平成 24 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 24 年 2 月 13 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1.　次の問題 1 から問題 7 のうち, 4 題を選択して解答しなさい.
ただし，問題 1（微分積分）と問題 2（線形代数）は必ず選択すること.

2.　問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3.　全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4.　試験終了後，答案用紙は 4 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題 1.（微分積分） $\mathbf{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ とおく. $\mathbf{R}_+^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y) = x^y + y^x$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(i) 偏微分導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求め, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) \neq 0$ を確かめよ.

(ii) $g(x)$ を $f(x, g(x)) = 2$ を満たし, $x = 1$ の近傍で定義された 2 回微分可能な関数とする. $g'(x)$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ で表せ.

(iii) (ii) の $g(x)$ に対し, $g'(1)$, $g''(1)$ を計算せよ.

問題 2.（線形代数） 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(i) A の行列式を求めよ.

(ii) A によって定まる $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^4$ への線形写像を T で表す.

(a) $\mathbf{R}^4$ の部分空間 W を

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

で表すとき, W は T に関する不変部分空間であることを示せ.

(b) T が引き起こす W から W への線形写像を T_W とおき,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

とおく. ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は W の基底であることを示し, T_W の基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ に関する表現行列を求めよ.

問題 3.

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \in \mathbf{N}\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbf{N}\}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(i) A の閉包を求めよ.

(ii) A の開被覆で, 有限部分被覆をもたないものを構成せよ.

(iii) A と B の間の同相写像を構成せよ.

問題 4. 平面 $\mathbf{R}^2$ 内の単純閉曲線 C が次のように与えられているとき, 以下のそれぞれの場合について C に沿った線積分

$$\int_C \frac{y}{x^2+4y^2}dx - \frac{x}{x^2+4y^2}dy$$

の値を求めよ. ただし, C は反時計回りに向き付けられているとする.

(i) $\mathbf{R}^2$ の原点が C の外部にある場合.

(ii) $\mathbf{R}^2$ の原点が C の内部になる場合.

問題 5. $\mathbf{C}$ 上正則な関数 $f(z)$ は, 任意の自然数 n について, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^3$ を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(i) $f(z)$ を求めよ.

(ii) $\frac{1}{f(z)}$ の上半平面上の極と, その極における留数を求めよ.

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ を計算せよ.

問題 6.　整数 x の関数 f を次のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq 0\text{ のとき}) \\ 0 & (x > 0\text{ かつ，}x\text{ が平方因子をもたないとき}) \\ 1 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

ただし, 正の整数 x が平方因子をもたないとは, 任意の素数 p に対して p^2 が x を割り切らないことをいう.

例 1 . $f(12) = 1$. この場合, 12 は 2^2 で割り切れるので, 12 は平方因子をもつ.

例 2 . $f(14) = 0$. この場合, 14 は平方因子をもたない.

例 3 . $f(-2) = -1$.

このとき, f をＣ言語の関数 `int f（int x）` として作成せよ.

同様の機能を実現できるのであれば, Ｃ言語の代わりにＪａｖａ, Ｃ＋＋, ＰＡＳＣＡＬのいずれかのプログラミング言語を用いてもよい. ただし, どの言語を選んだかを明示すること. 各自が使用する言語において整数型を選ぶとき, 特に理由がなければＣ言語のｉｎｔ型のような符号付き整数用の一般的な型を用いるのが望ましい. ヘッダファイルのインクルードや名前空間の指定（たとえばＣ言語における `#include <stdio.h>` やＣ＋＋における `#include <iostream>, using namespace std;` など）は省略してよい. また, 時間計算量を多項式時間におさめなくてよい. なお, 本問の採点においてはアルゴリズムのあらすじを重視し, プログラミング言語に関する方言やささいな文法上の誤りについては寛容に対処する.

問題 7. 整数 a, b の積を加減算で求める二つのアルゴリズムを考える. 以下 $x \leftarrow E$ で「式 E の計算結果を変数 x に代入する」操作を表す.

