平成２１年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
入学試験（平成21年2月12日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1. 次の問題 1 から問題 7 のうちから 4 題を選択して解答しなさい．
   ただし，問題 1（微分積分）と問題 2（線形代数）は必ず選択すること．
2. 問題ごとに別の答案用紙を用いなさい．
3. 全ての答案用紙に，氏名・受験番号・選択した問題の番号を記入すること．
4. 試験終了後，答案用紙は 4 枚とも回収します．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1.（微分積分） 実数全体で連続な関数 $f(x)$ が次の等式をみたしているとする．

$$\int_0^x t^2 f(t)\,dt + 2\int_0^x t f(t)\,dt = x - 4\int_0^x f(t)\,dt$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ の値を求めよ．

(4) 2 変数関数 $g(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}-1)$ に対して次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D g(x,y)\,dxdy\,, \qquad D = \left\{\,(x,y)\;\middle|\;1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9\,\right\}$$

問題 2.（線形代数） n を自然数とし，$\mathbb{C}^n$ を n 次複素列ベクトル全体の集合とする．また，$M(n,\mathbb{C}) = \{(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)\,|\,\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{C}^n\ \ (i=1,\ldots,n)\}$ とおき，$f : M(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を多重線形性および交代性をもつ写像とする．すなわち，任意の $i, j\ (1 \le i, j \le n,\ i \ne j)$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ に対して，

- $f(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\lambda\boldsymbol{v}_i + \lambda'\boldsymbol{v}'_i,\ldots,\boldsymbol{v}_n) = \lambda f(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i,\ldots,\boldsymbol{v}_n) + \lambda' f(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}'_i,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$,
- $f(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i,\ldots,\boldsymbol{v}_j,\ldots,\boldsymbol{v}_n) = -f(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_j,\ldots,\boldsymbol{v}_i,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$

をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $A = [a_{ji}]$ を n 次複素正方行列とするとき，A の第 i 列 $\boldsymbol{a}_i$ を，$\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合で表せ．ただし，$\boldsymbol{e}_j\ (j=1,\ldots,n)$ は，第 j 成分が 1 であり，他の成分がすべて 0 の n 次列ベクトルとする．

(2) $j_1, j_2, \ldots, j_n \in \{1,2,\ldots,n\}$ のうちの少なくとも 2 つが同じ数のとき，$f(\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{j_n}) = 0$ であることを示せ．また，$\{1,2,\ldots,n\}$ の置換 σ に対し，$f(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ を示せ．ただし，

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma\ \text{は偶置換}) \\ -1 & (\sigma\ \text{は奇置換}) \end{cases}$$

とする．

(3) ここで，$M(n,\mathbb{C})$ の要素 A を n 次正方行列とみなすとき，$f(A) = \det(A) f(I_n)$ であることを示せ．ただし，I_n は n 次単位行列とし，$\det(A)$ は A の行列式

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n} \qquad (\mathfrak{S}_n\ \text{は}\ \{1,\ldots,n\}\ \text{の置換全体の作る集合})$$

とする．

(4) n 次複素正方行列 A, B に対し，$\det(BA) = \det(A)\det(B)$ が成り立つことを (3) を使って示せ．

問題 3． (X,d), (Y,d') を距離空間とし，A を (X,d) のコンパクト部分集合とするとき，次の問いに答えよ．ただし，A がコンパクト部分集合であることは,「(X,d) における A の任意の開被覆は有限部分被覆をもつ」で定義する．

(1) A は有界集合であることを示せ．

(2) $f: X \longrightarrow Y$ を (X,d) から (Y,d') への連続写像とするとき，A の像 $f(A)$ は (Y,d') のコンパクト部分集合であることを示せ．

問題 4. 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の開集合で定義された微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{a} = (\, a_1,\, a_2,\, a_3\,)$ に対して，その発散 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ と回転 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ を次で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z},\, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x},\, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right)$$

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (\, xy,\, zx,\, yz\,)$ に対して次を求めよ．

(a) $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ (b) $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ (c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})$

(2) C^2 級のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ に対して $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = 0$ が成り立つことを示せ．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{b} = (\, xy - x,\, zx - y^2,\, yz - z\,)$ に対して $\boldsymbol{b} = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ をみたす C^2 級のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ は存在するか．その理由とともに答えよ．

