# 平成２０年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）
# 入学試験(平成２０年２月１２日)

## 数学 I　(9:30-11:30)

問題１，問題２，問題３の３題を必修とし, 問題４，問題５のうちから１題を選択して, 計４題について解答しなさい.

問題ごとに別の答案用紙を用いなさい.

**問題 1**　実ベクトル空間の間の線形写像 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ は，$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$ を満たすとする．ここで，

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対し，$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3$ を満たす $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$ が存在することを示せ.

(2) 線形写像 $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ は $g(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $g(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$, $g(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$ を満たすとする．このとき，任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対し $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ が成り立つことを示せ.

(3) (2) の結果を利用し，合成写像 $f \circ f$ は $f$ と等しいことを示せ.

(4) 次の条件 $(\star)$ を満たす 3 次正方行列 $A$ を求めよ：

$(\star)$ 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対し $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ が成り立つ.

**問題 2**　以下の問いに答えよ.

$|x| < 1$ で関数 $f(x) = \sqrt{1-x}$ を考える.

(i) 関数 $f(x)$ のマクローリン展開 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ における $x^n$ の係数 $C_n$ を求めよ.

(ii) 上を参考にして, 関数 $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ のマクローリン展開を求めよ.

(iii) 単位円板 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ で 2 変数の関数
$h(x, y) = \sqrt{1-(x+y)^2}$ を考える．$h$ に対する 2 変数のマクローリン展開における $x^n y^m$ の係数を求めよ.

**問題 3**　$(X, d)$ を距離空間とする．点 $a \in X$ と $r > 0$ に対して

$$B_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

を $a$ の $r$-近傍という．$X$ の部分集合 $O$ の任意の点 $x$ に対して, ある $\epsilon > 0$ が存在し $B_\epsilon(x) \subset O$ が成り立つとき $O$ を開集合とよぶ．また開集合 $O$ の補集合 $O^c = X - O$ を閉集合という．

　このとき以下の問いに答えよ．

(i) $O_1, O_2$ が開集合ならば共通部分 $O_1 \cap O_2$ は開集合であることを示せ．

(ii) $(\mathbb{R}^2, d)$ を 2 次元ユークリッド距離空間とする．（ここで $d$ は $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ により定義された距離関数である.）$\mathbf{0} = (0, 0)$ を原点とし, 任意の自然数 $n$ に対し次の集合 $\mathbf{F}_n$ を考える．

$$\mathbf{F}_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{0}, x) \leq 1 - \frac{1}{n}\}.$$

このとき, 次を示せ.

(1) 各 $\mathbf{F}_n$ は閉集合である．

(2) 和集合 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n$ は閉集合ではない.

**問題 4**　以下の問いに答えよ．

(a) $0 < a < b$ とし, $D = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ とおく．重積分

$$\iint_D x \, dxdy$$

の値を求めよ．

(b) $R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とおく．重積分

$$\iiint_R x^2 + y^2 \, dxdydz$$

の値を求めよ．

**問題 5**　$n$ を自然数とする．1 から $2n$ までの $2n$ 個の自然数の中から, どのように $n + 1$ 個の数を選んできても, その中には一方が他方を割り切るような 2 つの自然数が存在することを示せ．

# 平成２０年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）入学試験(平成２０年２月１２日)

## 数学II　(13:00-15:30)

次の９問から３問を選択し，解答しなさい.

問題ごとに別の答案用紙を用いなさい.

**問題 1.**　複素数係数の多項式環 $\mathbb{C}[X]$ の商体を $\mathbb{C}(X)$ とかき, 任意の複素数 $a$ に対し,

$$\mathbb{C}[X]_{(a)} = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \,\middle|\, f(x), g(x) \in \mathbb{C}[X], g(a) \neq 0 \right\},$$

$$P_a = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \,\middle|\, f(x), g(x) \in \mathbb{C}[X], f(a) = 0, g(a) \neq 0 \right\}$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $P_a$ は $\mathbb{C}[X]_{(a)}$ の素イデアルであることを証明せよ.

(2) $\mathbb{C}[X]_{(a)}/P_a$ は環として, $\mathbb{C}$ と同型であることを証明せよ.

(3) $\mathbb{C}(X)$ において, $\displaystyle\bigcap_{a \in \mathbb{C}} \mathbb{C}[X]_{(a)} = \mathbb{C}[X]$ であることを証明せよ.

