平成24年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成23年9月6日）
数学 I (9:30 − 11:30)

1．次の問題1から問題7のうちから4題を選択して解答しなさい．
ただし，問題1（微分積分）と問題2（線形代数）は必ず選択すること．

2．問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3．全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4．試験終了後，答案用紙は4枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1.（微分積分） 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の C^3 級関数で $f(0)=0$ を満たすとする．このとき, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{f(x)}{x}\right).$$

(2) $0<a<b$, $0<M$ とする．$D=\{(t,x)\mid 0\le t\le M, a\le x\le b\}$ に対して, 重積分

$$\iint_D e^{-xt}\,dx\,dt$$

の計算を利用して, 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt.$$

問題 2.（線形代数） $\mathbf{C}$ を複素数体とし, $M(2,\mathbf{C})$ を複素数を成分とする 2 次正方行列全体からなる $\mathbf{C}$ 上の 4 次元ベクトル空間とする．E_{ij} を (i,j) 成分が 1, 他は 0 であるような 2 次の正方行列とする．複素数 a を一つとり, 線形写像 $\varphi\colon M(2,\mathbf{C})\to M(2,\mathbf{C})$ を

$$\varphi(A)=A\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+\operatorname{tr}(A)\begin{pmatrix}1&1\\1&a\end{pmatrix}$$

と定める．ここで $\operatorname{tr}(A)$ は行列 A のトレースである．以下の問いに答えよ.

(1) $M(2,\mathbf{C})$ の基底 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ に関する φ の表現行列を求めよ.

(2) φ が単射とならないための a の条件を求めよ.

(3) $a=0$ とする．ある零でない行列 $A\in M(2,\mathbf{C})$ が存在して, $\varphi(A)=bA$ をみたすような b を求めよ.

問題 3. (X,d) を距離空間とする．任意の $\varepsilon>0$ と $x\in X$ に対し,

$$N(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\},\quad B(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid d(x,y)\le\varepsilon\}$$

とおく．U_n $(n=1,2,\dots)$ はすべて (X,d) の稠密な開集合とする．このとき，以下の問いに答えよ.

※ X の部分集合 U は，任意の $x\in X$ と $\varepsilon>0$ に対し，$N(x,\varepsilon)\cap U\neq\emptyset$ をみたすとき，(X,d) で**稠密**であるという.

(1) 任意の $x_0 \in X$ と $\varepsilon_0 > 0$ に対して,

$$B(x_1, \varepsilon_1) \subset N(x_0, \varepsilon_0) \cap U_1, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

をみたす $x_1 \in X$ と $\varepsilon_1 > 0$ があることを示せ.

(2) 帰納的に X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ で,

$$B(x_n, \varepsilon_n) \subset N(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap U_n, \quad 0 < \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} \ (n = 1, 2, \dots)$$

をみたすものをとるとき, 点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，コーシー列であることを示せ.

(3) (X, d) が完備であるとき，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ は，(X, d) で稠密であることを示せ.

問題 4． 以下の問いに答えよ.

(1) C_1 を

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2), \quad (1 \leq t \leq 2)$$

で表される平面内の曲線，また

$$\mathbf{v} = (xy, \log y)$$

とするとき，線積分

$$\int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

の値を求めよ.

(2) C_2 を中心が $(1, 0)$, 半径 3 の円とするとき，線積分

$$\int_{C_2} xye^{x+2y}dx + (x + 2xy - 2y - 1)e^{x+2y}dy$$

の値を求めよ．ただし C_2 の向きは反時計回りとする.

問題 5． n を自然数とする．関数 $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^{n+1}}$ に対して，以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ の $z = 0$ でのローラン展開を求めよ.

(2) $f(z)$ の $z=0$ における留数を求めよ.

(3) C を円周 $|z|=1$ で向きを反時計回りとするとき，複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ.

(4) 次の積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\cos\theta}\cos(\sin\theta+n\theta)\,d\theta$　　(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\cos\theta}\sin(\sin\theta+n\theta)\,d\theta$

問題 6． 以下の問いに答えよ.