問題 5. 実定数 α に対して複素関数 $f(z)$ を次式で定義する．

$$f(z) = e^{\alpha y}(\cos x + i\,\sin x) \qquad (\, z = x + i\,y\,)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ が複素平面全体で正則となるとき α と $f(z)$ を求めよ．

(2) C を正の向き (反時計回り) をもつ円 $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 2\}$ とする．(1) で求めた $f(z)$ に対して C に沿う次の複素積分の値を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z - (\pi/2)}\,dz$ (b) $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z(z+3)}\,dz$ (c) $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z^2+1}\,dz$

問題 6. P，Q は命題を表し「P または Q」は真であるとする．このとき次の (1), (2), (3) の各々の命題について,「真」,「偽」,「これだけの情報では真とも偽とも断定できない」のいずれがあてはまるか．その理由とともに答えよ．

(1) 「P かつ Q」
(2) 「P ならば Q」
(3) 「『P でない』ならば Q」

問題 7. k は 2 以上の自然数であるとする．いま k を固定し，各々の正の整数 n に対し，n を k 進法で表したときの桁数を $f(n)$ で表す．たとえば $k=2$ のとき $f(7)=3$，$f(8)=4$ である．定数関数（独立変数の値によらずに一定の値をとる関数），四則演算，対数関数（底は k），$\lfloor\ \rfloor$ の合成関数によって $f(n)$ を表せ．ただし実数 a に対して a を越えない最大の整数を $\lfloor a \rfloor$ で表す．たとえば $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$，$\lfloor 2.828 \rfloor = 2$ である．

平成２１年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
入学試験（平成21年2月12日）
数学II (13:00 − 14:30)

1. 次の9問から2問を選択して解答しなさい．
2. 問題ごとに別の答案用紙を用いなさい．
3. 全ての答案用紙に，氏名・受験番号・選択した問題の番号を記入すること．
4. 試験終了後，答案用紙は2枚とも回収します．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1. R を環 $\{a+b\sqrt{5} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $I=(5)$ は R の素イデアルでないことを証明せよ.

(2) $J=(\sqrt{5})$ は R の極大イデアルであることを証明せよ.

(3) R の単元（すなわち，積に関して逆元をもつ元）で, ± 1 以外のものを一つ求めよ．その元を α とするとき, 群 $(R/J)^{\times}=(R/J)\setminus\{0\}$ における $\alpha+J$ の位数を求めよ.

問題 2. R を零元と異なる単位元を持つ可換環，K を体，L を K の拡大体とする．以下，環準同型写像は単位元を単位元に写すものと考える．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\{0\}$ と R 以外に R のイデアルが存在しないならば，R は体であることを示せ.

(2) 環準同型写像 $f: K \longrightarrow R$ は単射であることを示せ.

(3) L の K 上の拡大次数 $[L:K]$ の定義を述べよ.

(4) $[L:K]$ が有限ならば，任意の $a \in K$ に対し $f(a)=a$ となる環準同型写像 $f: L \longrightarrow L$ は全射であることを示せ.

問題 3. C^{∞} 級写像 $\gamma: \mathbb{R}\times[0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の座標を用いて $\gamma(\theta,t)=(\gamma_1(\theta,t),\gamma_2(\theta,t))$ と表す．ただし，T は正数とする．γ が，ある正値関数 $a: \mathbb{R}\times[0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し,

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}(\theta,t)=(-a(\theta,t)\sin\theta, a(\theta,t)\cos\theta)$$

であるとき，次の問いに答えよ.

(1) 各 t に対し曲線 $\gamma(\cdot,t): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ の曲率 $\kappa(\cdot,t)$ は至るところ正であることを証明せよ.

(2) 関数 $F: \mathbb{R}\times[0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(\theta,t)=\gamma_1(\theta,t)\cos\theta+\gamma_2(\theta,t)\sin\theta$$

と定義するとき,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(\theta,t)+F(\theta,t)=\frac{1}{\kappa(\theta,t)}$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) さらに γ が平均曲率流方程式

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(\theta,t)=(-\kappa(\theta,t)\cos\theta, -\kappa(\theta,t)\sin\theta)$$

をみたすとき，F を利用して

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\kappa^2\left(\frac{\partial^2\kappa}{\partial\theta^2}+\kappa\right)$$

を導け.

