平成 23 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 23 年 2 月 14 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

**1.**　次の問題 1 から問題 7 のうちから 4 題を選択して解答しなさい．
ただし，問題 1（微分積分）と問題 2（線形代数）は必ず選択すること．

**2.**　問題ごとに別の答案用紙を用いること．

**3.**　全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

**4.**　試験終了後，答案用紙は 4 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

**問題 1.（微分積分）** $f(x) = \cos^5 x$ とするとき以下の問いに答えよ．

(1) $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を求めよ．

(2) 次の有限の極限値 $L$ が存在するように定数 $a$, $b$ の値を定め，その極限値を求めよ．

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) + ax + b}{x^2}$$

(3) 次の 2 重積分の値を求めよ．

$$I = \iint_D f(x) \cos y \, dxdy\,, \qquad D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq y \leq x \right\}$$

**問題 2.（線形代数）** $V$ を $x, y$ の実数係数の多項式の全体からなるベクトル空間とし，$T : V \to V$ を

$$T(f(x, y)) = -f(-y, x + y)$$

で定義する．例えば$T(2xy) = -2(-y)(x+y) = 2xy+2y^2$ である．$x^2, xy, y^2$ で張られる $V$ の部分空間を $V_2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x, y) = ax^2+bxy+cy^2 \in V_2$ に対し $T(f(x, y))$ を計算し，$T(f(x, y)) \in V_2$ を示せ．

(2) $f(x, y) \in V_2$ に対し $T(f(x, y)) \in V_2$ を与える変換を $T_2$ とする．$T_2$ は $V_2$ の線形変換であることを示し，基底 $x^2, xy, y^2$ に関する $T_2$ の表現行列 $A$ を求めよ．

(3) $T_2$ の実固有値と，対応する固有ベクトルを求めよ．

(4) 任意の $f(x, y) \in V_2$ に対し $(T_2)^n(f(x, y)) = f(x, y)$ となる正の整数 $n$ は存在するか判定せよ．

**問題 3.**　以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が一様連続であることの定義を $\varepsilon$ と $\delta$ を用いて記せ．

(2) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ で定めると，これは一様連続になるか．理由をつけて答えよ．

(3) 実数 $a$ に対して $U_a=(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$ とおく．$\mathcal{O}=\{U_a\mid a\in\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\}$ とおくと，$\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}$ の位相を定めることを示せ．

(4) 上の位相 $\mathcal{O}$ に関して $X=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ はコンパクトか．理由をつけて答えよ．

**問題 4.**　$\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 上のベクトル場を次の式で定義する．

$$\boldsymbol{a}(x,y,z)=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 原点を中心とする半径 $\varepsilon>0$ の球面を $\Sigma_\varepsilon$，その外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_\varepsilon$ とするとき，面積分

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}_\varepsilon\,dS$$

を求めよ．

(2) 原点を内部に含む有界で連結な任意の閉曲面を $\Sigma$，その外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とするとき，面積分

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．

**問題 5.**　以下の問いに答えよ．

(1) 平面上の関数 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ は調和関数であることを示せ．

(2) $u$ を実部に持ち $f(0)=0$ をみたす正則関数 $f(z)$ を求めよ．

**問題 6.**　自然数 $n$ に対して，$S = \{1, 2, ..., n\}$ とする．$2^S$ を $S$ のべき集合とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $2^S$ 上の関係 $\subseteq$ は順序であることを示せ．

(2) $A, B \in 2^S$ で，$A \subseteq B$ となる組 $(A, B)$ の総数を求めよ．

**問題 7.**　2 以上の自然数 $n$ に対して，$S = \{1, 2, ..., n\}$ とする．$S$ から $S$ への写像の全体を $X$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $X$ の要素の個数を求めよ（答えのみでよい）．

(2) $X$ の中で単調増加なもの，すなわち $f \in X$ で，$i < j$ ならば $f(i) \leq f(j)$ となるものの全体を $Y$ とする．$Y$ の要素の個数を求めよ．

平成23年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成23年2月14日）
数学 II (13:00 – 14:30)

**1.**　次の9題から2題を選択して解答しなさい.

**2.**　問題ごとに別の答案用紙を用いること.

**3.**　全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

**4.**　試験終了後，答案用紙は2枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

**問題 1.**　群 $G$ について以下の問いに答えよ.

(1) 単位元以外の $G$ の任意の元の位数が 2 であれば $G$ は可換群であることを示せ.

(2) 主張「$S$ は $G$ の部分集合で，$S$ の任意の元の位数は 2 であるとする．$G$ が $S$ の元で生成されるとき，$G$ は可換群である」は正しいかどうか答えよ．正しい場合は証明し，間違っている場合は反例を挙げよ．

(3) $S_1$, $S_2$ は $G$ の部分集合で，以下の条件をみたすものとする：

(a) $S_1$ の元の位数はすべて $m$，$S_2$ の元の位数はすべて $n$ である．ただし，$m$ と $n$ は互いに素な自然数とする．

(b) $S_1$ と $S_2$ はともに $G$ の生成系（すなわち，$G$ は $S_1$ で生成され，かつ，$S_2$ でも生成される）である．

このとき，任意の可換群 $A$ に対し，準同型 $f : G \to A$ の核は $G$ に一致することを示せ.

