2019 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（2018 年 8 月 28 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1. 微分積分, 線形代数 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． $p \geq 1$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^p}$ は区間 $[\,e,\,\infty\,)$ で単調減少であることを示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^p}\,dx$ の収束・発散を判定せよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x^{2p}+1}}\,dx$ の収束・発散を判定せよ.

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^p}$ の収束・発散を判定せよ.

問題２． 以下の問いに答えよ.

(1) C^2 級の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 2 変数関数 $F(u,v)$ を $F(u,v) = f(u^2 - v^2, 2uv)$ で定義する.

 (a) 偏導関数 F_u, F_v を f_x, f_y, u, v を用いて表せ.

 (b) $f_{xx} + f_{yy} = 0$ ならば, $F_{uu} + F_{vv} = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sin(\pi y^2)\,dxdy\,, \qquad D = \left\{(x,y)\;\middle|\;0 \leq x \leq 1\,, x \leq y \leq 1\right\}$$

(3) 次の広義重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \log(x^2 + y^2)\,dxdy\,, \qquad D = \left\{(x,y)\;\middle|\;0 < \sqrt{x^2+y^2} \leq e\right\}$$

問題３． 以下の行列が複素数の範囲で対角化可能かどうか判定し，対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P, および $P^{-1}AP$ を求めよ．

(1)

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ただし, θ は実数とする．

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

問題４． $\mathbb{R}^3$ において，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ によって張られる部分空間を V とする．以下の問いに答えよ．

(1) V の任意のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ について, x, y, z の満たす方程式を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ において, V のあらわす図形と 1 点で接するような，点 $(4, 0, -1)$ を中心とする球の半径を求めよ．

(3) W をベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ によって張られる部分空間とするとき, V と W の共通部分 $Y = V \cap W$ は部分空間となるが，その基底を 1 組求めよ．

(4) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ で，その核が (3) で定義した Y となるものを 1 つ作り，その像を求めよ．

2019年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（2018年8月28日）
数学 II (13:00 – 14:30)

1. 問題は全部で 9 題ある．そのうちの 2 題を選択して解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１．以下の問いに答えよ.

(1) 複素 4 次正方行列 A の固有値が -1 と 0 であり, さらに A の階数は 3, A^3 の階数は 1 であるとき, A のジョルダン標準形を求めよ. そのようになる理由も述べること. ただしジョルダン細胞を並べる順番は無視してよい.

(2) 定数 p, q に対して, $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -12 & -10 \\ -1 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ が (1) の仮定を満たすとき, p の値を求めよ. さらに q の満たす条件を求めよ. そのようになる理由も述べること.

問題２．$A = \{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とおく. 以下を示せ.

(1) A は $\mathbb{R}$ の部分環である.

(2) A のイデアル $P = (2, \sqrt{10})$ は素イデアルである.

(3) (2) で定義した P は A の単項イデアルではない.

(4) Q が A の (0) とは異なる素イデアルならば Q は素数を少なくとも 1 つ含む.

問題３．以下の問いに答えよ.

(1) X を位相空間とする. X の位相は離散位相であるとする. X がコンパクトであるならば, X は有限集合であることを示せ.

(2) (X, d) を距離空間とする. ある $c > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in X$ に対し, $x \neq x'$ ならば $d(x, x') \geq c$ が成り立つとき, (X, d) は完備であることを示せ.

(3) X を位相空間とする. X の位相は離散位相であるとする. X が可分であるならば, X の濃度は高々可算無限であることを示せ.

問題４. U を $\mathbb{R}^2$ の領域とし, 空間 $\mathbb{R}^3$ 内において $\boldsymbol{p}(u,v)$ $\big((u,v)\in U\big)$ とパラメータ表示されたなめらかな曲面を S とする. また λ を正の定数とし, S を λ 倍相似拡大・縮小した曲面を $\widetilde{S}$ とする. すなわち, $\widetilde{S}$ は $\widetilde{\boldsymbol{p}}(u,v)=\lambda\boldsymbol{p}(u,v)$ $\big((u,v)\in U\big)$ とパラメータ表示された曲面である. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{p}(u,v)$ のガウス曲率 K と $\widetilde{\boldsymbol{p}}(u,v)$ のガウス曲率 $\widetilde{K}$ について, $\widetilde{K}=\dfrac{1}{\lambda^2}K$ が成り立つことを示せ.