(1) 実数 b と整数 n に対し b^n を高速に計算する次のアルゴリズムが知られている：

- n が偶数ならば $(b^{n/2})^2$ を計算する.
- そうでなければ $b^{n-1}\cdot b$ を計算する.

このアルゴリズムを使って, 実数 b と整数 n を引数にとり, 実数 b^n を返す関数 `fastpow(float b,int n)` のプログラムを書き出せ.

解答にあたって必要とあれば浮動小数点型関数 `square(float b)` が b^2 を計算するのに利用できると仮定してよい.

以上の説明はたまたま C 言語を使ったが, 問題を理解した上で他の言語を用いて解答してよい. 関数型言語を用いてもよい. どの言語を使ったか明示すること.

(2) 配列（リスト）`A` に昇順に整列された整数データが保持されているとし, 配列の長さを n とする. `A` 内にある整数（例えば変数 `keyvalue` の値）が格納されているか探索するプログラムを作成せよ. また, 探索終了まで繰り返しは最大で何回必要か答えよ. ただし，以下の形のアルゴリズムにすること：

1. 初期条件として, `i`=配列の先頭の添字, `j`=配列の最後の添字
2. `i` と `j` の関係がある条件を満足する間, 以下のことを繰り返す：
   (a) `k=(i+j)/2`
   (b) もし `A[k] > keyvalue` なら `j=k-1` そうでないなら `i=k+1`
3. 繰り返し終了後, 探索成功であれば関数 `display("found",` 添字番号`)` を, そうでなければ `display("not found")` を呼び出す.

以上の説明はたまたまC言語を使ったが, 問題を理解した上で他の言語を用いて解答してよい. 関数型言語を用いてもよい. どの言語を使ったか明示すること.

なお, 手続き型言語を用いて解答した場合, アルゴリズムのプログラム断片を記述すればよい. 関数として独立なものとさせる必要はない. したがって使用する変数名をプログラム冒頭部でその型とともに明示的に宣言する必要もない.

問題 7. n を 3 以上の自然数とする. X を相異なる n 個の実数 $x_1, x_2, ..., x_n$ からなる集合とし, 条件「X の異なる任意の要素 x_i, x_j に対し, $x_i - x_j \in X$ または $x_j - x_i \in X$」が満たされているとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 次のうちいずれか一方が成立することを示せ;
  (i) 全ての i に対して $x_i \geq 0$,
  (ii) 全ての i に対して $x_i \leq 0$.

(2) $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ のときは, $x_k = kx_1$ $(1 \leq k \leq n)$ であることを示せ.

(3) 一般に, ある実数 a, d が存在して, $X = \{a + dk \,|\, 1 \leq k \leq n\}$ と表せることを示せ.

平成 24 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 23 年 9 月 6 日）
数学 II (13:00 − 14:30)

1．次の 9 題から 2 題を選択して解答しなさい．

2．問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3．全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4．試験終了後，答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1.　a を $0 < a < 1$ を満たす定数とし, $\boldsymbol{F} : [0,1] \times [0,2\pi]^2 \to \mathbf{R}^3$ を

$$\boldsymbol{F}(r,s,t) = ((1 + ra\cos t)\cos s,\ (1 + ra\cos t)\sin s,\ ra\sin t)$$

で定め, M を $\boldsymbol{F}$ の像とする．$\boldsymbol{f} : [0,2\pi]^2 \to \mathbf{R}^3$ を $\boldsymbol{f}(s,t) = \boldsymbol{F}(1,s,t)$ で定め, T を $\boldsymbol{f}$ の像とする．S^2 を単位球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とし, ガウス写像 $\nu : T \to S^2$ を

$$\nu(\boldsymbol{f}(s,t)) = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial s}(s,t) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}(s,t)}{\left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial s}(s,t) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}(s,t) \right\|}$$

で定める．ただし, $\times$ はベクトル積を表し, $\|\boldsymbol{u}\|$ はベクトル $\boldsymbol{u}$ のノルムを表すものとする．また, S^2 上の 2 次微分形式 ω を $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ で定める．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{F}$ のヤコビ行列式を求め, $\boldsymbol{F}$ の像 M の体積 V を求めよ.

(2) M の整係数ホモロジー群を求めよ.

