平成22年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
入学試験（平成21年9月1日）
数学I (9:30 − 11:30)

1． 次の問題1から問題7のうちから4題を選択して解答しなさい．
ただし，問題1（微分積分）と問題2（線形代数）は必ず選択すること．

2． 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3． 全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4． 試験終了後，答案用紙は4枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1.（微分積分） 次の問いに答えよ.

(1) 次の重積分に対し，積分範囲 D を図示し，積分値を求めよ.

$$\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x^2+y^2\leq e^2,\ y\geq 0\}.$$

(2) α を実数とする．数列 $\{a_n\}$ が任意の n に対して $a_n<\alpha$ を満たし，$\sup a_n=\alpha$ であるならば，$\{a_n\}$ の部分列で α に収束するものが存在することを示せ.

問題 2.（線形代数） a を複素数とする．$\mathbb{C}^3$ のベクトル

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}a+1\\a+1\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}2-a\\2a-1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$$

に対し次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ は一次独立でないことを示せ.

(2) $x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3=\mathbf{w}$ を満たす $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3$ の全体を，a の値により場合分けして求めよ.

(3) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3$ に対し $x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3\in\mathbb{C}^3$ を与える線形変換を f とする．f の固有値が 0 のみになるような a の値を求めよ.

問題 3. (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間とし，$f:X\longrightarrow Y$ を写像とする．f が連続写像であることを，次で定義する.

「X の任意の収束列 $\{x_n\}$ に対し，$\lim_{n\to\infty}x_n=x$ であれば，$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$ が成り立つ.」

f が連続写像であるための必要十分条件は，Y の任意の開集合 U に対し，逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合であることを示せ.

問題 4． V を条件 $z \geqq \sqrt{3x^2+3y^2}$ と $x^2+y^2+z^2 \leqq 4$ を満たす xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の点の集合とする．$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$ によって定義される円柱座標 r, θ, z を用いて，次の 3 重積分を計算せよ．

$$\iiint_V (x^2+y^2)\ dxdydz$$

問題 5． R を 2 以上の実数とする．複素平面上の，原点を中心とする半径 R の円の上半分 C_R と実軸上の線分 $[-R, R]$ を合わせた積分路を C とする．ただし，積分路は反時計回りとする．また，$f(z) = \dfrac{1}{z^4+4}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_C f(z)\ dz$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\ dz$ を求めよ．

(3) 実積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4}$ を求めよ．

問題 6． n を 2 以上の自然数とし，$U = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．U 上の 2 項関係 R を次のようにして定める．各々の $(i, j) \in U \times U$ に対して偏りのない硬貨を投げ，表が出た場合は $R(i, j)$，裏が出た場合は $\neg R(i, j)$ とする．ただし，$i, j \in U$ に対し「$R(i, j)$」で「$(i, j) \in R$」を表し，「$\neg R(i, j)$」で「$(i, j) \notin R$」を表すものとする．硬貨投げは毎回独立に行われるものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) R が対称律を満たす（すなわち，任意の $i, j \in U$ に対して「$R(i, j)$ ならば $R(j, i)$」となる）確率を求めよ．

(2) R が反対称律を満たす（すなわち，任意の $i, j \in U$ に対して「$(R(i, j)$ かつ $R(j, i))$ ならば $i = j$」となる）確率を求めよ．

問題 7．　５つの整数 x, y, z, u, w を入力として受け取る以下の関数 f をＣ言語の関数として作成せよ．

x, y, z, u, w がフルハウスであるとき $f(x, y, z, u, w)$ は 1 を返す．そうでないとき，$f(x, y, z, u, w)$ は 0 を返す．

ただし，ここで「x, y, z, u, w がフルハウスである」とは,「ある整数 a, b（ただし $a \neq b$）が存在して x, y, z, u, w のうち３つが a，残り２つが b である」ことをいうものとする．