**問題 2.**　$\mathbb{Z}$ 上の 1 変数多項式環 $\mathbb{Z}[X]$ のイデアル

$$I = (X, 2), \quad J = (X^5 + X + 5)$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) $I + J = \mathbb{Z}[X]$ が成り立つことを示せ.

(2) 1 は $I$ に属さないことを示せ.

(3) 剰余環 $\mathbb{Z}[X]/I$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は同型であることを示せ.

**問題 3.** $g(v)$ は，$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上の $C^2$ 関数で，$g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ をみたすものとする．$S$ をパラメータ表示 $\boldsymbol{x}(u, v) = (u, v, (u+2)g(v))$ をもつ $\mathbb{R}^3$ 内の曲面とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $S$ の第 1 基本量 $E, F, G$ を求めよ．

(2) $S$ の第 2 基本量 $L, M, N$ を求めよ．

(3) $S$ の平均曲率

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

が恒等的に 0 であるとき，$g(v)$ を求めよ．

**問題 4.** $X$ を $\mathbb{R}^3$ の中に埋め込まれた連結な 1 次元単体複体とする．$X$ のオイラー数 $\chi(X)$ は，$X$ の頂点の数から辺の数を引いたもので与えられる．$Y$ を $\mathbb{R}^3$ の中に埋め込まれた連結な 2 次元単体複体とする．$Y$ のオイラー数 $\chi(Y)$ は（$Y$ の頂点の数）−（$Y$ の辺の数）＋（$Y$ の面の数）で与えられる．

以下の問いに答えよ．

(1) 線分 $\{(t, 0, 0) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ および円周 $S^1$ のオイラー数を求めよ．

(2) 球面 $S^2$ のオイラー数を求めよ．

(3) トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ のオイラー数を記せ（結果だけでよい）．

(4) $\varepsilon$ を正の数とし，$D_\varepsilon(X) = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \mathrm{dist}(P, X) \leq \varepsilon\}$ とおく．ただし，$\mathrm{dist}(P, X) = \inf_{Q \in X} |P - Q|$ とする．$S_\varepsilon(X)$ を $D_\varepsilon(X)$ の境界とする．$\varepsilon$ が十分小さいならば $\chi(S_\varepsilon(X))$ は $\chi(X)$ の定数倍となるか．なる場合は定数を求めてそれを証明し，ならない場合は反例を示せ．

(5) $l, m, n \in \mathbb{N}$ とする．

$$X = \{(x, y, z) \in [0, l] \times [0, m] \times [0, n] \mid x, y, z \text{ のうち少なくとも 2 つは整数}\}$$

とおく．$X$ のオイラー数を求めよ．

**問題 5.**　$\mathbb{R}$ 上の連続かつ有界な実数値関数 $u$ で，$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|\,dx < \infty$ をみたすもの全体の集合を $\mathcal{A}$ とおく．$u \in \mathcal{A}$ に対して，フーリエ変換を

$$\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a > 0$ を定数とするとき，関数 $u(x) = e^{-a|x|}$ に対して $\hat{u}(\xi)$ を求めよ.

(2) $u, v \in \mathcal{A}$ のとき, 関数 $(u * v)(x)$ を

$$(u * v)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x-y)v(y)\,dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定義するとき，$u * v \in \mathcal{A}$ となり，$\widehat{(u * v)}(\xi) = \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)$ が成り立つことを示せ.

(3) $u, g \in \mathcal{A}$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}u(y)\,dy + u(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

をみたすとするとき，ある定数 $b \in \mathbb{R}, c > 0$ があって，

$$u(x) = g(x) + b\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x-y|}g(y)\,dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つという．このとき，$b$ および $c$ の値を求めよ．

**問題 6.**　$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す．以下の問いに答えよ．

(1) $D$ を $\mathbb{C}$ の領域とし，$f$ を $D$ 上の正則関数とする．$a \in D$ とし，$r$ は $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - a| \leq r\} \subset D$ をみたす正の数とする．このとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|f'(a)| \quad \leq \quad \frac{1}{r} \sup_{\zeta \in C_a(r)} |f(\zeta)|.$$

ここで，$C_a(r) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - a| = r\}$ である．

(2) $\mathbb{C}$ 上の有界な正則関数は $\mathbb{C}$ 上の定数関数であることを証明せよ．

**問題 7.**　$H$ を可算無限次元実ヒルベルト空間とし，$(\ ,\ )$ をその内積とする．$H$ の完全正規直交基底 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して作用素 $P, S : H \longrightarrow H$ を

$$Px = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_{2n})e_{2n}, \qquad Sx = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_{2n}$$

