平成 23 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 22 年 8 月 31 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1.　次の問題 1 から問題 7 のうちから 4 題を選択して解答しなさい.
<u>ただし，問題 1（微分積分）と問題 2（線形代数）は必ず選択すること.</u>

2.　問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3.　全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4.　試験終了後，答案用紙は 4 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題 1.（微分積分） 以下の問いに答えよ．

(1) 平面において点 $(0,0)$ のある近傍で定義された関数 $f(x,y)$ が $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$ を満たしているとする．

(a) 関数 $F(x,y)=(2x-3y)f(x,y)$ は $(0,0)$ で x, y に関して偏微分可能であることを示し，偏微分係数 $F_x(0,0)$, $F_y(0,0)$ を求めよ．

(b) 関数 $G(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)$ は $(0,0)$ で x, y に関して偏微分可能でないことを示せ．

(2) $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq x+y\leqq 1\,,\ 0\leqq x-y\leqq \pi\right\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_A e^{x+y}\sin(x-y)\,dxdy$ を求めよ．

(3) $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\leqq x^2+y^2\leqq 4\,,\ y\geqq 0\right\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$ を求めよ．

問題 2.（線形代数） 以下の問いに答えよ．

(1) k, l を自然数，V を実ベクトル空間とする．

(a) $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\in V$ は 1 次独立であるとする．任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対し $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{x}$ が 1 次従属であるとき，V は $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ で張られることを示せ．

(b) V は $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_l\in V$ で張られるとする．$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_l$ のうち，どの $l-1$ 個のベクトルも V を張らないとき，$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_l$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) 整数 m, n は，$m>n\geq 1$ を満たすとする．

(a) $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき，合成写像 $g\circ f$ の像の次元は n 以下であることを示せ．また，合成写像 $g\circ f$ の像の次元が n と等しいならば，f は全射であり，なおかつ g は単射であることを示せ．

(b) A を $m\times n$ 行列，B を $n\times m$ 行列とするとき，AB の行列式は 0 であることを示せ．

問題 3.　S^1 を複素平面 $\mathbb{C}$ の原点中心の単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし，$\mathbb{C}$ の標準的な位相から導かれる相対位相が入っているものとする．S^1 の同値関係 $\sim$ を $z \sim w \Leftrightarrow z = \pm w$ で定め，X をその同値類集合 $S^1/\sim$，$\pi : S^1 \to X$ を自然な射影とし，X には商位相が入っているものとする．$z \in S^1$ の同値類を $[z]$ であらわす．以下の問いに答えよ．

(1) X の部分集合 U が X の開集合であることの必要十分条件を与えよ．

(2) 写像 $\varphi : X \to S^1$ を $\varphi([z]) = z^2$ で定める．$\varphi([z])$ は $[z]$ の代表元 z の取り方によらずに定まることを示せ．

(3) φ は連続になることを示せ．

(4) φ は同相写像となるか．証明をつけて答えよ．

問題 4.　3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 上の微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{v} = (\, v_1, v_2, v_3 \,)$ に対してその回転 $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$ を次で定義するとき，以下の問いに答えよ．

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \Big(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big).$$

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (\, x - y, y - z, z - x \,)$ と定ベクトル $\boldsymbol{c} = (\, 0, -1, 1 \,)$ に対して次を求めよ．ここで，$\times$ は 3 次元ベクトルの外積とする．

(a) $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$　　(b) $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v}$　　(c) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v})$

(2) $a, b > 0$ に対して，

$$\boldsymbol{r}(t) = (\, x(t), y(t), z(t) \,) = (\, a\cos t, b\sin t, 0 \,) \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

で定義される閉曲線を C とするとき，以下の問いに答えよ．

(a) 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ．

(b) C を境界とする任意の C^1 級の曲面 S に対して，面積分

$$\iint_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

の値を求めよ．ただし，C の向きに右ねじを回すときに右ねじの進む方向に S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ をとるものとする．

問題 5.　$f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上正則な関数で，$f(0) = 1$ を満たすとする．また，$z = x + iy$（ただし，x, y は実数，i は虚数単位）とするとき，$f(z)$ の実部 $\mathrm{Re}\, f(z)$ は，

$$\mathrm{Re}\, f(z) = e^{-y} \cos x$$

と書けているとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ を z の式で表せ．

(2) $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z^2+1)^2}$ とする．$g(z)$ の極 i での留数を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$ を求めよ．