例．$7, -1, 7, -1, -1$ は（この問題の意味での）フルハウスである．
$14, 2, 14, 14, 5$ はフルハウスではない．

同様の機能を実現できるのであれば，Ｃ言語の代わりにＪａｖａ, Ｃ＋＋, ＰＡＳＣＡＬのいずれかのプログラミング言語を用いてもよい．ただし，どの言語を選んだかを明示すること．各自が使用する言語において整数型を選ぶとき，特に理由がなければＣ言語のｉｎｔ型のような符号付き整数用の一般的な型を用いるのが望ましい．ヘッダファイルのインクルードや名前空間の指定（たとえばＣ言語における `#include <stdio.h>` やＣ＋＋における `#include <iostream>`, `using namespace std;` など）は省略してよい．なお，本問の採点においてはアルゴリズムのあらすじを重視し，プログラミング言語に関する方言やさささいな文法上の誤りについては寛容に対処する．

注意.「フルハウス」は本来，ポーカー（トランプゲームの一種）の役の名である．

平成22年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
入学試験（平成21年9月1日）
数学II (13:00 – 14:30)

1．次の9題から2題を選択して解答しなさい．

2．問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3．全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4．試験終了後，答案用紙は2枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1． p を素数とする．$\mathbb{R}$ を加法により群とみて，$\mathbb{Z}$ による剰余群を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とする．$a \in \mathbb{R}$ が代表する $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の元を $[a]$ で表す．各整数 $n \geq 0$ に対し，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の部分集合 G_n を

$$G_n := \{[a] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mid [p^n a] = [0]\}$$

と定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) 各整数 $n \geq 0$ に対し，$G_n \subset G_{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 各整数 $n \geq 0$ に対し，G_n は位数 p^n の巡回群であることを示せ．

(3) $G := \bigcup_{n \geq 0} G_n$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の部分群であることを示せ．

(4) G の任意の部分群 H $(\neq G)$ に対し，$H = G_n$ を満たす整数 $n \geq 0$ が存在することを示せ．

問題 2． 複素数からなる集合 I を次で定める．$\alpha \in \mathbb{C}$ に対し，$\alpha \in I$ であるとは，最高次の係数が 1 の整数係数多項式 $f(x)$ が存在し，$f(\alpha) = 0$ を満たすことであるとする．例えば $\sqrt{2}, \sqrt{-1}$ はそれぞれ $x^2 - 2 = 0$, $x^2 + 1 = 0$ の解なので I に属する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in I$ を証明せよ．

(2) $\frac{1}{2}$ は I に属さないことを証明せよ．

(3) 奇素数 p について，$\frac{1+\sqrt{p}}{2} \in I$ ならば $4 \,|\, (p-1)$ となることを証明せよ．

問題 3． ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の中の直線全体の集合を M とする．また $\mathbb{R}^2$ の中の y 軸と 1 点で交わる直線全体の集合を U, x 軸と 1 点で交わる直線全体の集合を V とする．次に，写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}) = (a, b),$$

写像 $\psi : V \to \mathbb{R}^2$ を

$$\psi(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = cy + d\}) = (c, d)$$

と定義する．また M の位相を

- φ, ψ は同相写像
- $W \subset M$ が開集合 $\Leftrightarrow$ $W \cap U$ が U の開集合，かつ，$W \cap V$ が V の開集合

で定める．次の問いに答えよ．

(1) M はハウスドルフ空間であることを示せ．

(2) M は $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ を座標近傍系とする C^∞ 級多様体であることを示せ．

(3) M は向き付け可能か．

問題 4． $\mathbb{R}^3$ にある曲面 S のパラメータ表示

$$p(u, v) = ((b + a\cos u)\cos v, (b + a\cos u)\sin v, a\sin u)$$
$$(0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi)$$

を使って，次の問いに答えよ．ただし，$0 < a < b$ とする．

(1) S の面積を求めよ．

(2) S のガウス曲率 K および平均曲率 H を求めよ．

(3) 積分 $\displaystyle\int_S (H^2 - K)\, dA$ を計算し，この積分が最小値をとるのは a と b がどのような条件を満たすときであるか答えよ．ただし，ここで dA は S の面積要素を表すとする．

問題 5． ヒルベルト空間 H について，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $x, y \in H$ に対して

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) H の閉部分空間 K が与えられているとする．このとき，H の元 x に対して，$\delta := \inf\{\|x - y\| \mid y \in K\}$ とおく．このとき，K に含まれる点列 $\{y_n\}$ で，ノルム $\|x - y_n\|$ が δ に収束するようなものが存在することを示せ．(相異なる n, m に対して y_n と y_m とが異なるとは限らない．)

(3) 点列 $\{y_n\}$ はコーシー列であることを示せ．

(4) $x \in K$ と $\delta = 0$ とが同値であることを示せ．

問題 6． 開区間 $(0,1)$ における Lebesgue 可積分関数列 $\{f_n\}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n n & 0 < x < \dfrac{1}{n^2} \\ 0 & x \geqq \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

で定義するとき，次の問いに答えよ.

