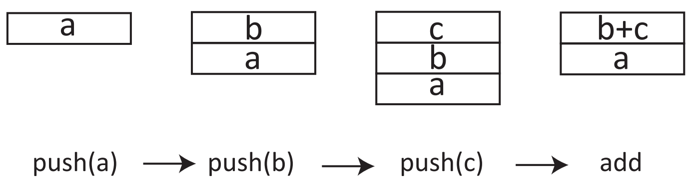
問題９． コンピュータメモリの一種にスタックメモリというのがある．このメモリは 1 次元でアドレスは存在しない．メモリにデータをいれた順番のみでデータ配置が決まる．最初に入れたデータは下に追いやられ最後に入れたデータは一番上におかれる．取り出すときも一番上から順に取り出していかなければならない．メモリへデータ a を入れる命令を push(a), 一番上にあるデータをとってくる命令を pop と名付けると

```
push(a)
push(b)
pop
```

は最初に a が格納されるが次に b が入り a は一段下がって格納される．最後の pop で b が取り出され a がスタックの一番上に残される．このメモリのサイズはほとんど無限であるとしよう．さらに add と mult という命令があるとする．add はスタックの一番上から 2 つのデータを pop し足し算をしその結果を push する．mult は同様にかけ算をするものとする．プログラムの

```
push(a)
push(b)
push(c)
add
```

の動きをスタックが空として始めた場合を図示すると下図のようになる．



上記の 4 つの命令（push(データ), pop, add, mult）を上例プログラムのように 1 命令につき 1 行で表記し, スタックは最初空であるとの条件のもとで, 以下の問いに答えよ．両問ともステップ数を少なくするように工夫すること．

1. 最後にスタックの一番上に $((a+b)\times(c+d))+e\times(f+g)$ の結果が残るようなプログラムを書きだせ.

2. 同様に ax^3+bx^2+cx+d についてもプログラムを書きだせ.