平成２１年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
入学試験（平成20年9月2日）
数学I (9:30 − 11:30)

次の問題1から問題7のうちから4題を選択して解答しなさい．
ただし，問題1（微分積分）と問題2（線形代数）は必ず選択すること．

問題ごとに別の答案用紙を用いなさい．

問題 1.（微分積分） 次の問いに答えよ．

(1) 中間値の定理を述べよ（証明は不要）．

(2) 実数値関数 $f(x)$ は閉区間 $[-1, 1]$ で連続で，$f(-1) = 1/2$, $f(1) = -1/2$, $0 < f(0) < 1$ であるとする．

(a) 方程式 $x + 1 = f(x)$ の解 α が開区間 $(-1, 0)$ に存在することを示せ．

(b) 方程式 $x - 1 = f(x)$ の解 β が開区間 $(0, 1)$ に存在することを示せ．

(c) $f(x)$ が開区間 $(-1, 1)$ で微分可能で，$-1 < f'(x) < 1$ を満たしているならば，(a), (b) で求めた α, β はともに唯一つの解であり，$\beta > \alpha + 1$ が成り立つことを示せ．

問題 2.（線形代数） 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 \\ -6 & 7 & 18 & -6 \\ 2 & -2 & -5 & 2 \\ -2 & 4 & 12 & -2 \end{bmatrix}$ の最小多項式を求めよ．

(2) B を複素数を成分に持つ n 次正方行列で，$B^3 = B$ をみたすものとする．

(a) α を B の固有値とするとき，α は $0, 1, -1$ のいずれかであることを示せ．

(b) B が対角行列のとき，

$$\operatorname{rank} B + \operatorname{rank}(B + E) + \operatorname{rank}(B - E) = 2n$$

が成り立つことを示せ．

(c) B が必ずしも対角行列とは限らない場合も

$$\operatorname{rank} B + \operatorname{rank}(B + E) + \operatorname{rank}(B - E) = 2n$$

が成り立つことを示せ．ただし，E は n 次単位行列であるとする．

問題 3. X, Y を位相空間とし，$X \times Y$ をそれらの直積位相空間とする．また，$p : X \times Y \longrightarrow Y$ を $p(x, y) = y$ $(x \in X, y \in Y)$ で定義される射影とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $X \times Y$ 上の直積位相の定義を述べよ．

(2) X, Y がともに数直線 $\mathbb{R}$ であるとき，$X \times Y = \mathbb{R}^2$ の閉集合 S で，像 $p(S)$ が $\mathbb{R}$ の閉集合ではないような例を与えよ．

(3) X がコンパクトであるとき，$X \times Y$ の任意の閉集合 S に対し，像 $p(S)$ は Y の閉集合であることを示せ．

問題 4. 次式でパラメータ表示される曲面（トーラス）を S とする．

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \big((3+\cos v)\cos u,\, (3+\cos v)\sin u,\, \sin v\big), \qquad D:\, 0 \leqq u \leqq 2\pi,\, 0 \leqq v \leqq 2\pi$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 接ベクトル $\boldsymbol{r}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\boldsymbol{r}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ．

(2) S の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$ を求めよ．ただし，$\times$ は 3 次元ベクトルの外積で，$|\quad|$ はベクトルの長さを表す．

(3) S の面積 $A = \displaystyle\iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, dudv$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$ の面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, dudv$ の値を求めよ．

問題 5. 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 4iz - 1}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．

(2) θ を実数とするとき $ie^{i\theta} f(e^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\sin\theta - 4}$ であることを示せ．

(3) 曲線 C は円 $|z| = 1$ で，向きを正の向き (反時計回り) とするとき，複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\, dz$ の値を求めよ．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \sin\theta}$ の値を求めよ．

問題 6. 3 つの整数 x, y, z を入力として受け取り，集合 $\{x, y, z\}$ の要素の個数を返すＣ言語の関数を作成せよ．同様の機能を実現できるのであれば，Ｃ言語の代わりにＪａｖａ，Ｃ++，ＰＡＳＣＡＬ，Ｃ＃のいずれかのプログラミング言語を用いてもよい．ただし，どの言語を選んだかを明示すること．x, y, z は正とは限らず，負あるいは 0 の場合もありえる．各自が使用する言語において整数型を選ぶとき，特に理由がなければＣ言語の int 型のような符号付き整数用の一般的な型を用いるのが望ましい．ヘッダファイルのインクルードや名前空間の指定（たとえばＣ言語における ♯include <stdio.h> やＣ＋＋における ♯include <iostream>，using namespace std; など）は省略してよい．なお，本問の採点においてはアルゴリズムのあらすじを重視し，プログラミング言語に関する方言やささいな文法上の誤りについては寛容に対処する．