(3) $n = (0,0,1)$, $p = (0,1,0) \in S^2$ とおく．逆像 $\nu^{-1}(n)$, $\nu^{-1}(p)$ は T の部分多様体になるか．なる場合には, その次元を求めよ.

(4) $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0,2\pi) \to S^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ を

$$g(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi)$$

で定める．$g^*\omega$ を計算せよ.

(5) $\displaystyle\int_T \nu^*\omega$ を求めよ. (ν がガウス写像である事実を使ってもよい．)

問題 2.　3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内のコンパクトで向き付けられた滑らかな曲面 S が $\boldsymbol{p} : \mathcal{U} \to \mathbf{R}^3; (u,v) \mapsto \boldsymbol{p}(u,v)$ とパラメータ表示されているとする．ここで, $\mathcal{U}$ は $\mathbf{R}^2$ のコンパクトな領域であり, $\boldsymbol{p}$ は単射である．S 上の単位法ベクトルを

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|}$$

により与える．t を実定数として

$$\boldsymbol{p}^t(u,v) = \boldsymbol{p}(u,v) + t\boldsymbol{e}(u,v)$$

とおく．今, S_t を $\boldsymbol{p}^t : \mathcal{U} \to \mathbf{R}^3; (u,v) \mapsto \boldsymbol{p}^t(u,v)$ とパラメータ表示される曲面とする．ただし, $|t|$ は十分小さく, $\boldsymbol{p}^t$ は単射で S_t は滑らかな曲面になっているとする．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{e}_u$ および $\boldsymbol{e}_v$ は $\boldsymbol{e}$ に直交しているので, 二つの接ベクトル $\boldsymbol{p}_u$ と $\boldsymbol{p}_v$ の線形結合として

$$\boldsymbol{e}_u = A\boldsymbol{p}_u + B\boldsymbol{p}_v, \qquad \boldsymbol{e}_v = C\boldsymbol{p}_u + D\boldsymbol{p}_v$$

と表すことができる. このときの係数 A, B, C, D を S の第一基本量 $\{E, F, G\}$ と第二基本量 $\{L, M, N\}$ によって表せ.

(2)

$$\boldsymbol{p}_u^t \times \boldsymbol{p}_v^t = (1 - 2tH + t^2K)\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$$

となることを示し, $|t|$ が十分小さいとき

$$\mathrm{Area}(S_t) = \mathrm{Area}(S) - 2t\int_S H dS + t^2 \int_S K dS$$

となることを示せ. ここで, H と K はそれぞれ曲面 S の平均曲率とガウス曲率を表し, dS は S の面積要素を表す. また, Area は曲面の面積を表す.

問題 3． 以下の問いに答えよ.

(1) a と b を互いに素である正の整数とする. このとき群準同型

$$f\colon \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$$

は零写像しかないことを示せ.

(2) 群 $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ の元のうち位数が 8 のものはいくつあるか求めよ.

以下 m をある正の整数とし, 群 G を $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ で定め, また H を G の位数 m の巡回部分群とする.

(3) $m = p^a$ (a は正の整数, p を素数) であるとき, G/H は巡回群となることを示せ.

(4) m を任意の正の整数とするとき, G/H は巡回群となることを示せ.

問題 4． $R = \mathbf{Z}[x]$ は整係数の 1 変数多項式環, $S = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ とし, R から S への写像 φ を $\varphi(f(x)) = f(\sqrt{-5})$ とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) S の単元をすべて求めよ.

(2) φ は全射環準同型であることを示し, その核 $\operatorname{Ker}\varphi$ を求めよ.

(3) x^2+1 は R の素元であるが, $\varphi(x^2+1)$ は S の素元ではないことを示せ.

(4) R の素元 f の像 $\varphi(f)$ が S の既約元であるとき, $\varphi(f)$ は S の素元となるか? 正しいと判断した場合は証明を与えよ. また, 間違いと判断した場合は反例をあげよ.

