平成 25 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 24 年 9 月 4 日）
数学 I (9:30 − 11:30)

1.　次の問題 1 から問題 7 のうちから 4 題を選択して解答しなさい．
ただし，問題 1（微分積分）と問題 2（線形代数）は必ず選択すること．

2.　問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3.　全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4.　試験終了後，答案用紙は 4 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1.（微分積分）　関数 $f(x)$ は実数全体で C^1 級とする．定数 $A,\ B$ に対して，$f'(0) = A$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = B$ が成り立っているとする．l を正の定数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \bigl(f(x+l) - f(x)\bigr) = lB$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(3x) - f(x)}{x}$ を求めよ．

(4) $t > 0$ に対して平面の集合 D_t を $D_t = \bigl\{(x,y) \bigm| t \leq x \leq t + 2l,\ t \leq y \leq 3t\bigr\}$ で定義するとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \iint_{D_t} f'(x) f'(y)\, dxdy$ を求めよ．

問題 2.（線形代数）　定数 $a,\ b \in \mathbb{R}$ に対して定義される線形写像

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+by \\ ax+y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$g : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+2by \\ (a+1)x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

の像をそれぞれ $\operatorname{Im} f,\ \operatorname{Im} g$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f と g の階数を求めよ．

(2) $f,\ g$ が両方とも単射であるための，$a,\ b$ に関する必要十分条件を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ が $\operatorname{Im} f$ と $\operatorname{Im} g$ の直和であるための，$a,\ b$ に関する必要十分条件を求めよ．

(4) $V_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; f\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \right\}$ とおく．$\dim V_{a,b} \geq 2$ であるための，$a,\ b$ に関する必要十分条件を求めよ．

問題 3.　$(\,X,\ d\,)$ を距離空間とする．X の空でない部分集合 A の直径を，

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{diam}(A)=\mathrm{diam}(\overline{A})$ が成り立つことを示せ．ただし，$\overline{A}$ は $(X,\, d)$ における A の閉包を表す．

(2) $(X,\, d)$ が完備であるとき，$\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(F_n)=0$ をみたす $(X,\, d)$ の空でない閉集合 F_n $(n=1,2,\dots)$ の単調減少列 $(F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset F_{n+1}\supset\cdots)$ に対し，$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$ を示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(U_n)=0$ をみたす 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の空でない開集合 U_n $(n=1,2,\dots)$ の単調減少列 $(U_1\supset U_2\supset\cdots\supset U_n\supset U_{n+1}\supset\cdots)$ で，$\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\varnothing$ となる例を与えよ．

問題 4. $\mathbb{R}^3$ において関数 $z=1-x^2-y^2$ のグラフの $z\geq 0$ の部分の定める曲面を S とする．$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$ を

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)=(\,yz,\,xy^2,\,z^2\,)$$

と定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{div}\boldsymbol{A},\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) S 上の次の面積分を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルで z 成分が正のものとし，dS は S の面積要素を表すものとする．

(a) $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$

(b) $\displaystyle\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$

問題 5. 漸化式

$$a_0=0\,,\qquad a_1=1\,,\qquad a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}\quad(\,n\geq 2\,)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ を用いて複素関数 $f(z)$ を

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $0\leq a_n<2^n$ であることを証明せよ．

(2) $f(z)$ の収束半径は $\dfrac{1}{2}$ 以上であることを証明せよ．

(3) 原点の近傍で

$$f(z)=\frac{z}{1-z-2z^2}$$

となることを証明せよ．

(4) 関数 $\dfrac{z}{1-z-2z^2}$ の原点を中心とするテイラー展開を求めよ．

問題 6.　以下の問いに答えよ．ただし，解答に用いるプログラミング言語としては，C 言語，Fortran, Pascal のいずれかを用い，どの言語を用いたか明記すること．

(1) 正の整数 n と 2 以上の整数 b を入力として，n の b 進展開

$$n = \sum_{i=0}^{m} a_i b^i \quad (0 \leq a_i \leq b-1,\, a_m \neq 0)$$

を計算し，整数 a_i を要素とする配列 `a` と整数 m を返す手続き `radconv` のプログラムを書け．ただし，手続き `radconv` の引数は n, b の値と，`a`, m への参照またはポインタであるとする．また，配列 `a` は結果を格納するのに十分な領域が確保されていると仮定してよい．

(2) 正の整数 n, m と，2 以上の整数 $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ を要素とする配列 `b` を入力として，

$$n = a_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0 + \cdots + a_3 b_2 b_1 b_0 + a_2 b_1 b_0 + a_1 b_0 + a_0,$$
$$0 \leq a_i \leq b_i - 1 \quad (0 \leq i < m)$$

をみたす整数 $a_0, a_1, \ldots, a_m$ を計算し，整数 a_i を要素とする配列 `a` を返す手続き `mixedradix` のプログラムを書け．ただし，手続き `mixedradix` の引数は，n, m の値と，配列 `b`, `a` への参照またはポインタであるとする．また，配列 `a` は結果を格納するのに十分な領域が確保されていると仮定してよい．

問題 7.　自然数 $n > 4$ に対して，正 n 角形の相異なる 3 つの頂点を結んでできる三角形を考えるとき，以下の問いに答えよ.

