平成１９年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）入学試験 (平成１９年２月１３日)

数学Ｉ　(9:30-11:30)

問題３, 問題４, 問題５のうち２問選択し, 問題１と問題２の２問と合わせ計４問に解答せよ. 問題ごとに別の答案用紙を用いよ.

問題１． 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の特性多項式（固有多項式）を求めよ.

(2) 行列 A の固有値を求めよ.

(3) 行列 A の各固有値に属する固有空間を求めよ.

(4) 行列 A が対角化できる場合は対角化し, 対角化できない場合はそのジョルダン標準形を求めよ.

問題２． 数列 $\{a_n\}$ を次の式で定義する.

$$a_1 = 1\,, \quad a_n = \frac{3a_{n-1} + 4}{2a_{n-1} + 3} \quad (n \geq 2).$$

以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ は上に有界であることを示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し, その極限値を求めよ.

問題３． X を実 2 次正方行列全体の集合とする．$d : X \times X \to \mathbb{R}$ を次の式で定める．

$$d\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{|a_1 - a_2|^2 + |b_1 - b_2|^2 + |c_1 - c_2|^2 + |d_1 - d_2|^2}.$$

以下の問いに答えよ.

(1) 距離空間が満たすべき公理をあげ, (X, d) がそれらを満たすことを示せ.

(2) $Y = \{A \in X \ : \ \det A \neq 0\}$ とおくと, Y は X の開集合となることを示せ.

(3) $Z = \{A \in X \ : \ A^2 = E\}$ とおくと, Z は X のコンパクトでない部分集合となることを示せ. (ここで E は単位行列を表す.)

問題４． $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ に反時計まわりの向きをつける．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{e^z}{z}$ の $z = 0$ における留数を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z}\, dz$ を求めよ.

(3) 任意の $\mathbb{C}$ 上の正則（解析的）関数 $f(z)$ と, 任意の自然数 n に対して, 次の式が正しくなるような n の整数値関数 $A(n), B(n)$ を求めよ.

$$f^{(n-1)}(0) = \frac{A(n)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{B(n)}} dz\,.$$

(4) n を整数とするとき, $\displaystyle\int_\Gamma e^z z^{-n} dz$ を求めよ.

問題５． $S = \{1, \ldots, 2n\}$ (n は自然数) とする．集合 S から $n + 1$ 個の自然数を勝手に選ぶと，その中に，和が $2n + 1$ となる 2 つの自然数が必ず存在することを示せ.

平成１９年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）入学試験 (平成１９年２月１３日)

英語　(15:50-16:50)

次の２問に解答せよ. 問題ごとに別の答案用紙を用いよ. ３０分以降途中退室してもよい.

問題１. 次の問いに答えよ.

(1) Translate the following into Japanese.

A compact space is a topological space for which every open cover has a finite subcover. A paracompact space is a topological space in which every open cover admits an open locally finite refinement.

Paracompactness is similar to the compactness property. The former can be obtained from the latter by replacing "subcover" by "open refinement" and "finite" by "locally finite".

(2) Give an example of a paracompact space that is not compact, and explain in English why it is paracompact and not compact.

(3) Give an example of a compact space that is not Hausdorff, and explain in English why it is compact and not Hausdorff.

問題２. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることの定義を英語で記せ.

(2) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が一様連続であることの定義を英語で記せ.

(3) 連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は一様連続であることの証明を英語で記せ.

平成１９年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）入学試験 (平成１９年２月１３日)

数学 II　(13:00-15:30)

$\boldsymbol{A1} \sim \boldsymbol{A4}$ のうち１問を選択して解答せよ．さらに $\boldsymbol{B1} \sim \boldsymbol{B8}$ のうち２問を選択して解答せよ．問題ごとに別の答案用紙を用いよ．

問題Ａ１． A を可換環, M を A 加群, N_1, N_2, N_3 を M の部分 A 加群とする．もし $N_1 \subset N_3$ ならば $(N_1 + N_2) \cap N_3 = N_1 + (N_2 \cap N_3)$ であることを証明せよ．

問題Ａ２． (1) 1 次元球面 $S^1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ から 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ への連続写像 f で, 任意の $\boldsymbol{x} \in S^1$ で $\boldsymbol{x} \perp f(\boldsymbol{x})$ かつ $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ となるものは存在するか．存在する場合はその例を構成し, 存在しない場合はその証明を与えよ．

(2) 2 次元球面 $S^2 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ から 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ への可微分写像 f で, 任意の $\boldsymbol{x} \in S^2$ で $\boldsymbol{x} \perp f(\boldsymbol{x})$ かつ $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ となるものは存在するか．存在する場合はその例を構成し, 存在しない場合はその証明を与えよ．