問題 6.　$\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換全体の集合（n 次対称群）を $\mathfrak{S}_n$ とする．$1 \leq i \leq n$ に対し関数 $A_i : \mathfrak{S}_n \to \{0, 1\}$ を

$$A_i(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma(i) = i \\ 0 & \sigma(i) \neq i \end{cases}$$

で定義する．長さ 1 の巡回を持たない $\mathfrak{S}_n$ の元全体の集合を T_n とおき，関数 $f_n : \mathfrak{S}_n \to \{0, 1\}$ を

$$f_n(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \in T_n \\ 0 & \sigma \notin T_n \end{cases}$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) f_n を $A_1, \ldots, A_n$ を用いて表せ．

(2) $|T_n| = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_n(\sigma)$ を利用して $|T_n|$ を n で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} |T_n|$ を求めよ．

問題 7.　n を自然数とし，$\mathbb{Z}_n$ を n 個の整数 $0, 1, \ldots, n-1$ の集合とする．$\mathbb{Z}_n$ 上の任意の置換 π をプログラム言語で表現するのに，添字の範囲が $0, 1, \ldots, n-1$ である一次元配列 `a` を用いて，π が i を j に置換するとき `a` の i 番目の要素 `a[`i`]` に値 j を格納するものと決める．

(1) $\mathbb{Z}_n$ 上の置換 π_1，π_2 を表現する配列がそれぞれ `a1`，`a2` で与えられたとき，置換の積 $\pi_3 = \pi_2\pi_1$ を表現する配列 `a3` を構成する手続き `mult` のプログラムを記述せよ．ただし，積 $\pi_2\pi_1$ においては，まず置換 π_1 を行い，次に置換 π_2 を行うものとする．手続き `mult` の引数は，自然数 n の値と配列 `a1`，`a2`，`a3` への参照であるとする．

(2) 置換 π を表現する配列 `a` が与えられたとき，その逆置換 π^{-1} を表現する配列 `b` を構成する手続き `invert` のプログラムを記述せよ．ただし，手続き `invert` の引数は，自然数 n の値と配列 `a`，`b` への参照であるとする．

(3) 置換 π を表現する配列 `a` と非負整数 k を与えて，π の k 乗 π^k を表現する配列 `c` を構成する手続き `power` のプログラムを記述せよ．ただし，手続き `power` の引数は，自然数 n，非負整数 k の値と配列 `a`，`c` への参照であるとする．

解答の記述に用いるプログラム言語は「C 言語」あるいは「Fortran 言語」,「Pascal 言語」,「Java 言語」のいずれかとする．

平成 23 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 22 年 8 月 31 日）
数学 II (13:00 – 14:30)

1.　次の 9 題から 2 題を選択して解答しなさい.

2.　問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3.　全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4.　試験終了後，答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題 1.　自然数 n について，位数 n の加法群

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} \,|\, 0 \leq a < n\}$$

の部分集合

$$G_n = \{a + n\mathbb{Z} \,|\, 0 < a < n,\ (a, n) = 1\}$$

は自然な演算 $(a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$ に関して乗法群となる．ただし，$a + n\mathbb{Z} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ とする．また，$(a, n) = 1$ は a と n が互いに素であることをあらわす．このとき，次の問いに答えよ．

(1) G_5 は巡回群になることを示せ．

(2) G_8 は巡回群にならないことを示せ．

(3) G_{18} において，位数が 6 の元を全て求めよ．

(4) 奇素数 p, q に対して，$p \neq q$ ならば G_{pq} と $G_p \times G_q$ は同型であることを示せ．

問題 2.　A を単位元を持つ可換環とする．

(1) A のイデアルと A の素イデアルの定義を述べよ．

(2) $I_1, \ldots, I_n$ $(n \geq 1)$ を A のイデアル，P を A の素イデアルとする．任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $I_i \not\subset P$ ならば，$I_1 \cap \cdots \cap I_n \not\subset P$ であることを証明せよ．

(3) $I, J_1, \ldots, J_m$ $(m \geq 1)$ を A のイデアル，P を A の素イデアルとする．以下の条件を全て満たすとき，$I \not\subset J_1 \cup \cdots \cup J_m \cup P$ であることを証明せよ．

(a) $I \not\subset J_1 \cup \cdots \cup J_m$.
(b) $I \not\subset P$.
(c) 任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対し $J_i \not\subset P$.

(4) I を A のイデアル，$P_1, \ldots, P_n$ $(n \geq 1)$ を A の素イデアルとする．任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $I \not\subset P_i$ ならば，$I \not\subset P_1 \cup \cdots \cup P_n$ であることを証明せよ．

問題 3.