(2) $\boldsymbol{p}(u,v)$ の平均曲率 H と $\widetilde{\boldsymbol{p}}(u,v)$ の平均曲率 $\widetilde{H}$ について, $\widetilde{H}=\dfrac{1}{\lambda}H$ が成り立つことを示せ.

(3) D は U に含まれる有界閉領域でなめらかな境界をもつものとする. このとき,

$$\int_D K\,dA=\int_D \widetilde{K}\,d\widetilde{A}$$

が成り立つことを示せ. ただし, dA と $d\widetilde{A}$ はそれぞれ曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ と $\widetilde{\boldsymbol{p}}(u,v)$ の面積要素とする.

問題５. xyz 空間内の曲面 S と立体 D を次のように定める.

$$S=\{(x,y,z)\mid z=x^2+y^2\},\qquad D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leq z\leq 2x\}$$

D の境界を ∂D であらわし, ∂D の単位法線ベクトルは外向きにとるものとする. また, ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を, $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x+y,y+z,z+x)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) D を xy 平面に正射影してできる図形を xy 平面に図示せよ.

(2) D の体積を求めよ.

(3) $S_1=S\cap\partial D$ とするとき, $\boldsymbol{F}$ の S_1 上の面積分 $\displaystyle\iint_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$ の値を求めよ.

問題６. 複素数 z に対して, $f(z)=3z^2-6z+4$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数の範囲で, $3z^2-6z+4$ を因数分解せよ.

(2) $g(z)=f(z)^2$ とするとき, 1 以上の実数 R と $|z|=R$ を満たす複素数 z に対して, $|g(z)|\geq 9R^4-160R^3$ を示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{g(t)}$ の値を求めよ.

問題７．次の初期値問題の解 $y(t)$ を考える.

$$y'(t) = y(t) - y(t)^3, \quad t > 0, \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

以下の問いに答えよ.

(1) 解 $y(t)$ を求め, $\alpha = \lim_{t \to +\infty} y(t)$ を求めよ.

(2) 次が成り立つことを示せ.

$$\int_0^{+\infty} |\alpha - y(t)| \, dt < +\infty$$

問題８．$V = \{1, 2, \ldots, 72\}$ を 72 以下の自然数全体の集合とする. 自然数 k に対して

$$E_k = \{\{v, v'\} \mid v, v' \text{ は } V \text{ の異なる元で}, v' - v \text{ は } k \text{ で割り切れる }\}$$

とおき, $E = E_4 \cup E_6 \cup E_9$ と定める. V の位数 3 の部分集合 $\{v, v', v''\}$（v, v', v'' は相異なる V の元）は, $\{v, v'\}$, $\{v, v''\}$, $\{v', v''\}$ がすべて E に属するとき「E に関する三角形」であるということにする. 以下の問いに答えよ.

(1) E に関する三角形 $\{v, v', v''\}$ に対して, $v' - v$, $v'' - v$, $v'' - v'$ は一斉に 4, 6, 9 のいずれか 1 つで割り切れることを示せ.

(2) E に関する三角形のうち 72 が属するものの個数を求めよ.

(3) V の位数 9 以上の部分集合 V' を任意にとったとき, V' に含まれる E に関する三角形が存在することを示せ.

問題９．以下はＣ言語で作成した関数 `f1`, `f2` である．`x1`, `x2`, `x3` は大域変数である．

```
int x1=0, x2=0, x3=0;
int f1 (void){
    ++x1; ++x1; ++x3;
    return 0;
}
int f2 (int y1, int y2){
    x1=y1; x2=y2; x3=0;
    while(x2!=x3){ f1();}
    return 0;
}
```

以下の問いに答えよ．ただし本問において「値を返す」とは, オーバーフローを起こさずに値を返すことを意味する．

(1) `f2`(256,64) を呼び出したとき, `f2` は値を返すか, 理由とともに答えよ．値を返すと判断するときは `f2` が値を返すときの `x1` の値を答え, なぜその値になるかの説明もせよ．

(2) `f2`(256,−8) を呼び出したとき, `f2` は値を返すか, 理由とともに答えよ．値を返すと判断するときは `f2` が値を返すときの `x1` の値を答え, なぜその値になるかの説明もせよ．