平成２０年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）
入学試験 (平成１９年９月４日)

数学 I　(9:30-11:30)

問題１，問題２，問題３の３題を必修とし, 問題４，問題５のうちから１題を選択して, 計４題について解答しなさい.

問題ごとに別の答案用紙を用いなさい.

問題１．　実ベクトル空間の間の写像 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3)$$

により定義する．$\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 写像 f は線形であることを示せ.

(2) $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ は 1 次独立であることを示せ.

(3) $f(\mathbf{w}) \neq 0$ を満たす任意の $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$ に対し，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底をなすことを示せ.

(4) $\ker f = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}\}$ であることを示せ.

問題 ２．　(1) 次の定積分を計算せよ．以下, n は整数とする.

$$\text{(i)} \qquad \int_0^{2\pi} \sin x \ \cos nx \, dx,$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_0^{2\pi} x \sin x \ \cos nx \, dx.$$

(2) $\varphi(x) = |x| \, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < \infty$ とする．　このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) 関数 $y = \varphi(x)$ のグラフの概形を (x, y)-平面に描け.

(ii) 関数 φ の最大値を求めよ.

(iii) 任意の実数 x に対して, 無限和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x - n)$$

は収束することを示せ.

問題 3． 以下の問いに答えよ.

(1) 位相空間 X がコンパクトであることの定義をひとつあげよ.

(2) ユークリッド距離から定まる位相空間 $\mathbf{R}^n$ において, 部分集合 A がコンパクトであることと同値な性質を述べよ.

(3) 位相空間 X がコンパクトであるとき, 任意の閉集合 F はコンパクトであることを示せ.

(4) ハウスドルフ空間 X の直積位相空間 $X \times X$ において, 部分集合 $D = \{(x,x) \mid x \in X\}$ は $X \times X$ の閉集合であることを示せ.

問題 4． 以下の重積分に関する問いに答えよ.

(1) 累次積分を使って $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2}\ dxdy$ の値を求めよ.

(2) Green の定理を述べよ.

(3) Green の定理を使って (1) の重積分を計算せよ.

問題 5． 自然数 n の素因数分解を $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし $p_1, \ldots, p_r$ は相異なる素数とする.

(1) n の約数の個数を求めよ.

(2) n の約数の総和を求めよ.

(3) n が完全数であるとは, n の約数の総和が $2n$ に等しいときに言う. 例えば, $2 \times 6 = 1 + 2 + 3 + 6$ であるので, 6 は完全数である. n が偶数であるとき, n が完全数であるための必要十分条件は $2^{q+1} - 1$ が素数であるような自然数 q が存在して $n = 2^q(2^{q+1} - 1)$ と表されることを示せ.

平成２０年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）
入学試験 (平成１９年９月４日)

数学II　(13:00-15:30)

次の９問から３問を選択し, 解答しなさい.

問題ごとに別の答案用紙を用いなさい.

問題１． 以下の問いに答えよ.

(1) A_4 を集合 $\{1,2,3,4\}$ の交代群, $V_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ を部分群とする．このとき V_4 は A_4 の正規部分群であることを示せ.

(2) 群 G の部分群 H は G における指数が 2 ならば，G の正規部分群であることを示せ.

(3) V_4 の正規部分群 K で A_4 の正規部分群にはならないような K の例を与えよ.

問題２． $\beta = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}$ について, 次の問いに答えよ．ただし $\mathbf{Q}$ は有理数体とする.

(1) β の $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 上の最小多項式を求めよ.

(2) β の $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

(3) $\mathbf{Q}(\beta)$ は $\mathbf{Q}$ のガロア拡大であることを示し, ガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\beta)/\mathbf{Q})$ の構造を求めよ.

(4) $\mathbf{Q}(\beta)$ に含まれる $\mathbf{Q}$ 上の二次拡大体をすべて求めよ.

問題３． 次の偏微分方程式の初期値・境界値問題を考える.