問題 7． V は空でない有限集合であるとし，V の要素を頂点とよぶ．また，E は頂点を結ぶ辺の集合であるとする．ここでは任意の頂点 a，b に対して a から b に向かう辺と b から a に向かう辺を区別しない．このとき $G=(V,E)$ を無向グラフという．ただし，ループ，つまり頂点 a と a 自身を結ぶ辺が E に属してもよいが，任意の頂点対に対し，それを結ぶ辺は多くとも 1 個とする．形式的には，頂点 a と b を結ぶ E の辺を (a,b) または (b,a) であらわす．また，自然数 $n \geq 2$ と頂点の列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ について $(a_i, a_{i+1}) \in E$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ となるとき，頂点の列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ をこのグラフにおける道（径路，path）という．ただし，$i \neq j$ かつ $a_i = a_j$ となる i, j があってもよい（自己交差があってもよい）．道において始点と終点が等しいとき（すなわち，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ において $a_1 = a_n$ であるとき），この道を閉路（cycle，あるいは circuit）とよぶ．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 無向グラフにおけるオイラー閉路の定義を述べよ．

(2) 無向グラフにおけるハミルトン閉路の定義を述べよ．

(3) 頂点の個数が 6 以下かつ辺の個数が 7 以上の無向グラフであって，オイラー閉路とハミルトン閉路をどちらも持つものの例をひとつ図示せよ．また，そのグラフのオイラー閉路とハミルトン閉路をひとつずつ示せ（頂点の列によって示せ）．

平成２１年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
入学試験（平成20年9月2日）
数学II (13:00 − 14:30)

次の9問から2問を選択して解答しなさい．

問題ごとに別の答案用紙を用いなさい．

問題 1. $M_2(\mathbb{Q})$ を成分が有理数の 2 次正方行列全体からなる集合とする．$A \in M_2(\mathbb{Q})$ に対し，

$$L_A = \{aE + bA \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

とおく（ただし，E は単位行列とする）．このとき，次の問いに答えよ．

(1) L_A は行列の和と積に関して可換環になることを示せ.

(2) A が有理数でない固有値をもつとき，L_A は体になることを示せ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，体 L_A は体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ に同型であることを示せ.

問題 2. $\mathbb{Z}$ 上の 1 変数多項式環 $\mathbb{Z}[X]$ の元 $f(X)$ に対し，写像

$$\Phi_{f(X)} : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}[X]; \quad h(X) \longmapsto h(f(X))$$

を考える．ただし，$h(f(X))$ は，$h(X)$ の変数 X に $f(X)$ を代入することにより得られる $\mathbb{Z}[X]$ の元とする．また，本問では，環準同型写像はつねに単位元を単位元に写すものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の環準同型写像 $\Phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}[X]$ に対し，$\Phi = \Phi_{f(X)}$ をみたす $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ が存在することを示せ.

(2) $\mathbb{Z}[X]$ の元 $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ (n は非負整数, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$) に対し，$\Phi_{f(X)}$ が全射になるための必要十分条件は，$n = 1$ かつ $a_1 \in \{1, -1\}$ であることを示せ.

(3) 集合 $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}[X] = \{\Phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \mid \Phi$ は全射環準同型写像 $\}$ は，写像の合成に関して群をなすことを示せ.

(4) $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}[X]$ は可換群でないことを示せ.

問題 3. S^1 を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし， I を閉区間 $[0,1]$ とする．直積空間 $S^1 \times I$ において，$(z, 0)$ と $(-z, 1)$ を同一視して得られる曲面を T とする．また，$S^1 \times I$ において，$(z, 0)$ と $(\bar{z}, 1)$ を同一視して得られる曲面を K とする．ただし, $\bar{z}$ は z の複素共役をあらわす．このとき，次の問いに答えよ．

(1) T と K の 1 次元ホモロジー群 $H_1(T; \mathbb{Z})$ と $H_1(K; \mathbb{Z})$ を求めよ.

(2) T と K がホモトピー同値ではないことを示せ.

問題 4. 次の問いに答えよ．

(1) 写像 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ で定義する．$J(f)$ を f のヤコビ行列とする．したがってこの場合，$J(f)$ は行ベクトル $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ である．$\mathbb{R}^3$ の各点 (x,y,z) での $J(f)$ の階数を求めよ．

(2) 陰関数定理を用いて，$f^{-1}(0)$ が C^∞ 級の可微分多様体であることを示し，その次元を求めよ．

(3) 写像 $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$g(x,y,u,v) = (x^2 + y^2 - 1, u^2 + v^2 - 1, xu + yv)$$

で定義する．$g^{-1}(\mathbf{0})$ の各点での g のヤコビ行列 $J(g)$ の階数を求めよ．ただし，$\mathbf{0}$ は，$\mathbb{R}^3$ の原点とする．