問題 4. 1 つ穴のあいたトーラスの境界と, メビウスの帯の境界を貼りあわせてできる閉曲面を S とする．また, 3 つ穴のあいた球面の 3 つの境界と, 3 個のメビウスの帯の境界を, それぞれ貼りあわせてできる閉曲面を S' とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) S と S' は同相であることを示せ．

(2) S の $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群を計算せよ．

問題 5. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は測度空間で $\mu(X) < +\infty$ であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して

$$A_n = \left\{ x \in X \;\middle|\; \{x\} \in \mathcal{M} \text{ かつ } \mu(\{x\}) > \frac{1}{n} \right\}$$

とする．このとき，A_n は有限集合であることを証明せよ．

(2) $\{x\} \in \mathcal{M}$ かつ $\mu(\{x\}) > 0$ をみたす点 $x \in X$ は高々可算個しか存在しないことを証明せよ．

問題 6.

(1) 平均 m 分散 σ^2（$m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$）の正規分布

$$\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\ dx$$

の特性関数

$$\psi(z;\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\mu(dx), \quad z \in \mathbb{R}$$

を求めよ．このとき，

(*)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ia)^2}\ dx = \sqrt{\pi}$$

（a は実定数）を用いてよい．

(2) X，Y を独立で，それぞれ平均 m_1 分散 σ_1^2 の正規分布，平均 m_2 分散 σ_2^2 の正規分布に従う確率変数とする．$X+Y$ はどのような分布に従うか．

(3) (1) で用いた定積分の式 (*) を証明せよ．

問題 7. α を正数，$G(x,y)$ を $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ に関して連続な関数とし，$u_1(x) \equiv 0$,

$$u_{n+1}(x) = \alpha \int_0^1 G(x,y) \frac{1}{1+u_n(y)^2}\, dy, \quad x \in [0,1] \quad (n \geq 1)$$

によって $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)
$$M = \max_{0 \leq x \leq 1} \left(\int_0^1 |G(x,y)|\, dy \right)$$
とおくとき，
$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \alpha M \|u_n - u_{n-1}\| \quad (n \geq 2)$$
を示せ．ただし，$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ とする．

(2) 任意の $n < m$ に対し，
$$\|u_m - u_n\| \leq \Bigl(\sum_{k=n-1}^{m-2} (\alpha M)^k \Bigr) \|u_2 - u_1\|$$
を示せ．

(3) $\alpha M < 1$ とするとき，$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0,1]$ 上で，ある連続関数 $u(x)$ に一様収束することを示せ．また，
$$u(x) = \alpha \int_0^1 G(x,y) \frac{1}{1+u(y)^2}\, dy, \quad x \in [0,1]$$
が成り立つことを示せ．

問題 8. 次の小問 (1) から (5) のうち 3 問を選んで解答せよ．どの小問を選んだか明記してから答えること．ただし，4 問以上を選んではいけない．

(1) おもに科学技術計算を用途とする高速電子計算機システムにおいて，処理の高速化を実現するため用いられているハードウェア上の各種技法にはどのようなものがあるか，例を挙げて論述せよ．

(2) 電子計算機システムの（オンデマンド・ページング方式による）「仮想記憶」とはどのようなものであるか，どのように実現されているか，どのような利点があるかについて，論述せよ．

(3) 電子計算機システムの信頼性や障害耐久性を高める為に用いられている技法について，例を挙げて論述せよ．

(4) ある与えられた問題に対して，電子計算機システムを使用した効率の良い解法を得ようとするとき必要な作業について，全般的に論述せよ．

(5) 今後，計算のさらなる高速化を実現していく上で，追求すべき各種の技術上の課題について，例を挙げて論述せよ．

問題 9. 0 以上の整数 n に対して

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1)

$$F_{n+1} = F_0 F_1 \cdots F_n + 2 \quad (n \geq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 0 以上の相異なる整数 k, l に対して，F_k と F_l は互いに素（つまり最大公約数が 1）であることを，(1) の性質を用いて示せ．

(3) 各 F_n の素因子に着目し，素数が無限に存在することを示せ．

平成２１年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
入学試験（平成21年2月12日）
英語 (14:50 – 15:40)

1. 次の2問に解答しなさい．
2. 問題ごとに別の答案用紙を用いなさい．
3. 全ての答案用紙に，氏名・受験番号・選択した問題の番号を記入すること．
4. 試験終了後，答案用紙は2枚とも回収します．問題用紙は各自持ち帰ること．

問題 1. 次の文章の点線 $\cdots$ を引いたところより上の部分または下の部分のいずれかを和訳せよ.