(a) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \quad (t > 0\,,\ 0 < x < \pi)$$

(b) $$u(t,0) = 0\,, \quad u(t,\pi) = 0 \quad (t > 0)$$

(c) $$u(0,x) = f(x) \quad (0 < x < \pi)$$

ここで，連続関数 $f(x)$ は $f(0) = f(\pi) = 0$ を満たすとする.

(1) 自然数 n に対して，関数 $u_n(t,x) = T_n(t) \sin nx$ が偏微分方程式 (a) の解であり，$T_n(0) = 1$ を満たすように，関数 $T_n(t)$ を定めよ.

(2) 関数 $f(x)$ がフーリエ級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$$

で表されているとき，偏微分方程式の初期値・境界値問題 (a) − (c) の解 $u(t,x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた解 $u(t,x)$ に対して，$b_1 = 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$ となることを示せ.

問題4． 関数

$$g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad (t > 0,\ x \in \mathbf{R})$$

に関して以下の問いに答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(1/2, x)\ dx$ を求めよ．

(2) $f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上の有界連続関数ならば，すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lim_{t \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, x-y) f(y)\ dy = f(x)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $f(x)$ がルベーグ可積分関数ならば，

$$h(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, x-y) f(y)\ dy$$

とおくとき，任意の $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$ に対して，$\dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)$ が存在することを示せ．

問題5． $\mathbf{N}$, $\mathbf{C}$ をそれぞれ自然数全体, 複素数全体とする．

$$\ell^2 = \left\{ f : \mathbf{N} \to \mathbf{C} \ \middle|\ \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty \right\}$$

を $\mathbf{C}$ 上のヒルベルト空間とする．ℓ^2 の元 $f \neq 0$ に対し, $\mathbf{C}f$ を f によって生成される部分空間とする．ℓ^2 上の有界線型作用素全体を $B(\ell^2)$ とおく．このとき, 以下の問い (1), (2), (3) に答えよ：

(1) 任意の $g \in \ell^2$ に対し, $(Tg)(n) = \dfrac{1}{n} g(n)$ $(n \geq 1)$ とおくと $T \in B(\ell^2)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を ℓ^2 上の内積とし, $\mathbf{C}f$ 上への射影を P とするとき,

$$Pg = \frac{\langle g | f \rangle}{\langle f | f \rangle} f \quad (\forall g \in \ell^2)$$

であることを示せ．

(3) $e_k \in \ell^2$ は $e_k(n) = 1\ (n = k),\ 0\ (n \neq k)$ を満たすとする．P_k を $\mathbf{C}e_k$ 上への射影とするならば，

$$||T - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} P_k|| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことを示せ．

問題 6． $\mathbf{R}^3$ の部分集合 S, A, B, C を，

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ A &= \{(0, 0, z) \,|\, z^2 \leq 1\}, \\ B &= \{(x, y, 0) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ C &= \{(x, 0, z) \,|\, x^2 + z^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

と定義する．以下の図形の 1, 2 次元整係数ホモロジー群をそれぞれ計算せよ．

(1) $S \cup A$ (2) $S \cup A \cup B$ (3) $S \cup B \cup C$

問題 7． $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 f を

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^4 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3, x_2, x_3)$$

によって定める．以下の問いに答えよ．

(1) $(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$ は C^∞ 級写像であることを確かめ，ヤコビ行列を求めよ．

(2) f の臨界点の集合 C_f は $\mathbf{R}^3$ の C^∞ 級部分多様体になることを示せ．

(3) C_f の点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in C_f$ における接空間 $T_{\boldsymbol{x}} C_f$ の基底を一組求めよ．

(4) 次の集合は f の臨界値の集合に含まれることを示せ．

$$\{(0, s, 0) \mid s \in \mathbf{R}\} \cup \{(-3t^4, 0, -4t^3) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

問題８． 実数 x に対する e^x の数値を計算機を使って求めるのに以下のべき級数展開式を利用した．

$$(*) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

この近似計算を行う関数 numexp(x,n) を以下のように記述した（なお factorian(n) は n!を計算しその値を実数で戻す関数である）：

```
float numexp(float x, int n) {
  float xx,sum ;
  int i ;
  sum=1.0 ;
  xx=1.0 ;
  if(n==0) return sum  ;
  for(i=1;i<n;i++) {
    xx = x*xx ;
    sum = sum + xx/factorian(i);
  }
  return sum ;
}
```

