平成22年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成22年2月12日）
数学I (9:30 – 11:30)

1．次の問題1から問題7のうちから4題を選択して解答しなさい．
ただし，問題1（微分積分）と問題2（線形代数）は必ず選択すること．

2．問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3．全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4．試験終了後，答案用紙は4枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1.（微分積分）　次の問いに答えよ．

(1) 正の実数 r に対し，$f(r) = \displaystyle\int_{-r}^{r} |x|\,dx$ とする．任意の自然数 n に対して，第 n 次導関数 $f^{(n)}(r)$ を求めよ．

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき，$\displaystyle\lim_{r\to+0} \frac{1}{r} \int_{-r}^{r} g(x)\,dx = 2g(0)$ であることを証明せよ．

(3) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．正の実数 r に対し，$h(r) = \displaystyle\int_{-r}^{r} g(x)\,dx$ とする．関数 $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ の導関数 $h'(r)$ を求めよ．

問題 2.（線形代数）　行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

に対し，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A が逆行列をもつことを示せ．

(3) A の各固有値に対し，固有空間の正規直交基底を一組ずつ求めよ．

問題 3.　(X, d) を距離空間とする．X の部分集合 A に対し，A の内部（すなわち A の内点全体の集合）を A^i，A の閉包（すなわち A の触点全体の集合）を A^a とおく．このとき，次の等式を証明せよ．

(1) $A^i = (A^i)^i$

(2) $A^a = (A^a)^a$

問題 4.　C をパラメータ表示

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}(t+\frac{\pi}{2}), 0\right) & (-\pi \leq t \leq 0) \\ (\cos t, \sin t) & (0 \leq t \leq \pi) \end{cases}$$

をもつ曲線とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) グリーンの定理を使って，線積分 $\displaystyle\int_C y^2\,dx + 3xy\,dy$ の値を求めよ．

(2) グリーンの定理を使わずに，線積分 $\displaystyle\int_C y^2\,dx + 3xy\,dy$ の値を求めよ．

問題 5.　次の問いに答えよ．

(1) 関数

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$$

を $0 < |z| < 1$ の範囲で $z = 0$ を中心にローラン展開せよ．

(2) 関数

$$f(z) = \frac{z^2+2}{z(z-1)^3}$$

を，円 $|z| = \frac{1}{2}$ を正の向きに回る積分路 C_1，および円 $|z| = 2$ を正の向きに回る積分路 C_2 でそれぞれ積分せよ．

問題6． ８つの仕事$1,2,3,4,5,6,7,8$があり，８人の人A,B,C,D,E,F,G,Hがいる．各人は，表で ○ がついている仕事をすることが可能である．ただし，一人の人には多くとも一つの仕事しか割り振ることはできない．また，一つの仕事を二人以上の人に割り振ることもできない．

(1) 最大でいくつの仕事を割り振ることができるか．具体的な割り振りを一通り与えよ．

(2) (1) で与えた割り振りが，割り振りの個数の最大を与えることを示せ．

	1	2	3	4	5	6	7	8
A				○		○		
B	○			○	○	○		
C				○				
D	○					○		
E	○	○	○	○				○
F	○			○				
G	○							
H			○	○	○	○	○	○

問題7． ６つの整数u,v,w,x,y,zを入力として受け取り，絶対値が最大であるものの個数を返す関数をfとする．例えば，$f(-9,-1,7,9,-7,-9)=3$である．この場合，絶対値の最大値は9であり，絶対値が9である数は3個ある．また，$f(3,2,-3,-2,2,1)=2$である．この場合，絶対値の最大値は3であり，絶対値が3である数は2個ある．このとき，fをＣ言語の関数として作成せよ．

同様の機能を実現できるのであれば，Ｃ言語の代わりにＪａｖａ，Ｃ＋＋，ＰＡＳＣＡＬのいずれかのプログラミング言語を用いてもよい．ただし，どの言語を選んだかを明示すること．各自が使用する言語において整数型を選ぶとき，特に理由がなければＣ言語のｉｎｔ型のような符号付き整数用の一般的な型を用いるのが望ましい．ヘッダファイルのインクルードや名前空間の指定（たとえばＣ言語における `#include <stdio.h>` やＣ＋＋における `#include <iostream>`, `using namespace std;` など）は省略してよい．なお，本問の採点においてはアルゴリズムのあらすじを重視し，プログラミング言語に関する方言やささいな文法上の誤りについては寛容に対処する．