(1) $\{f_n\}$ は 0 に L^1 収束することを示せ.

(2) $\{f_n\}$ は 0 に L^2 収束しないことを示せ.

(3) $(0,1)$ の各点 x に対して，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ を示せ.

(4) 閉区間 $[0,1]$ 上の任意の連続関数 g に対して，次の (a), (b) が成り立つことを示せ.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)\,dx = 0$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)^2 g(x)\,dx = g(0)$

問題 7．

(1) 次に挙げる Schwarz の補題を証明せよ.

単位円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数 $f(z)$ は次の条件 (i), (ii) をともに満たすとする.

(i) 任意の $z \in D$ に対し，$|f(z)| \leq 1$ が成り立つ.

(ii) $f(0) = 0$.

このとき，D において $|f(z)| \leq |z|$ が成り立つ．さらに，ある $z_0 \in D\setminus\{0\}$ が存在して，$|f(z_0)| = |z_0|$ であるとき，絶対値 1 の定数 $\alpha \in \mathbb{C}$ があり，D 上で恒等的に $f(z) = \alpha z$ が成り立つ.

(2) 次のことを示せ.（Schwarz の補題を用いてよい.）

単位円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数 $f(z)$ は次の条件 (i), (ii) をともに満たすとする.

(i) 任意の $z \in D$ に対し，$f(z) \in D$ が成り立つ.

(ii) ある $a, b \in D$, $a \neq b$ が存在して，$f(a) = a$, $f(b) = b$ が成り立つ.

このとき，D 上で恒等的に $f(z) = z$ が成り立つ.

問題 8． 正の整数 a, b に対して，その最大公約数 d と $ra+sb=d$ なる整数 r, s を求めるために，次のような手順 E を考えよう:

初期化 $(d,\ x,\ r,\ y) \leftarrow (a,\ b,\ 1,\ 0)$.

除算 $d \div x$ の商を Q, 余りを R として $(d,\ x,\ r,\ y) \leftarrow (x,\ R,\ y,\ r-yQ)$.

終了確認 もし $x=0$ なら $s \leftarrow (d-ar)/b$ として $(d,\ r,\ s)$ を出力して終了，さもなくば再び**除算**へ.

ただし，$A \leftarrow B$ は B を計算した後，その値の A への代入である.

(1) 手順 E を $a=1221, b=1001$ に対して実行した過程を書け.

(2) a, b のそれぞれを 2, 3, 5, 7, 11, ... の試し割算により素因数分解して最大公約数 d を求める手順を F とする．$a=1221, b=1001$ に対し，手順 F で必要な除算回数を答えよ．また，手順 E と手順 F の効率を比較せよ.

(3) 手順 E の停止性 — 即ち有限回で終了すること — を示せ.

(4) 手順 E の部分正当性 — 即ち終了した場合に結果が正しいこと — を示せ．ただし，必要なら以下の (i), (ii) を用いてもよい.

(i) ループ不変条件: $\gcd(a,\ b)=\gcd(d,\ x)$ (即ち**除算**反復毎に先頭と最後で常時成立している条件).

(ii) ループ不変条件: $ar-d \equiv ay-x \equiv 0 \pmod{b}$.

問題 9． 元の個数が q の有限体を $\mathbb{F}_q$ で表す．n を任意の自然数として，次の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{F}_q$ の元を成分とする $n \times n$ 行列の総数を求めよ.

(2) ${\mathbb{F}_q}^n = \underbrace{\mathbb{F}_q \times \cdots \times \mathbb{F}_q}_{n\text{ 個}}$ を $\mathbb{F}_q$ 上のベクトル空間と考える．このとき，${\mathbb{F}_q}^n$ の零でない元 u に対し，u, v が 1 次独立となるような $v \in {\mathbb{F}_q}^n$ の総数を求めよ.