(3) 3 次元球面 $S^3 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ から 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ への連続写像 f で, 任意の $\boldsymbol{x} \in S^3$ で $\boldsymbol{x} \perp f(\boldsymbol{x})$ かつ $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ となるものは存在するか．存在する場合はその例を構成し, 存在しない場合はその証明を与えよ．

問題Ａ３． $\mathbb{R}$ 上の実数値ルベーグ可測関数 φ で $|\varphi|^p$ が $\mathbb{R}$ 上ルベーグ積分可能となるもの全体の集合を $L^p(\mathbb{R})$ で表す．$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $f > 0$ を固定する．$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を正の実数列とする．このとき, 以下の問いに答えよ．

(1) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(b_n x)$ が $L^1(\mathbb{R})$ で収束するための $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に関する条件を求めよ．

(2) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(b_n x)$ が $L^2(\mathbb{R})$ で収束するための $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に関する十分条件を一つ挙げよ．

(3) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(b_n x)$ が $L^2(\mathbb{R})$ で収束しないための $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に関する十分条件を一つ挙げよ．

(4) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(b_n x)$ が $L^1(\mathbb{R})$ で収束するが, $L^2(\mathbb{R})$ で収束しないような $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の例を挙げよ．

問題Ａ４． 命題論理式 P, Q, R を以下のように定める．ただし，X_1, X_2, X_3, X_4 は命題変数であり, 記号 $\vee, \wedge, \neg$ はそれぞれ「または」,「かつ」,「$\cdots$ でない（否定)」を表す．

$(X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2)$ を P とする．

$(X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4)$ を Q とする．

$\neg X_2 \vee X_3$ を R とする．

このとき, 以下の問いに答えよ．答えだけでなく理由も述べること．

(1) P は充足可能であるか．

(2) P はトートロジー（恒真式）であるか．

(3) $\neg(P \wedge Q \wedge R) \vee X_1 \vee X_4$ はトートロジーであるか．

問題B１. 自然数 n に対し, $\zeta^n = 1$, かつ $\zeta^m \neq 1$ (ただし m は $1 \leq m < n$ となる全ての自然数) となるような複素数 ζ を１の原始 n 乗根と呼び, それら全ての集合を W_n と書く. さらに

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in W_n} (X - \zeta)$$

とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) １の原始 12 乗根を全て求め, それぞれ $a + bi$ (ただし a, b は実数, $i = \sqrt{-1}$) の形で表せ.

(2) $\Phi_5(X)$, $\Phi_9(X)$ を具体的に多項式の形で表せ.

(3) 奇素数 p に対し, $\Phi_p(X+1) = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} a_j X^j$ $(N = |W_p|)$ とおいたとき, 各 a_j を求めよ.

(4) 奇素数 p に対し, $\Phi_p(X)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であることを証明せよ.

問題B２.

(1) 素数 p に対し, 位数 p の群を決定せよ.

(2) 位数 4 の群を決定せよ.

(3) 位数 35 の群を決定せよ.

問題B３. 弧状連結な位相空間 X と $x \in X$ に対して,

$$\Omega(X, x) = \{w : [0,1] \to X \mid w(0) = w(1) = x, w \text{ は連続 }\}$$

とし, $c \in \Omega(X, x)$ を

$$c(t) = x \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

$v, w \in \Omega(X, x)$ の積 $v \cdot w \in \Omega(X, x)$ を

$$(v \cdot w)(t) = \begin{cases} v(2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ w(2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $w \in \Omega(X, x)$ に対して, $c \cdot w \simeq w \cdot c \simeq w$ となることを示せ.
(ただし $\alpha \simeq \beta$ は α と β が 0 と 1 を固定したホモトピーでホモトープ（ホモトピック）であることを表す.)

(2) $w \in \Omega(X, x)$ に対して, $\bar{w} \cdot w \simeq w \cdot \bar{w} \simeq c$ となる $\bar{w} \in \Omega(X, x)$ を求めよ.

(3) $X = \{e^{2\pi i \theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta \leq 1\}$, $x = 1$ とし, $w \in \Omega(X, x)$ を

$$w(t) = e^{2\pi i \left(t - t^2\right)}$$

と定義する. $w \simeq c$ を示せ.

問題B４． $F:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を

$$F(x,y,z,w) = \left(x^2+y^2+z^2-w^2,\ \frac{x}{2}-w+1\right)$$

で定める．このとき, 以下の問いに答えよ．（知っている定理を証明なしで用いても良い．その場合は, 使う定理を記すこと．）

(1) $M = F^{-1}(\mathbf{0})$ とおくと, M は可微分多様体になることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^4$ の標準的な計量の M への制限を考え, これにより M をリーマン多様体とみなす．$K = K(p)$ を M の（点 p における）ガウス曲率とする．リーマン計量に付随した M の体積要素を dv とする．このとき, $\displaystyle\int_M K dv$ を求めよ.