平成22年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成22年2月12日）
数学II (13:00 − 14:30)

1．次の9題から2題を選択して解答しなさい．

2．問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3．全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4．試験終了後，答案用紙は2枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1． 次の問いに答えよ．

(1) 群 G が巡回群であることの定義を与えよ．

(2) 有限群は，位数が素数であるとき，巡回群であることを示せ．

(3) n 次対称群 S_n の定義を与えよ．

(4) S_n の位数を求めよ．

(5) S_3 は巡回群とならないことを示せ．

問題 2． $\mathbb{Q}[x]$ は有理数を係数とし x を変数とする多項式全体からなる環とし，$\mathbb{Q}(x)$ はその商体とする．また，

$$R = \{g(x)/f(x) \mid f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x], f(0) \neq 0\}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) R は $\mathbb{Q}[x]$ を真に含む $\mathbb{Q}(x)$ の部分環であることを示せ．

(2) $R^{\times}$ で R の単元全体の集合を表す．$R^{\times}$ を求めよ．

(3) R の 0 でない任意の元は，0 以上の整数 n と $R^{\times}$ の元 u を用いて ux^n と一意的に表されることを示せ．

(4) R は単項イデアル整域であることを示せ．

問題 3． 関数 $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ を，

$$\tilde{f}(x,y,z) = \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\tilde{f}$ は，実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 上の関数 f を誘導することを示せ．

(2) f の値が最大になるような $\mathbb{RP}^2$ の点を求めよ．

(3) f の値が最小になるような $\mathbb{RP}^2$ の点全体からなる集合は，$\mathbb{RP}^1$ と同相であることを示せ．

問題 4． 2次元トーラス $S^1 \times S^1$ から開円板を除いてできる図形を X とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) X の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ．

(2) X とメビウスの帯を境界で貼りあわせた図形 Y の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ．

(3) Y から開円板を除いてできる図形 Z の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ．

問題 5． $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，g を X 上の非負の μ-可積分関数とし，$\mathcal{B}$ 上の集合関数 ν_g を

$$\nu_g(A) = \int_A g(x)\, d\mu(x) \qquad (A \in \mathcal{B})$$

によって定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ν_g は $\mathcal{B}$ 上の測度であることを示せ．

(2) X の部分集合 E に対して，X 上の関数 χ_E を

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in X \setminus E \end{cases}$$

によって定義する．$A \in \mathcal{B}$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_X \chi_A(x)\, d\nu_g(x) = \int_X \chi_A(x) g(x)\, d\mu(x)$$

(3) f を X 上の非負 $\mathcal{B}$-可測関数とする．このとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_X f(x)\, d\nu_g(x) = \int_X f(x) g(x)\, d\mu(x)$$

問題 6． $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ とし，$g(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ $(0 \le x \le 1)$ と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$ を計算せよ．

(2) $g(x) = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2\pi i m x}$ とフーリエ級数展開するとき，a_m を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ を求めよ．

問題 7． 定数 c および $\mathbb{R}$ 上の C^2 級の関数 $U(z)$ に対して，$u(x,t) = U(x-ct)$ とおくとき，$u(x,t)$ は

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad (-\infty < x < \infty,\ -\infty < t < \infty)$$

をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $U(z)$ のみたすべき 2 階の常微分方程式を求めよ．

(2) $U(z)$ が $z \to -\infty$ において $U(z) \to 2, U'(z) \to 0$ であり，$z \to \infty$ において $U(z) \to 1, U'(z) \to 0$ であるという境界条件をみたすとする．このとき，定数 c の値および $U(z)$ がみたすべき 1 階の常微分方程式を求めよ．

(3) 初期条件 $U(0) = \dfrac{3}{2}$ のもとで，(2) の 1 階の常微分方程式をみたす $U(z)$ を求めよ．

問題 8． 任意の正の整数 n に対して，$\varphi(n)$ で n 以下の n と互いに素（最大公約数が 1）となる正の整数の個数を表すものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) p, q を二つの異なる素数とし，$n = pq$ とするとき，$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ を示せ．

(2) p を素数とし，e を正の整数とするとき，$\varphi(p^e) = p^e\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$ を示せ．

(3) 2 以上の整数 n の素因数分解を $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ とする．ただし，r は正の整数で，p_1 から p_r は異なる r 個の素数，e_1 から e_r は正の整数とする．このとき，$\varphi(n) = n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \dfrac{1}{p_r}\right)$ を示せ．