1. 零に被乗数を乗数回ほど加える方法:
   (a) まず $z \leftarrow 0$, $w \leftarrow a$, $n \leftarrow b$ とする.
   (b) そして $n \neq 0$ の間は次を実行し続ける:
   加算 $z \leftarrow z + w$, 減算 $n \leftarrow n - 1$ をする.
   (c) 積として z の値を返す.
2. 被乗数に被乗数を乗数回より一回少なく加える方法:
   (a) もし $b < 0$ なら $z \leftarrow -a$, $w \leftarrow -a$, $n \leftarrow -b$ として,
   さもなくば $z \leftarrow a$, $w \leftarrow a$, $n \leftarrow b$ とする.
   (b) そして $n > 1$ の間は次を実行し続ける:
   加算 $z \leftarrow z + w$, 減算 $n \leftarrow n - 1$ をする.
   (c) 積として z の値を返す.

このとき, それぞれのアルゴリズムが正しく働くかどうか理由を述べて答えよ.

平成24年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成24年2月13日）
数学II (13:00 – 14:30)

1.　次の9題から2題を選択して解答しなさい．

2.　問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3.　全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4.　試験終了後，答案用紙は2枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1.　以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $G(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ と定義する.
$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, G(x, y) = 0\}$ は C^∞ 級多様体であることを証明せよ.

(2) 関数 $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $F(x, y) = xy$ と定義し, F を M に制限したものを $f : M \to \mathbf{R}$ と書くことにする.

(a) $f : M \to \mathbf{R}$ の臨界点を求めよ.

(b) $f : M \to \mathbf{R}$ はモース関数であることを示し, 各臨界点におけるモース指数を求めよ.

問題 2.　$\mathbf{R}^2$ の部分集合 Θ を次のように定義する.

$$\Theta = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) \,|\, -1 \leq x \leq 1\}.$$

以下の問いに答えよ.

(1) Θ を, x 軸の周りに回転させてできる図形 X の整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) Θ を, y 軸の周りに回転させてできる図形 Y の整係数ホモロジー群を求めよ.

(3) Θ を, 直線 $y = x$ の周りに回転させてできる図形 Z の整係数ホモロジー群を求めよ.

問題 3.　G は群, H は G の指数 2 の部分群, $\psi : H \to A$ は H から可換群 A への全射準同型とする. 以下の問いに答えよ. なお, G の演算は乗法, A の演算は加法で表すものとする.

(1) H は G の正規部分群であることを示せ.

(2) A の部分群 B に対し, $K_B = \psi^{-1}(B)$ とおく. すべての $h \in H$ に対し, $\psi(g^{-1}hg) = -\psi(h)$ が成立するような $g \in G \setminus H$ があるとき, K_B は G の正規部分群であることを示せ.

(3) (2) において, $A = \mathbf{Z}, B = 3\mathbf{Z}$ であるとき，G/K_B は 3 次対称群に同型であることを示せ.

問題 4.　K を体, $K(x)$ を K 上の有理関数体とし, $K(x)$ の K 上の自己同型群を

$$\mathrm{Aut}_K K(x) = \{\sigma : K(x) \to K(x) \mid \sigma \text{ は } K \text{ 上の同型}\}$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\varphi(x) = 1$ を満たす環準同型 $\varphi : K(x) \to K(x)$ は存在しないことを示せ.

(2) $\tau(x) = \dfrac{1}{x}$ を満たす $\tau \in \mathrm{Aut}_K K(x)$ が存在することを示せ.

(3) (2) の τ で生成される $\mathrm{Aut}_K K(x)$ の部分群 G の位数を求めよ.

(4) $f = x + \dfrac{1}{x}$ とするとき, x の $K(f)$ 上の次数は 2 以下であることを示せ.

(5) 不変体 $K(x)^G$ は $K(f)$ と等しいことを証明せよ.

問題 5.　以下の問いに答えよ.

(1) $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ を複素数列とする. 自然数 n に対し

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく. このとき, 2 以上の自然数 j に対し,

$$\sum_{n=2}^{j} a_n T_n = S_j T_j - S_1 T_1 - \sum_{n=2}^{j} S_{n-1}(T_n - T_{n-1})$$

が成り立つことを示せ.

(2) z を $|z| = 1$ を満たす複素数とする. べき級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+4} z^n$$

は $z \neq 1$ のとき収束し, $z = 1$ のとき発散することを示せ.