(1) n が偶数のとき, 直角三角形は何通りできるか.

(2) n が奇数のとき, 鈍角三角形は何通りできるか.

(3) 一般の n に対して, 鋭角三角形は何通りできるか.

平成 25 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）

理工学研究科　数理情報科学専攻

入学試験（平成 24 年 9 月 4 日）

数学 II (13:00 – 14:30)

1.　次の 9 題から 2 題を選択して解答しなさい．

2.　問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3.　全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4.　試験終了後，答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1.　R を零元 0 と異なる単位元 1 を持つ可換環，n を正の整数とする．R に成分を持ち，行列式が R の可逆元である n 次正方行列全体の集合を $\mathrm{GL}(n,R)$ とおく．$\mathrm{GL}(n,R)$ の元の (i,j) 成分を $a_{i,j}$ と表すとき，以下の問いに答えよ．

(1) $A \in \mathrm{GL}(n,R)$ が対角行列ならば，A の対角成分はすべて R の可逆元であることを示せ．

(2) R の任意のイデアル I $(\neq R)$ と $\mathrm{GL}(n,R)$ の任意の元 $(a_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n,R)$ に対し，$\{1, 2, \ldots, n\}$ のある置換 σ が存在し，積 $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ は I に属さないことを示せ．

(3) p を素数とする．$\mathbb{Q}$ の部分環

$$\tilde{R} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, b \notin p\mathbb{Z} \right\}$$

と $\mathbb{Q}$ の部分集合 $I = \{pc \mid c \in \tilde{R}\}$ に対し，次の (a), (b) を示せ．ただし，$\tilde{R}$ が $\mathbb{Q}$ の部分環であることは認めてよい．

(a) I は $\tilde{R}$ のイデアルであり，$I \neq \tilde{R}$ である．

(b) 任意の $x \in \tilde{R}$ に対し，$x \notin I$ ならば x は $\tilde{R}$ の可逆元である．

(4) (3) で定義した $\tilde{R}$ に対し，$A \in \mathrm{GL}(n,\tilde{R})$ とする．このとき，A の各行および各列に，少なくとも一つ $\tilde{R}$ の可逆元が現れることを示せ．

問題 2.　p を奇素数とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) p で割り切れない自然数 m について, $pu + mv = 1$ となるような整数 u, v が存在することを証明せよ.

(2) (1) の結果を利用して, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が体であることを証明せよ.

(3) $\mathbb{F}_p^* = \mathbb{F}_p \backslash \{0\}$ が積に関して位数 $p-1$ の巡回群であることを証明せよ.

(4) $p = 59$ とするとき, $f(X) = X^2 + 1$ は $\mathbb{F}_{59}[X]$ における既約多項式であることを証明せよ.

問題 3.　n 次実正方行列全体の集合 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を，自然に $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視することで C^∞ 多様体とみなし，行列式の定める C^∞ 写像 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を g で表す. すなわち,

$$g(A) = \det A\,, \qquad A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

である．また，$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ における接空間も $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ と同一視し，可微分写像 $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^k$ (k は自然数) の A における微分 $df_A : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^k$ を次のように定義する．

$$df_A(V) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + tV) - f(A)}{t}\,, \qquad V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 次の集合が C^∞ 多様体になることを示せ.

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; g(A) \neq 0 \right\}$$

(2) $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を固定し，可微分写像 $T^A : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を次のように定義する.

$$T^A(X) = AX\,, \qquad X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

このとき，$B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ における T^A の微分 $d(T^A)_B : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を求めよ.

(3) 次の集合が $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ の C^∞ 級の閉部分多様体であることを示し，その次元を求めよ.

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; g(A) = 1 \right\}$$

問題 4. 次式によって与えられる $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を S とするとき，以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{p}(u,v) = \left(u + uv^2 - \frac{u^3}{3},\; -v - u^2 v + \frac{v^3}{3},\; u^2 - v^2 \right) \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

(1) 曲面 S の第 1 基本量 E, F, G を求めよ.

(2) 曲面 S のガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ.

(3) S の各点に対してその点における単位法ベクトル

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|}$$

を対応させることにより，S から単位球面 $\mathbb{S}^2$ へのガウス写像 $g : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ を定める．ガウス写像 g の像 $\mathrm{Im}\, g$ を求めよ.

(4) S 上でのガウス曲率 K の積分

$$\int_S K dA$$

を求めよ．ここで，dA は S の面積要素を表すものとする.