**問題 2.**　$A$ を単位元を持つ環, $M$ を左 $A$ 加群, $N_1$, $N_2$ を $M$ の $A$ 部分加群とする.

$$N_1 + N_2 = \{x \in M \mid x = y_1 + y_2 \text{ をみたす } y_1 \in N_1, y_2 \in N_2 \text{ がある }\}$$

とおく. 以下を証明せよ.

(1) $N_1 + N_2$ は $M$ の $A$ 部分加群である.

(2) $N_1 \subset N_1 + N_2$, $N_2 \subset N_1 + N_2$ が成り立つ.

(3) $L$ を $M$ の $A$ 部分加群とする. もし $N_1 \subset L$, $N_2 \subset L$ ならば $N_1 + N_2 \subset L$ が成り立つ.

**問題 3.**　$t > 0$ として, 関数 $K(x,t) = \dfrac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$ を考える. $\mathbf{R}$ 上の有界かつ連続な関数 $f(x)$ に対して

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t) f(y)\, dy$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$ に対して次を示せ.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x,t) = 0.$$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = 1$ を示せ.

(3) 各 $x \in \mathbf{R}$ に対して, $u(x,t) \to f(x) \quad (t \to 0)$ を示せ.

**問題 4．** $(X, F, \mu)$ を確率空間とする．有限集合族 $C = \{C_1, \ldots, C_k\}$ が次の条件を満たすとき，$C$ は $X$ の有限分割であるという．

$$C_i \in F, \qquad C_i \cap C_j = \emptyset \quad (i \neq j), \qquad \bigcup_{i=1}^{k} C_i = X$$

この $C$ に対し, 次の量を定義する：

$$H_\mu(C) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(C_i) \log \mu(C_i)$$

ただし, $0 \log 0 = 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2つの有限分割 $C$ と $D$ に対し, 有限集合族 $\{C_i \cap D_j \mid C_i \in C, D_j \in D\}$（これを $C \vee D$ と書く）は有限分割になることを示せ.

(2) 2つの有限分割 $C$ と $D$ に対し, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$H_\mu(C \vee D) - H_\mu(C) \leq H_\mu(D).$$

**問題 5．** $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $L > 0$ とし，$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を連続関数とする．任意の $s$, $y$, $z \in \mathbf{R}$ に対して,

$$|f(s, y) - f(s, z)| \leq L|y - z|$$

が成り立つと仮定する．初期値問題

$$(I) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in \mathbf{R}, \\ x(a) = b \end{cases}$$

について考える． 以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{R}$ 上の関数列 $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ を漸化式

$$\begin{cases} x_0(t) = b, \\ x_n(t) = b + \int_a^t f(s, x_{n-1}(s))\, ds, & n \geq 1 \end{cases}$$

で定義する．関数列 $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ が $\mathbf{R}$ 上で広義一様収束することを示せ.

(2) $t \in \mathbf{R}$ に対し,

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t)$$

とおく．$x(t)$ が初期値問題 $(I)$ の解であることを示せ.

(3) 初期値問題 $(I)$ の解の一意性を示せ.

**問題6．** 以下の問いに答えよ.

1. 2 次元実射影平面 $\mathbf{RP}^2$ の定義を述べよ.
2. $\mathbf{RP}^2$ が可微分多様体になることを示せ.
3. 次の写像 $f, g : \mathbf{RP}^2 \to \mathbf{R}$ が well-defined な可微分写像かどうかを理由をつけて判定せよ．さらに可微分写像になっている場合はその写像の臨界点を求めよ．ただし, $\mathbf{RP}^2$ の同次座標を $[x : y : z]$ $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ とする.

   (a) $f([x : y : z]) = xyz$.

   (b) $g([x : y : z]) = x^2 + y^2 - z^2$.
4. 有限複体 $K$ のオイラー数の定義を述べよ.
5. $\mathbf{RP}^2$ のオイラー数を求めよ.

**問題7．** $\boldsymbol{x}(s)$ を $\mathbf{R}^3$ 内の正則曲線 $C$ の弧長によるパラメータ表示とすると，$C$ の点 $\boldsymbol{x}(s)$ における単位接ベクトルは $\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{x}'(s)$, 曲率は $\kappa(s) = \|\boldsymbol{x}''(s)\|$ で定義される．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ を $C$ の正則パラメータ表示で, $\boldsymbol{x}(s)$ と同じ向きをもつものとするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\|\boldsymbol{t}\| = 1$ であることを利用して，$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t}' = 0$ および $\|\dot{\boldsymbol{x}}\| = \dfrac{ds}{dt}$ を示せ.