(1) このプログラム関数でも n が大きければ十分な精度で e^x の近似値を求めてくれるが効率が悪い．より効率の高い近似計算ができるように上のプログラムを改造せよ．またその改造の理由も述べよ．

(2) $(*)$ を使って e^{-2} の近似値を求めたところ n を相当大きくしても（つまり近似の見せかけの精度を高めても）計算精度は上がらなかった．これは (1) の改造を施す，施さないには関係はない．精度があがらない理由を指摘せよ．それを回避するにはどのようなアルゴリズムを立てたら良いか提言せよ．

問題９． 0 と 1 を有限個並べたものをビット列といい，特に空列（長さ 0 の列）を λ で表す．ビット列全体の集合を $\{0,1\}^*$ で表す．以下の (1), (2) の各問いに答えよ．

(1) ビット列の集合 L_1 を以下のように定める．

$L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ において 1 が現れる回数は 3 で割って 1 あまる数. $\}$

決定性有限オートマトン M であって, M が受理する言語 $T(M)$ と L_1 が一致するものの状態遷移図を描け．$T(M)$ と L_1 が一致することの証明は書かなくてよい．

(2) 正規文法（regular grammar, 正則文法ともいう）G を以下のように定める．非終端記号（変数）を A, B, S とし, このうち S は開始記号とする．また, 終端記号は 0, 1 とする．G の生成規則は以下の通りとする．

$S \to 0S$, $S \to 1A$, $S \to 1$, $A \to 0$, $A \to 0A$, $A \to 1B$, $B \to 0B$, $B \to 1S$.

このとき, G が生成する言語 $L(G)$ は L_1 の部分集合であることを示せ（実際は $L(G) = L_1$ であるが, 等号が成り立つことの証明は述べなくてよい）．

平成２０年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）入学試験 (平成１９年９月４日)

英語　(15:50-16:50)

次の２問に解答しなさい.

問題１. 以下の英文を和訳せよ. (人名はそのままでよい.)

One of the most famous problems in the theory of numbers is the estimate of the function $\pi(x)$, denoting the number of prime numbers up to a given non-negative number x. Gauss already conjectured that for large values of x this number may be approximated by the simple expression $x/\log x$.

By the Prime Number Theorem we understand the assertion

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

The proof of this theorem is difficult. The first rigorous proof has been given by Hadamard and De la Vallée-Poussin. The shortest proof is due to Landau. The theorem is a consequence of certain properties of the Riemann zeta function. In recent years an elementary proof avoiding the advanced theory of the zeta function has been found by A. Selberg.

It is interesting to compare the assertion of the theorem with the numerical evidence. For example the values of $\pi(x)$ for $x = 10^3$, $x = 10^6$, $x = 10^9$, are 168, 78498, 50847478 respectively. The values of $x/\log x$ to the nearest integer are 145, 72382, 48254942 respectively. The ratios are 1.16, 1.08, 1.05 approximately, and show convergence, though not very rapidly, to unity.

(ここまで)

出典: G. Sansone and J. Gerretsen, Lectures on the theory of functions of a complex variable, Walters-Noordhoff, 1969.

問題２． 以下の問いに答えよ.

I. 次の文章を英訳せよ.

ユークリッド幾何学では 3 角形の内角の和は 180 度であるが, 双曲幾何学では 3 角形の内角の和は 180 度より小さくなる.

II. 下記の文章Aを英訳し, 文章Bの (1), (2) に適する数学者の名前をアルファベットで記述せよ.

A．命題.「上に有界な単調増加数列は収束する.」
これは実数の連続性という公理から出てくる.

B．実数の連続性は 「 (1) の切断 」という公理と同値である．実は, 上の命題, 実数の連続性公理 そして公理「(1) の 切断」の三つはすべて同値な命題である．このように命題が実は公理であるというような例は集合論においても, 選択（選出）公理と「 (2) の補題」がそうである.