問題 6.　関数 $u(x,t)$ は $u \in C^2([0,1] \times [0,+\infty))$ で, 次の方程式と境界条件を満たす解とする.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad (0 < x < 1, t > 0),$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad (t \geq 0).$$

以下の問いに答えよ.

(1) $E(t) = \displaystyle\int_0^1 \left((\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))^2 + (\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))^2 \right) dx$ と置くとき, $t > 0$ に対して $E'(t) \leq 0$ となることを示せ.

(2) $u(x,t) = T(t)\phi(x)$ の形の解で $u(x,t) \not\equiv 0$ なるものをすべて求めよ.

問題 7.　単位円 $D = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < 1\}$ で正則な関数 f の原点におけるテイラー級数を $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とする. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ と仮定する.

以下の問いに答えよ.

(1) f は単位円 D およびその円周上で連続関数になることを示せ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ を示せ.

(3) $||f||_2 = \displaystyle\sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}$ を係数列 $\{a_n\}$ を用いて表せ.

(4) f によらない ある定数 C があって, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq C||f'||_2 + |f(0)|$$

問題 8.　素数 p, および, p と互いに素な（最大公約数が 1）整数 a に対して $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ が成立する (フェルマーの小定理). 一方, 合成数 n で, ある整数 a（$1 < a < n$）が存在して $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ を満たすとき, このような n を a を底とする擬素数と呼ぶ. このとき 以下の問いに答えよ.

(1) 91 は 3 を底とする擬素数であることを示せ.

(2) p を奇素数, $m = p^2$ とするとき, m が a を底とする擬素数であるための必要十分条件は

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{m}$$

であることを示せ.

(3) p, q を 2 つの異なる奇素数, $n = pq$ および $d = \gcd(p-1, q-1)$（$p-1$ と $q-1$ の最大公約数）とするとき, n が b を底とする擬素数であるための必要十分条件は

$$b^d \equiv 1 \pmod{n}$$

であることを示せ. また, n を擬素数とする底 b（$1 < b < n$）の個数を求めよ.

問題 9.　有限集合 S 上の自己写像 $f : S \to S$ に対して, 初項と漸化式

$$s_1 \in S, \qquad s_{i+1} = f(s_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

で定まる周期数列 $\{ s_i \}_{i=1}^{\infty}$ の最小周期, 周期開始項

$$k = \min \{ i - h \mid 0 < h < i, \ s_h = s_i \}, \quad j = \min \{ i \mid s_i = s_{i+k} \}$$

を求める. ただし, 値を計算できる写像 f と初項 s_1 とが与えられているとする. 以下 $x \leftarrow E$ で「式 E の値を変数 x に代入」する操作を表す.

線型探索　先頭からすべての場合を逐次的に調べる方法.

1. まず $j \leftarrow 1$, $k \leftarrow 1$ とする.
2. 次に条件 $j = k$ の間は以下を実行する:
   (a) 次項 $s_{k+1} \leftarrow f(s_k)$ を求め $j \leftarrow 1$, $k \leftarrow k + 1$ とする.
   (b) 条件 $s_k \neq s_j$ の間は以下を実行する:
   　　$j \leftarrow j + 1$ とする.
3. 周期開始項 j と最小周期 $k \leftarrow k - j$ を出力し終了.

兎亀算法　これに対して領域計算量が格段に少ない方法.

1. まず $r \leftarrow s_1$, $s \leftarrow f(s_1)$ として,
   条件 $r \neq s$ の間は $r \leftarrow f(r)$, $s \leftarrow f(f(s))$ とする.
2. 次に $j \leftarrow 1$, $s \leftarrow f(r)$, $r \leftarrow s_1$ として,
   条件 $r \neq s$ の間は $j \leftarrow j + 1$, $r \leftarrow f(r)$, $s \leftarrow f(s)$ とする.
3. 更に $k \leftarrow 1$, $s \leftarrow f(r)$ として,
   条件 $r \neq s$ の間は $k \leftarrow k + 1$, $s \leftarrow f(s)$ とする.
4. 周期開始項 j と最小周期 k を出力し終了.

このとき, 各々の算法において, 数列の項を比較演算する (すなわち $\neq$ かどうか調べる) 回数と f の値を計算する回数とを, 理由も述べて j, k の式で上から評価せよ.