(1) 3 次元球面 $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ は C^∞ 級多様体になることを示せ．

(2) S^3 と 2 次の特殊ユニタリ群

$$SU(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid A^* A = E_2,\ \det A = 1\}$$

の間の写像

$$S^3 \to SU(2), \quad (z_1, z_2) \longmapsto \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

は全単射になることを示せ．ここで，$M(2, \mathbb{C})$ は複素数を成分とする 2 次の行列全体の集合を表わし，E_2 は 2 次の単位行列を表わし，$A^* = {}^t\bar{A}$ とする．

(3) (2) により $SU(2)$ に S^3 と微分同型な C^∞ 級多様体の構造を定める．このとき，

$$SU(2) \times SU(2) \to SU(2), \quad (A, B) \longmapsto AB$$

および

$$SU(2) \to SU(2), \quad A \longmapsto A^{-1}$$

はともに C^∞ 級写像であることを示せ．

問題 4. $n \geq 2$ とする．B^n を n 次元球体

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

とし，S^{n-1} をその境界である $n-1$ 次元球面とする．

(1) $f : B^n \to S^{n-1}$ を C^∞ 級写像とする．次の (A) と (B) のうちいずれか一方に答えよ．

(A) ω を S^{n-1} の体積要素，つまり S^{n-1} 上の $n-1$ 次微分形式で，いたるところ 0 でないものとする．このとき，$f^*\omega$ は B^n 上の閉形式であることを示せ．

(B) $i : S^{n-1} \to B^n$ を包含写像とする．もし S^{n-1} の各点 x に対して $f(i(x)) = x$ となるならば，f の誘導するホモロジー群の準同型

$$f_q : H_q(B^n; \mathbb{Z}) \to H_q(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \quad (q = 0, 1, \dots)$$

は任意の q で全射になることを示せ．

(2) C^∞ 級写像 $f : B^n \to S^{n-1}$ で S^{n-1} の各点 x に対して $f(i(x)) = x$ となるものは存在しないことを示せ．

(3) $\varphi : B^n \to B^n$ を C^∞ 級写像とする．このとき，$\varphi(x) = x$ となる点が存在することを次のヒントを用いて示せ．

ヒント：$\varphi(x) = x$ となる点が存在しないとする．B^n の点 x に対して，$\varphi(x)$ から出て x を通る半直線があるので，これが S^{n-1} と交わる点を $f(x)$ とおき，(2) を用いよ．

問題 5. $u(x,t)$ は，$(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$ で C^2 級の実数値関数で，次の偏微分方程式と境界条件を満たすとする．

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

$t \geq 0$ に対して，$I(t) = \displaystyle\int_0^1 (u(x,t))^2 \, dx$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $t > 0$ に対して，次を示せ．

$$I'(t) = 2\int_0^1 u(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \, dx = -2\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 dx,$$

$$I''(t) = 4\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 dx.$$

(2) ある $T > 0$ に対して，$I(t) > 0$ $(0 \le t < T)$ が成り立つとして，$V(t) = \log I(t)$ と置いたとき，$V''(t) \ge 0$ $(0 \le t < T)$ を示せ．また，このとき $I(T) = 0$ とはなりえないことを示せ．

(3) $t > 0$ に対して，不等式

$$\int_0^1 (u(x,t))^2\,dx \le \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx$$

を示せ．

(4) (3) を利用して，$t > 0$ に対し $I(t) \le I(0)e^{-2t}$ を示せ．

問題 6.　以下で，積分は閉区間 $[0,1]$ もしくは実数全体でのルベーグ測度について考えるものとする．また，α, β は負の実数とする．

(1) 閉区間 $[0,1]$ で関数 $f_\alpha(x) = x^\alpha$ を考える．f_α が，この区間で可積分であるような α の範囲を求めよ．

(2) 同様に，この区間において，$f_\beta(x) = x^\beta$ は可積分であるが，2 乗可積分ではないような β の範囲を求めよ．

(3) 実数全体で定義された実数値可積分関数 u, v に対して，

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)\,dy$$

で定義される合成積 $u * v$ も実数全体で可積分となることを示せ．

(4) 上で定義された関数 f_α と f_β を閉区間 $[0,1]$ の外では 0 とおいて実数全体に拡張したものを，それぞれ F_α, F_β と書くことにする．α が (1) の範囲にあり，β が (2) の範囲にあるとき，F_α と F_β の合成積 $F_\alpha * F_\beta$ が，実数全体で連続関数になるための α, β の条件を求めよ．