The idea of the complex logarithm

The logarithm of the product of two numbers is equal to the sum of their logarithms: $\log ab = \log a + \log b$. This property had fundamental importance to computational practice in earlier times. Nowadays we use electronic calculators to do our multiplication for us. Although this is faster and more accurate, we lose something very significant for our understanding if we gain no direct experience of the beautiful and deeply important logarithmic operation. We shall see that logarithms have a profound role to play in relation to complex numbers.

Take any nonzero number b. We have

$$b^{m+n} = b^m \times b^n$$

if m and n are positive integers. We have to find a way of generalizing this so that m and n can be any complex numbers. For this we need to find the right definition of "b raised to the power z" for complex z. First, we allow z to be zero, defining $b^0 = 1$. Next, we allow z to be a negative integer, defining b^{-1} to be the reciprocal of b.

If b is positive, then we define $b^{1/n}$ to be the n-th root of b, when n is a positive integer, and this leads to a definition of $b^{m/n}$ for any rational number m/n. By taking limits, we can define b^z for any real number z. However, if b is allowed to be negative, then $\sqrt{b}$ requires the introduction of i, and we are unavoidably led to the complex numbers. There we find our magical complex world, so let us brace ourselves and go all the way down.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

We shall start by making a particular choice of b, namely the fundamental number e. We define e^z by

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

This important series converges for all values of z, and satisfies $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Then we define the natural logarithm function as the inverse of the exponential function:

$$z = \log w \quad \Longleftrightarrow \quad w = e^z.$$

It is not immediately obvious that such an inverse will necessarily exist. It turns out that, for any nonzero complex number w, there always does exist z such that $w = e^z$. But there is more than one answer.

This feature of the complex logarithm seems, at this stage, to be just an awkward irritation. However, we shall see that it is absolutely essential to some of the most powerful, useful, and magical properties of complex numbers.

One way to understand this ambiguity is to note the striking formula

$$e^{2\pi i} = 1$$

whence $e^{z+2\pi i} = e^z = w$.

出典（和訳不要）：R. Penrose, The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe, Vintage (2005)

問題 2. 次の文章の点線 $\cdots$ を引いたところより上の部分または下の部分のいずれかを英訳せよ．

一様連続定理． f を閉区間 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上で連続な関数とするとき，f は I 上で一様連続である．

証明．f が I 上で一様連続でないと仮定して矛盾を導く．もし f が一様連続でないならば，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在し，以下のような性質を持つ $\delta > 0$ が存在しないようにできる：$|x_1 - x_2| < \delta$ となるすべての対 $x_1, x_2 \in I$ に対して $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_0$ となる．このとき，各正の整数 n に対して，I 上の対 x'_n, x''_n で

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0 \tag{*}$$

をみたすものが存在する．

....

Bolzano-Weierstrass の定理より，$\{x'_n\}$ の部分列（これを $\{x'_{n_k}\}$ とあらわすことにする）で，I 内のある数 x_0 に収束するものが存在する．このとき，$|x'_{k_n} - x''_{k_n}| < 1/k_n$ であるから，$x''_{k_n} \to x_0$ $(n \to \infty)$ であることがわかる．f が I で連続であるという事実を使うと，

$$f(x'_{k_n}) \to f(x_0), \quad f(x''_{k_n}) \to f(x_0)$$

が得られる．よって，正の整数 N_1 と N_2 が存在して，$n > N_1$ ならば $|f(x'_{k_n}) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon_0$, $n > N_2$ ならば $|f(x''_{k_n}) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon_0$ をみたす．したがって，N_1 と N_2 の両方より大きいすべての n に対して，

$$|f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \leq |f(x'_{k_n}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x''_{k_n})| < \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 = \varepsilon_0$$

であることがわかる．最後の不等式は (*) に矛盾するので，結果が得られた．