(4) $g^{-1}(\mathbf{0})$ が C^∞ 級の可微分多様体であることを示し，その次元を求めよ．

問題 5. $Q : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ を有界連続関数とし，$M = \sup_{t\in[0,\infty)} |Q(t)|$ とおく．$\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ をパラメータとし，$y(t)$ を次の初期値問題の解とする．

$$\begin{cases} y''(t) + (\omega^2 + Q(t))y(t) = 0, & t \in [0,\infty), \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \end{cases}$$

また，$[0,\infty)$ 上の関数列 $\{u_n(t)\}_{n=0}^\infty$ を漸化式

$$\begin{cases} u_0(t) = \cos\omega t, \\ u_n(t) = -\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^t Q(\xi)u_{n-1}(\xi)\sin\omega(t-\xi)\,d\xi, & n = 1,2,\dots \end{cases}$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 不等式

$$|u_n(t)| \le e^{|\omega|t}\frac{(Mt^2)^n}{(2n)!}, \qquad t \in [0,\infty), \qquad n = 0,1,\dots$$

が成り立つことを示せ．ただし，次の不等式は証明なしに用いてよい．

$$|\cos\omega t| \leqq e^{|\omega|t}, \qquad |\sin\omega t| \leqq |\omega|te^{|\omega|t} \qquad (\ t \geqq 0\ )$$

(2) 等式

$$y(t) = \sum_{n=0}^\infty u_n(t)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 不等式

$$|y(t)| \le e^{|\omega|t}\cosh(\sqrt{M}t), \qquad t \in [0,\infty)$$

が成り立つことを示せ．

問題 6. $(X, \mathfrak{B})$ を可測空間とする．X 上の $\overline{\mathbb{R}}$-値関数 f が条件

「任意の実数 a に対して，$\{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathfrak{B}$」

をみたすとき，f は $\mathfrak{B}$-可測であるという．ただし，$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f を X 上の $\overline{\mathbb{R}}$-値関数とするとき，次の 4 条件 (a)–(d) は互いに同値であることを証明せよ．

(a) f は $\mathfrak{B}$-可測である．

(b) 任意の実数 a に対して，$\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \in \mathfrak{B}$ である．

(c) 任意の実数 a に対して，$\{x \in X \mid f(x) < a\} \in \mathfrak{B}$ である．

(d) 任意の実数 a に対して，$\{x \in X \mid f(x) \leq a\} \in \mathfrak{B}$ である．

(2) $\{f_n\}$ を X 上の $\overline{\mathbb{R}}$-値関数の列とし，X 上の $\overline{\mathbb{R}}$-値関数 g を

$$g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \qquad (x \in X)$$

によって定義する．ここで，$\mathbb{N}$ は自然数全体を表す．任意の自然数 n に対して関数 f_n が $\mathfrak{B}$-可測ならば，g は $\mathfrak{B}$-可測であることを証明せよ．

問題 7. 可分な無限次元ヒルベルト空間 H の完全正規直交系を $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ とし，

$$\ell^2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, x_n \in \mathbb{C} \right\}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $S\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定義される H 上の線形作用素 S の作用素ノルム $\|S\|$ は 1 であることを示せ．

(2) T を $T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{x_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ で定義される ℓ^2 上の有界線形作用素とする．ただし，$x_0 = 0$ とする．このとき，$USU^{-1} = T$ をみたす等距離作用素 $U : H \longrightarrow \ell^2$ を求めよ．

(3) H の単位球 $H_1 = \{\boldsymbol{v} \in H \mid \|\boldsymbol{v}\| \leq 1\}$ の S による像 $S(H_1)$ は，相対コンパクトでないことを示せ．

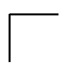
(4) $|c| > 1$ をみたす任意の複素数 c に対し，$(S - cI)$ は H 上で有界な逆作用素をもつことを示せ．ただし，I は H 上の恒等作用素をあらわす．

問題 8. ヘッドがコンピュータの制御によって XY 面を移動し，線を描く画像表示装置があるとする．ヘッドは左右に回転（ターン）もできるとする．その制御ライブラリには `left()`（ヘッド左 90 度回転），`right()`（同じく右 90 度回転）および `advance()`（ヘッドを一定間隔動かす，その間専用紙に移動分の線をプロットする）を使って以下のような関数 `zig(int n)` と `zag(int n)` を作成した．なお，本問のプログラムは C 言語に似た表記でアルゴリズムの要点を記したものであり，厳密に C 言語の文法に従っているわけではない．

```
void zig(int n) {
  if(n==1) {
    left() ;
    advance() ;
    left() ;
    advance() ;
  } else {
    zig(n/2) ;
    zag(n/2) ;
    zig(n/2) ;
    zag(n/2) ;
  }
}
```

```
void zag(int n) {
   if(n==1) {
     right() ;
     advance() ;
     right() ;
     advance() ;
     left() ;
     advance() ;
   } else {
     zag(n/2) ;
     zag(n/2) ;
     zig(n/2) ;
     zag(n/2) ;
  }
}
```