問題 9． バッカス記法により，式を以下の生成規則 1. – 4. により定義する．

1. 式 ::= 項 | 式 + 項
2. 項 ::= 素 | 項 × 素
3. 素 ::= 変 | (式)
4. 変 ::= $a \,|\, b \,|\, c \,|\, d \,|\, e \,|\, x \,|\, y \,|\, z$

つまり，各行の「左辺 ::= 右辺」は左辺を右辺により定義するという意味で，また記号列 S, T に対して $S \,|\, T$ は S または T という意味である．例えば $a + b$ や $c \times z$ は式である．しかしながら $a - b$ や $e + f$ は式でない．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 記号列 $x \times (y + z)$ は式であることを証明せよ．

(2) 次の式 (i) $x + y \times z$, (ii) $(x + y) \times z$, (iii) $x + (y \times z)$ のうちで，その解析木である二分木が同じになるものを答えよ．

(3) 式 $a \times b + (c + d) \times e$ の解析木である二分木を構成せよ．

(4) (3) で構成した二分木を間順走査 (in-order) した節点 (node) を書き並べよ．ただし子は左を右に優先して走査する．

(5) (3) で構成した二分木を後順走査 (post-order) した節点を書き並べよ．ただし子は左を右に優先して走査する．

平成 22 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理工学研究科　数理情報科学専攻
入学試験（平成 22 年 2 月 12 日）
英語 (14:50 – 15:40)

1．次の 2 題に解答しなさい．

2．問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3．全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4．試験終了後，答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙は各自持ち帰ること．

問題 1. 次の文章を和訳せよ.

On the history of non-Euclidean geometry

Throughout the nineteenth century, geometries were developed which differed from Euclid's. The most prominent of these was projective geometry, whether real or complex; n-dimensional geometries were also introduced. However, these geometries were considered to be mathematical constructs, generalizing the idea of Space which could still be regarded as *a priori* Euclidean.

The overthrow of Euclid is due to the successful development of what may strictly be called non-Euclidean geometry: a system of ideas having as much claim as Euclid's to be a valid description of Space, but presenting a different theory of parallel lines.

In non-Euclidean geometry, given any line l and point P not on l, there are infinitely many lines through P coplanar with l but not meeting it. The consequences of this new postulate (together with the other Euclidean postulates) include: the angle sum of a triangle is always less than π, by an amount proportional to the area — so all triangles have finite area; and there is an absolute measure of length.

As is well known, non-Euclidean geometry was first described independently by Lobachevskii (1829) and Bolyai (1831), although Gauss had earlier come to most of the same ideas.

人名： Lobachevskii = ロバチェフスキー; Bolyai = ボリアイ.

出典: J. J. Gray, "Linear Differential Equations and Group Theory", Birkhäuser, 2000.

問題 2.　次の文章を英訳せよ.

V, W を体 K 上のベクトル空間とする．$F : V \longrightarrow W$ を線形写像とする．F が可逆であるとは，$F \circ G = id$ および $G \circ F = id$ をみたす線形写像 $G : W \longrightarrow V$ が存在することをいう．このとき，G を F に対する逆写像といい $G = F^{-1}$ または $F = G^{-1}$ と書く．

定理 $F : V \longrightarrow W$ を線形写像とし，F は単射かつ全射であると仮定する．このとき，F は可逆である．

証明 逆写像 $G : W \longrightarrow V$ を定義する必要がある．$w \in W$ とする．F は全射であるから，$F(v) = w$ をみたす要素 $v \in V$ が存在し，F が単射であるから，この要素 v は一意的に決まる．この $F(v) = w$ となる唯一の要素 $v \in V$ を $G(w)$ と定義する．ここで，G が線形であることを証明する．

$w_1, w_2 \in W$ とし，$v_1, v_2 \in V$ は $F(v_1) = w_2$ および $F(v_2) = w_2$ をみたすとする．このとき，$F(v_1 + v_2) = w_1 + w_2$ である．定義より，

$$G(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 = G(w_1) + G(w_2)$$

が成り立つ．さらに，もし c がスカラーであれば，$F(cv_1) = cF(v_1) = cw_1$ となる．したがって，

$$G(cw_1) = cv_1 = cG(w_1)$$

となるので，定理が証明された．

単射かつ全射である線形写像を同型写像という．

ヒント： 体 = field; 可逆 = invertible.