問題 5. $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が，任意の実数 a に対して

$$\left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) > a \right\} \in \mathcal{F}$$

をみたすとき，f を可測関数であるという．以下，$\left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) > a \right\}$ を簡単に $\{f > a\}$ などと書く．$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を X 上の関数列とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 次を示せ.

$$\left\{ \inf_{n \geq 1} f_n > a \right\} = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=1}^\infty \{ f_n > a + \frac{1}{k} \}.$$

(2) $\left\{ \liminf_{n\to\infty} f_n > a \right\}$ を，$\{f_n > b\}$ の形の集合を用いて表せ.（和，共通部分をとるなどの操作を用いてよい.）

(3) $\{f_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) が X 上の可測関数列ならば，$\liminf_{n\to\infty} f_n$ も可測関数であることを示せ.

問題 6.　関数 $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ が $\mathbb{R}^3$ の各点で

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \geq 0$$

をみたしているとする．任意の点 $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ を固定して，関数 $U_a(r)$ ($r > 0$) を面積分を用いて

$$U_a(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S(a,r)} u(x)\, dS(x)$$

と定める．ここで，

$$S(a,r) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x - a| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} = r \right\}$$

とし，dS は $S(a,r)$ の面積要素とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $U_a'(r) \geq 0$　($r > 0$) を示せ．

(2) $u(a) \leq U_a(r)$　($r > 0$) を示せ．

(3) $\mathbb{R}^3$ のある点で u が最大値をとるならば，u は定数であることを示せ．

問題 7.　X を可分な無限次元の実ヒルベルト空間で，その内積を $(\cdot, \cdot)$ とする．$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の完全正規直交系とし，線形作用素 $A,\, B : X \to X$ を

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_{2n} \qquad Bx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_{3n} \qquad (\ x \in X\ )$$

で定義する．ここで，右辺の極限はノルム $\|\cdot\|$ での収束を表すものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\|Ax\| = \|Bx\| = \|x\|$　($x \in X$) が成り立つことを示せ．

(2) 共役作用素 $A^*,\, B^* : X \to X$ をそれぞれ求めよ．

(3) $A^*Ax = B^*Bx = x$　($x \in X$) が成り立つことを示せ．

(4) $AB^*x = 0$ である $x \in X$ に対して，$B^*A^*x = 0$ であることを示せ．

問題 8.　N を 2 以上の整数として，環 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ における加算と乗算の時間計算量をそれぞれ $a,\, m$ とする．$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ において，数列 $\{F_n\}$ を

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0)$$

で定義するとき，以下の問いに答えよ．ただし，$t \leftarrow E$ で変数 t に式 E の計算結果を代入する操作を表すものとする．

(1) $n \geq 2$ とする．F_n を上の漸化式で計算する手順は次のように書ける．

(a) $y \leftarrow 0,\ z \leftarrow 1.$

(b) 次の操作を $n-1$ 回繰り返す：$x \leftarrow y,\ y \leftarrow z,\ z \leftarrow x+y.$

(c) F_n として z を返す．

この手順で F_n を計算したとき，$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ における演算の時間計算量を $a,\ n$ で表せ．

(2) $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に成分を持つ 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

が与えられたとき，A^2 を返す手順を (1) にならって書き，A^2 を計算したときの $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ における演算の時間計算量を $a,\ m$ で表せ．

(3) 上の漸化式を行列を用いて表示すると，

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．$n = 2^e + 1$（e は自然数）のとき，F_n を計算する手順は次のように書ける．

(a) $A \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(b) 次の操作を e 回繰り返す：$A \leftarrow A^2.$

(c) F_n として A の $(1,1)$ 成分を返す．

この手順で F_n を計算したときの $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ における演算の時間計算量を $a,\ m,\ e$ で表せ．ただし，A^2 の計算には (2) で答えた手順を使うものとする．

(4) $n = 2^e + 1$ とする．e が十分大きいとき，(1) と (3) で与えられた手順で F_n を計算した場合，どちらが $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ における演算の時間計算量が小さくなるか，理由をつけて答えよ．

問題 9. 3 ビットデータ ($a_1,\ a_2,\ a_3$) をネットワーク上にのせて遠隔送信する．送受信中の不慮の事故によりたとえ 1 ビットが反転してもこの 3 ビットを復元することを考える．そのために次式で定義されるチェックビットと称する更なる 3 ビット ($a_4,\ a_5,\ a_6$) を同時に送り復元化を行うことにする．

$$a_4 = a_2 \oplus a_3\,, \qquad a_5 = a_1 \oplus a_3\,, \qquad a_6 = a_1 \oplus a_2 \qquad (\ \oplus\ \text{は排他的論理和を表す．})$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_1, a_2, a_3 のすべての組み合わせを考え，それに対する a_4, a_5, a_6 の値を表として示せ．

(2) 送信した ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$) のうち反転しているビットが 1 ビット以下のとき，3 ビットメッセージ (a_1, a_2, a_3) を復元化するアルゴリズムを書き出せ．アルゴリズムは必ずしも特定のプログラミング言語の記法に従う必要はない．プログラム化できるなら日本語，英語を用いてもよい．論理演算記号を用いる場合その記号の説明を付すこと．