問題 7.　H を可分な実ヒルベルト空間で内積を $(\ ,\ )$，ノルムを $\|\ \|$ とする．H の完全正規直交基底 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ を用いて，線形写像 $T : H \longrightarrow H$ を

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_{n+1} \qquad (\, x \in H\,)$$

で定義する．ここで，右辺の極限はノルムの意味での収束をあらわすものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\|Tx\| = \|x\|$ を示せ．

(2) T^* を T の共役作用素，すなわち，$(\,Tx,\,y\,) = (\,x,\,T^*y\,)$ $(x,\,y \in H)$ を満たす線形作用素とするとき，T^*e_k ($k = 1,\,2,\,\ldots$) を求めよ．

(3) H の部分空間 $N(T)$, $N(T^*)$ を

$$N(T) = \bigl\{x \in H \bigm| Tx = 0\bigr\}, \quad N(T^*) = \bigl\{x \in H \bigm| T^*x = 0\bigr\}$$

で定義するとき，T の指数 $i(T) = \dim N(T) - \dim N(T^*)$ を求めよ．

(4) 任意の $x \in H$ に対して次を示せ．

$$T^*Tx = x\,, \quad TT^*x = x - (\,x,\,e_1\,)e_1$$

問題 8.　各々の自然数 n に対して，1 以上 n 以下の自然数全体の集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を V_n であらわす．また，V_7 上の 2 項関係 E_7 と，V_7 から V_6 への全射 f が与えられたとき，V_6 上の 2 項関係 E_6 を以下のように定める．

$$E_6 = \{(u, v) \in V_6 \times V_6 \mid \exists (x, y) \in E_7 \ \ (u = f(x) \text{ かつ } v = f(y))\}.$$

$n = 6, 7$ の各々に対して，主張 P_n を以下のように定める．

P_n :「 $\forall x, y \in V_n$ $[(xE_ny$ かつ $yE_nx)$ ならば $x = y]$ 」

ただし，「$(x, y) \in E_n$」を「xE_ny」と略記する．このとき，以下 4 つの命題の各々についてその真偽を判断し，理由とともに述べよ．

命題 1: 「V_7 上のある 2 項関係 E_7 と，V_7 から V_6 へのある全射 f が存在して，P_6 が成り立つ」

命題 2: 「V_7 上のある 2 項関係 E_7 が存在して，V_7 から V_6 への任意の全射 f に対して P_6 が成り立つ」

命題 3: 「V_7 上の任意の 2 項関係 E_7 と，V_7 から V_6 への任意の全射 f に対して，『P_7 ならば P_6』が成り立つ」

命題 4: 「V_7 上の任意の 2 項関係 E_7 と，V_7 から V_6 への任意の全射 f に対して，『P_6 ならば P_7』が成り立つ」

問題 9. 以下のプログラムは C 言語で書かれてあるが核心部のアルゴリズムはとくにプログラム言語によらずに理解できることと思う．なお drawLine という関数は，最初の 2 つの引数で始点の，3 番と 4 番目の引数で終点の x,y 座標を表し，その間を直線で結ぶグラフィックライブラリとする．今左上の座標が $(0, 0)$ であり x は右方向，y は下方向に向かう座標系をもったスクリーンを考える．スクリーンは十分大きいものとする．xpresent と ypresent の初期値はそれぞれ 200, 300 とする．また minLength=30 で固定されているとする．このとき，$\mathrm{aplot}(90.0, 0.0)$，$\mathrm{aplot}(150.0, 0.0)$，さらに $\mathrm{aplot}(180.0, 0.0)$ と呼び出したときのグラフィック出力を図示せよ．ただし，各呼び出しではスクリーンはその都度クリアされているとする．なお図の大きさは厳密である必要はなく，形があっていれば正解と見なす．なお以下のコードで `pi` は円周率 π を意味することにする．

```
void aplot(double length,double angle) {
  int xnext,ynext ;
  if(length < minLength) {
    xnext=(int)(xpresent+length*cos(angle)) ;
    ynext=(int)(ypresent+length*sin(angle)) ;
    drawLine(xpresent,ypresent,xnext,ynext) ;
    xpresent=xnext;
    ypresent=ynext ;
  }
  else {
    aplot(length/sqrt(2.0),angle+pi/4.0) ;
    aplot(length/sqrt(2.0),angle-pi/4.0) ;
  }
}
```