(2) $\kappa(t) = \dfrac{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{x}}(t)\|}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|^3}$ であることを示せ.

ただし，$\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ 等は $s$ に関する微分，$\dot{\boldsymbol{x}}$, $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 等は $t$ に関する微分を表すことにする.

**問題8．** アルファベットの順序は $A < B < C < \cdots < Y < Z$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 文字列 $OUBEIKA$ を左から 1 文字ずつ, 空の木に節点のデータとして順次挿入して, 2 分探索木を構成せよ.

(2) (1) で構成された 2 分探索木から, 何か 1 文字のアルファベットを探索するときに, 最大で幾つの節点を走査するか答えよ.

(3) 更に, ここで構成した 2 分探索木の節点を前順走査, 間順走査, 後順走査した各々の場合について, その走査した節点の順番を書き並べよ.

**問題９．** 次の文章を読んで以下の問いに答えよ．答えだけでなく理由も述べること．ただし，記号 $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ はそれぞれ「または」，「かつ」，「$\cdots$ でない（否定）」，「ならば」を表す．

(1) $F_1, F_2$ がともに充足可能な命題論理式であるとき，$F_1 \wedge F_2$ は充足可能であるか．

(2) $F_1, F_2$ がともに充足可能な命題論理式であるとき，$F_1 \vee \neg F_2$ は充足可能であるか．

(3) $F_1, F_2$ がともにトートロジー（恒真式）であるとき，$F_1 \rightarrow F_2$ はトートロジーであるか．

# 平成２０年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）
# 入学試験 (平成２０年２月１２日)

## 英語　(15:50-16:50)

次の２問に解答しなさい.

**問題１．** 以下の英文を和訳せよ．

It is well-known that a continuous real function, that is defined on an open set of $\mathbb{R}$, has an indefinite integral. How about multivariable functions? For the sake of simplicity we restrict ourselves to smooth functions, i.e. functions that have continuous partial derivatives of all orders.

We begin with functions of two variables. Let $f : U \to \mathbb{R}^2$ be a smooth function defined on an open set of $\mathbb{R}^2$.

Question: Is there a smooth function $F : U \to \mathbb{R}$ such that

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1 \text{ and } \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$$

where $f = (f_1, f_2)$?

Since

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$$

we must have

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \tag{$*$}$$

The correct question is therefore whether $F$ exists, assuming $f = (f_1, f_2)$ satisfies $(*)$. Is $(*)$ also sufficient?

Example: Consider the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given by

$$f(x_1, x_2) = \left( \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

It is easy to show that $(*)$ is satisfied. However there is no function $F : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ that satisfies $(*)$!

This example suggests that the answer to the question depends on the "shape" of $U$. Instead of searching for further examples or counterexamples, we will define an invariant of $U$, which tells us whether or not the question has an affirmative answer, assuming the necessary condition $(*)$. This invariant is called the first de Rham cohomology group and denoted $H^1(U)$. It can be shown that $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ is nonzero, which explains the example above.

出典: "From Calculus to Cohomology" by I. Madsen and J. Tornehave.

**問題２．** 以下の文章を英訳せよ.

ユークリッドは五つの公準（postulate）から平面幾何学の多くの結果を導いた.

1. 与えられた任意の 2 点に対し, それらを結ぶ線分がつねに存在する.
2. 与えられた線分はいくらでも延長できる.
3. 与えられた任意の中心と任意の半径をもつ円を描くことが出来る.
4. 直角はすべて等しい.
5. 二つの直線と交わる一つの直線が同じ側につくる内角の和が 2 直角より小さいならば, その二直線は限りなく延長すればその内角のある側において交わる.

第 5 公準は最初の四つの公準と比べると, よりいっそう複雑である. 原論 (Elements) 第一章において, 第 5 公準が命題 29 に至ってから初めて用いられるようにユークリッド自身もそれに対して複雑な感情を持っていたと想像される. 第 5 公準は, 平行線公理としてよく知られている.

当時から多くの数学者は他の公準からそれが導かれると予想し, いろいろな証明を与えた. 例えば第 5 公準は「三角形の内角の和が 2 直角に等しい」という命題と同値であることが示されるので, サッケリ (Saccheri) とかルジャンドル (Legendre) はこの命題を証明しようと多大な時間を費やした.

現在 私たちは第 5 公準が他の公準と独立であり, 他の公準からは導くことができないということを知っている.