初期状態ではヘッドは必ず北方向を向いているとする．つまり `zig(1)` を最初に呼び出すと



がプロットされる（この場合，原点は図の水平線の右端にある）．原点は紙の中央にありサイズは気にしなくてよい．以下の (1), (2) のように main 関数を設定するとき，プロットされる図形の概形を描け．またその描画に至った理由を説明せよ．

(1)

```
main() {
  zig(2) ;
  zig(2) ;
}
```

(2)

```
main() {
  zig(4) ;
  zig(4) ;
}
```

問題 9. 次の命題 F を考える：

「 p を 2 より大きい素数，a を整数とするとき

$$a^p \equiv a \pmod p$$

が成り立つ．」

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 命題 F が真であることを，a に関する数学的帰納法を用いて示せ．

(2) a を p で割り切れない整数とするとき，命題 F を用いて，$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ を示せ．

(3) p を $p \equiv 3 \pmod 4$ なる素数，a を p で割り切れない整数として，方程式 $x^2 \equiv a \pmod p$ が整数解を持つとする．このとき，2 つの整数 $\pm a^{\frac{p+1}{4}}$ はこの方程式の解であることを示せ．

平成２１年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
入学試験（平成20年9月2日）
英語 (14:50 – 15:40)

次の2問に解答しなさい．

問題ごとに別の答案用紙を用いなさい．

問題 1. 次の英文の点線 $\cdots$ を引いたところより下の部分を和訳せよ.

Simultaneous systems of ordinary differential equations

Problems occasionally arise which lead not to a single differential equation but to a system of simultaneous differential equations in one independent variable and several dependent variables. Thus, for instance, suppose that

$$\phi(x, y, z, c_1, c_2) = 0, \quad \psi(x, y, z, c_1, c_2) = 0$$

are two equations in x, y, z each containing the two arbitrary constants c_1, c_2. Then between these two equations and the pair of equations obtained by differentiating with respect to x, the constants c_1 and c_2 can be eliminated and there results a pair of simultaneous ordinary differential equations of the first order,

$$\Phi(x, y, y', z, z') = 0, \quad \Psi(x, y, y', z, z') = 0.$$

....

It is possible, by introducing a sufficient number of new variables, to replace either a single equation of any order, or any system of simultaneous equations, by a simultaneous system such that each equation contains a single differential coefficient of the first order. This theorem will be proved in the most important case, namely that where the equation to be considered is of the form

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big).$$

In this case new variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ are introduced such that

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,\ \frac{dy_2}{dx} = y_3,\ \ldots,\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n,$$

where $y_1 = y$. These equations, together with

$$\frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

form a system of n simultaneous equations, each of the first order, equivalent to the original equation. In particular it is evident that if the original equation is linear, the equations of the equivalent system are likewise linear.

出典（和訳不要）: E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, Dover (1956)

問題 2. 次の文章の点線 $\cdots$ を引いたところより上の部分または下の部分のいずれかを英訳せよ．解答の際には，どちらの部分を選んだか明示すること．

基底拡張定理． V を有限次元ベクトル空間とし，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を V 内の 1 次独立なベクトルとする．このとき，集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ が V の基底となるような $n = \dim(V) - m$ 個のベクトル $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ が V 内に存在する．

証明．$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle = V$ であれば，証明することはない．それゆえ，$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle \neq V$ と仮定してよい．$\boldsymbol{b}_1$ を $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ に含まれない V のベクトルとする．このとき，集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1\}$ は 1 次独立である．なぜなら，もしそれが 1 次従属であったならば，あるベクトルは，それより前にある全てのベクトルに関し 1 次従属となる．$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は 1 次独立であるから，$\boldsymbol{a}_i$ がそのベクトルになることはない．$\boldsymbol{b}_1$ は $\boldsymbol{b}_1 \notin \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ となるように選んだので，$\boldsymbol{b}_1$ はそのベクトルでない．したがって，

$$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1\}$$

は 1 次独立集合である．

…………………………………………………………………………………………

もし，$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1 \rangle = V$ であれば，証明は完了である．もしそうでなければ，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1$ から出発して，前と同じ議論を繰り返せばよい．このようにして，V において 1 次独立な集合

$$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$$

が得られる．$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle = V$ のときもまた，証明は完了である．それ以外のときは，前と同様の議論を可能な限り繰り返す．この工程は，$m + k = \dim(V)$ のときの集合

$$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$$

で終わる．このとき $k = n$ であり，求めていた

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \ldots \boldsymbol{b}_n \rangle = V$$

が得られる．