問題 5. $r>0$ に対し, $D(0,r)=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<r\}$ とおく. また, 写像 $\mathbf{R}^2\ni(x,y)\mapsto x+iy\in\mathbf{C}$ により $\mathbf{R}^2$ と $\mathbf{C}$ を同一視する. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f: D(0,r)\to\mathbf{C}$ が正則ならば,

$$|f(0)|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}r}\left(\int_{D(0,r)}|f(x,y)|^2\,dxdy\right)^{1/2}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $U\subset\mathbf{C}$ を空でない開集合とし, K を U に含まれる空でないコンパクト集合とする. このとき, K と U のみによる定数 C が存在して, U 上の任意の正則関数 f に対し,

$$\sup_{z\in K}|f(z)|\le C\cdot\left(\int_U|f(x,y)|^2\,dxdy\right)^{1/2}$$

が成り立つことを示せ.

問題 6. 無理数 α を固定し, $k\alpha$ (k は自然数) の小数部分を x_k とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)=e^{2\pi imx}$ (ただし m は整数) のとき,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$$

を求めよ.

(2) 周期 1 の連続な周期関数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) N 以下の自然数 n の中で, $n\alpha$ の小数第 1 位の数字が 1 になるものの個数を N_1 とする. 次式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N_1}{N}=\frac{1}{10}$$

問題 7. $X=(0,+\infty)$, μ を X のルベーグ可測集合族上のルベーグ測度とする. $f(x)$ を X 上の正値ルベーグ可積分関数とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数 n と $x\in X$ に対して不等式 $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\leqq\dfrac{1}{2}$ を示せ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ を求めよ.

(3) 可測関数列 $\displaystyle\left\{\frac{f(x)^n}{1+f(x)^{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ はルベーグ可測階段関数に収束することを示せ.

(4) $g(x)$ を X 上のルベーグ可積分関数とするとき, 次式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\int_X\frac{x^n g(x)}{1+x^{2n}}\,d\mu(x)=0$$

(5) $E=\{x\in X \mid f(x)=1\}$ とするとき, 次式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\int_X\frac{f(x)^{n+1}}{1+f(x)^{2n}}\,d\mu(x)=\frac{1}{2}\mu(E)$$

問題 8. C プログラムで書かれた関数 `carhead`, `cdrtail`, `length` が以下のように与えられている. また関数呼び出し側で文字型配列 `s[]` が定義され, 例えば `"abcdefghijklmn"`のように文字列が保持されているとする.

```
void carhead(char * mm) {
  printf("%c",*mm) ;
}
char * cdrtail(char * s) {
  return s+1 ;
}
int length(char * s) {
  int i;
  i=0 ;
  while(*(s+i) != 0) i++ ;
  return i ;
}
```

以下の問いに答えよ.

(1) 文字列の長さを求める関数 `length` は上記のように与えられているがこの文字列長を再帰的に求める関数 `rlength(char * s)` を書き出せ. 関数 `length` 以外の関数 `carhead`, `cdrtail` を必要とあれば利用してよい.

(2) この文字列を入力してその文字列の順序を反転させてプリントアウトする関数 `reverse(char s)` を上の関数を利用して再帰手法を用いて書き出せ. 関数型言語での解答も認める. その場合上記の関数に対応する関数がすでに同名で定義されているとしてよい.

問題 9. 0 と 1 を有限個並べたものをビット列といい, 特に空列（長さ 0 の列）を λ で表す. ビット列全体の集合を $\{0,1\}^*$ で表す. 本問において, オートマトンのアルファベットとしては $\Sigma = \{0,1\}$ を用いるものとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 有限オートマトン（より正確にいえば決定性有限オートマトン）の定義を述べよ.

(2) M が有限オートマトンであるとする. このとき, M が受理する言語の定義を述べよ.

(3) $\{0,1\}^*$ の部分集合 L に対して, 以下の条件 1 を考える (文献によっては, この条件 1 をみたす L を正規言語とよぶ).

条件 1「ある有限オートマトン M が存在して, M が受理する言語と L が等しい」

条件 1 をみたす L の例をあげよ. 条件が成り立つことの証明の概略も述べること.

(4) $\{0,1\}^*$ の部分集合のうち条件 1 をみたすもの全体の族を R と表すことにする. R は可算無限集合, 非可算無限集合のいずれであるか. 理由とともに述べよ.