で定める．ここで，右辺の極限はノルムの意味での収束を表すものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $P$ の共役作用素を $P^*$ とするとき $P^*x = Px$, $P^2x = Px$ を示せ．

(2) $S$ の共役作用素 $S^*$ を求めよ．

(3) $S^*Sx = x$, $SS^*x = Px$ を示せ．

(4) $P$, $S$ は有界線形作用素であることを示せ．

(5) $H$ に同型な $H$ の部分空間 $H_0$, $H_1$ で，$H = H_0 \oplus H_1$ をみたすものが存在することを示せ．

**問題 8.**　単位元をもつ可換環 $R$ における演算の時間計算量は，加減算 1 回が $A$ で，乗算 1 回が $M$ とする．1 変数 $X$ の多項式環 $R[X]$ で次数 $\deg f = k \geq 0$ の多項式

$$f = f(X) = f_k X^k + \cdots + f_1 X + f_0 \in R[X]$$

の $x \in R$ での値 $r = f(x)$ を計算する．以下で $a \leftarrow E$ は「式 $E$ の計算結果を変数 $a$ に代入する」ことを意味する．例えば $i \leftarrow i + 1$ は「変数 $i$ の値を 1 増す」という意味である．

(1) 定義式通り計算する手順は次の様になる．これによる $R$ における演算の最悪時間計算量を求めよ．

1. $r \leftarrow f_0$.
2. 各 $i \leftarrow 1, \ldots, i \leftarrow k$ に対して，以下を実行：
   (a) $s \leftarrow f_i$.
   (b) $s \leftarrow s \cdot x$ を $i$ 回実行．
   (c) $r \leftarrow r + s$.

(2) 別途に $x^i$ $(i = 2, \ldots, k)$ を計算する方法で，それによる $R$ における演算の最悪時間計算量が $(2M + A)k - M$ となる手順を書け.

(3) 次の手順による $R$ における演算の最悪時間計算量を求めよ.

1. 初期化 $r \leftarrow f_k$.
2. 各 $i \leftarrow k-1, \ldots, i \leftarrow 0$ に対して，以下を実行：
   (a) $r \leftarrow r \cdot x + f_i$.

(4) 上の (3) の手順で $R$ における演算を追加せずに修正して $f = (X - x)q + r$ となる $q \in R[X]$ を $r = f(x)$ と一緒に求める手順を書け.

**問題 9.** 以下の問いに答えよ.

(1) 次の C 言語で書かれた関数 `sum` は `double` 型の配列 `x` の最初の `m` 個の要素の合計和を求めるためのものである.

```
double sum(double x[], int m)
{
      int i;
      double s=0.0;
      for(i=0;i<m;i++) {
            s += x[i];
      }
      return s;
}
```

この関数 `sum` のもつ数学的な意味を変えずに，`OpenMP` による並列化を行うための指示行（Directive）を挿入したプログラムリストを書け.

(2) `Fortran90` 言語を用いて，実数型の要素数 N の配列 `A`，`B` の内積を計算して関数値として返す関数副プログラム `INNER_PROD` を以下のように書いたとする.

```
FUNCTION INNER_PROD(N,A,B) RESULT(S)
IMPLICIT NONE
```

```
REAL S
INTEGER,INTENT(IN)::N
REAL,DIMENSION(N),INTENT(IN)::A,B
   INTEGER J
   S = 0.0
   DO  J = 1, N
      S = S + A(J) * B(J)
   ENDDO
END FUNCTION INNER_PROD
```

このプログラムをその数学的な意味は変えずに，OpenMP によるスレッド並列化を行なうつもりで以下のように補助の変数 TMP と OpenMP の指示行をいくつか加えて以下のようにプログラムを書き換えたとする．

```
FUNCTION INNER_PROD(N,A,B) RESULT(S)
IMPLICIT NONE
REAL S
INTEGER,INTENT(IN)::N
REAL,DIMENSION(N),INTENT(IN)::A,B
   INTEGER J
   REAL TMP
   S = 0.0
!$OMP PARALLEL PRIVATE(TMP)
   TMP = 0.0
!$OMP DO
   DO  J = 1, N
      TMP = TMP + A(J) * B(J)
   ENDDO
   S = S + TMP
!$OMP END PARALLEL
END FUNCTION INNER_PROD
```

この並列化法の方針は，以下の通りである．まず，並列動作する各スレッドに固有な実数変数 TMP を持たせ，OpenMP 指示行により DO ループをループ分割してスレッド並列化することで，J の範囲をわけて計算した A と B の内積の部分和を各スレッド固有の TMP に作る．その後で，各スレッド

のもつ部分和 TMP を共有変数 S に加え併せて，全体の和として内積を作ることである．

ところがこのプログラムでは，上記の意図の説明に基づく並列化の方法としては不備があるため，正しい動作をしない．並列化の方針はこのままで，上の並列化プログラムの不備を修正して，意味を保った正しい並列プログラムに直して，その修正した関数副プログラムの全体を書け．