(3) (1) の行列の中で，正則なものの総数を求めよ.

平成22年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
入学試験（平成21年9月1日）
英語 (14:50 – 15:40)

1． 次の2題に解答しなさい．

2． 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3． 全ての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4． 試験終了後，答案用紙は2枚とも提出すること．問題用紙は各自持ち帰ること．

問題１． 次の文章の点線 $\cdots$ を引いたところより上の部分を和訳せよ．

Geometry versus Algebra

Geometry and algebra are the two formal pillars of mathematics; they are both very ancient. Geometry goes back to the Greeks and before; algebra goes back to the Arabs and the Indians. They have both been fundamental to mathematics, but they have had an uneasy relationship.

Let me try to explain my own view of the difference between geometry and algebra. Geometry is, of course, about space. Our brains have been constructed so that they are closely concerned with vision. Even a brief glance allows us to take in a vast amount of information. Understanding the world that we see is a very important part of our evolution. Therefore, spatial perception is a very powerful tool, and that is why geometry is a very powerful part of mathematics.

Algebra, on the other hand, is concerned essentially with time. Whatever kind of algebra you do, you perform a sequence of operations. Any algorithm, any process for calculation, is a sequence of steps performed one after the other. The modern computer takes its information in a stream of zeros and ones, and it gives the answer.

. . . .

In a static universe you cannot imagine algebra, but geometry is essentially static. Algebra is concerned with manipulation in time, and geometry is concerned with space. They represent two different points of view in mathematics.

Algebra is to the geometer what you might call the "Faustian offer"; algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says 'I will give you this powerful machine, which will answer any question. In return, you must give me your soul. Give up geometry and you will have this marvellous machine.'

出典： M. F. Atiyah, "Mathematics in the 20th Century", Bulletin of the London Mathematical Society, 2002.

問題 2． 次の文章の点線 $\cdots$ を引いたところより上の部分または下の部分のいずれかを英訳せよ．解答の際には，どちらの部分を選んだか明示すること．

定理． f を閉区間 $a \leq x \leq b$ 上の連続関数とする．このとき，この区間内に，$f(c)$ が最大値となる点 c と，$f(d)$ が最小値となる点 d が存在する．

証明． 最初に，f が上に有界であることを証明しよう．すなわち，この区間内のすべての x に対し，$f(x) \leq M$ となる数 M が存在することを証明する．もし f が有界でないならば，任意の正の整数 n に対し，区間内の数 x_n で $f(x_n) > n$ となるものを見つけることができる．このような x_n の数列は，この区間内に集積点 C をもつ．このとき，

$$|f(x_n) - f(C)| \geq |f(x_n)| - |f(C)| > n - f(C).$$

である．与えられた $\varepsilon > 0$ に対し

$$|x_n - C| < \delta$$

であるときはいつでも $|f(x_n) - f(C)| < \varepsilon$ となるような $\delta > 0$ が存在する．C は集積点であるから，これは無限個の n に関してそうなるはずである．これは明らかに矛盾なので，この関数が上に有界であるという結論に達した．

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

β を，区間内のすべての x に対する $f(x)$ の値の上限とする．このとき，与えられた正の整数 n に対して，この区間内に

$$|f(z_n) - \beta| < \frac{1}{n}$$

を満たす数 z_n を見つけることができる．

c を数列 $\{z_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ の集積点とすると，$f(c) \leq \beta$ である．ここで，$f(c) = \beta$ が成り立つことを示す．

与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，$|z_n - c| < \delta$ のときは，つねに

$$|f(z_n) - f(c)| < \varepsilon$$

であるような δ が存在する．c は数列 $\{z_n\}$ の集積点であるので，これは無限個の n に対して起こる．このとき，

$$|f(c) - \beta| \leq |f(c) - f(z_n)| + |f(z_n) - \beta| < \varepsilon + \frac{1}{n}$$

である．これは任意の ε と無限個の正の整数 n に対して真である．したがって，$|f(c) - \beta| = 0$ となり，$f(c) = \beta$ がいえる．最小値の存在の証明も同様である．

ヒント： 集積点 = accumulation point