問題B５． X をバナッハ空間とし, $A : X \longrightarrow X$ を有界線形作用素で $\|A\| < 1$ を満たすものとする. ここで, $\|A\|$ は

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

で定義される作用素ノルムである．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) I を恒等作用素とするとき, 作用素 $I - A$ は１対１であることを示せ.

(2) 作用素に値をとる級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

は作用素ノルムに関してある有界線形作用素に収束することを示せ.

(3) 作用素 $I - A$ の逆作用素 $(I - A)^{-1}$ は有界となることを示せ.

問題B６． C^2 関数 $u(t,x)$ は次の偏微分方程式の初期境界値問題の解であるとする.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2x \quad (\ t>0\,,\ 0<x<\pi\ ) \\
&u(t,0) = 0\,, \quad u(t,\pi) = 0 \quad (\ t>0\ ) \\
&u(0,x) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \quad (\ 0<x<\pi\ )
\end{aligned}$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $u(t,x) = v(t,x) + \varphi(x)$ とし, C^2 関数 $v(t,x)$ は次を満たすとする.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\ t>0\,,\ 0<x<\pi\ ) \\
&v(t,0) = 0\,, \quad v(t,\pi) = 0 \quad (\ t>0\ )
\end{aligned}$$

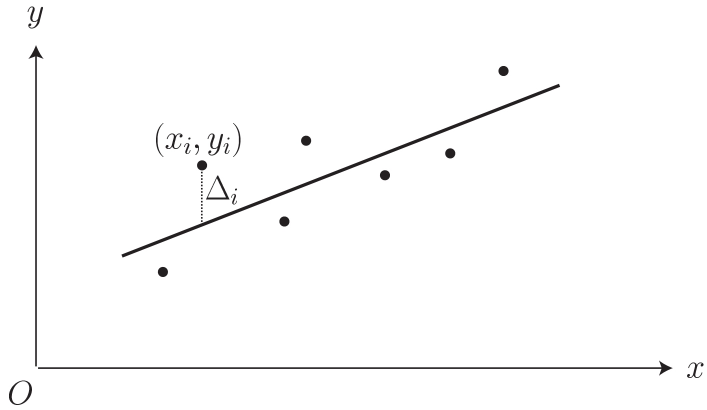
このとき, 関数 $\varphi(x)$ を求めよ.

(2) $v(0,x)$, $\dfrac{\partial v}{\partial t}(0,x)$ を求めよ.

(3) $v(t,x)$, $u(t,x)$ を求めよ.

問題B７． ある実験を行った．その結果 n ポイントの (x_i, y_i) 値が測定された．このすべての測定点を xy 面にプロットすると以下の図のような線形な関係を得た．そこでこのデータを直線近似させることにした．直線を $y = ax + b$ とすると図で示される Δ_i は $\Delta_i = y_i - ax_i - b$ となる．Δ_i は正負があるのでこれを 2 乗したものを n データポイント分すべて加えたものを F とする．つまり $F = \Sigma_{i=0}^{n-1} \Delta_i^2$.

この F を最小にする a, b を求めればよい．それは $\partial F/\partial a = 0$, $\partial F/\partial b = 0$ から求められる．



このとき, 以下の問いに答えよ．

(1) $\partial F/\partial a = 0$, $\partial F/\partial b = 0$ から a, b を求めよ．

(2) 実数配列 `x[i],y[i],i=0,..,n-1` にデータが与えられているとき, このデータを用いて a, b を計算する関数副プログラム linefit を書け．プログラム言語は何を使用しても良いが, 何を使用したか明記すること．入力引数, 戻り値の指定は自由であるが, linefit 内で `a,b` はプリントされること．できれば呼び出しプログラム側に `a,b` を戻すことが望ましい．またどちらの配列（`x[],y[]`）も局所的に宣言しても, 大局的に宣言しても構わない．

問題B８． A を n 次実対称正方行列とし, b を $1 \leq b < n$ を満たす自然数とする．X, Y は $n \times b$ の実行列で ${}^tXX = I_b$, ${}^tYY = I_b$ を満たすとする．但し ${}^tX, {}^tY$ はそれぞれ X, Y の転置行列で, I_b は b 次の単位行列を表す．α, β を b 次実正方行列とし, $AX = X\alpha$, $AY = Y\beta$ とする．

(1) 行列 α, β は対称行列であることを示せ．

(2) 行列 α, β が共通の固有値を持たなければ X と Y は直交すること, つまり ${}^tXY = O$ であることを示せ．ここで O は零行列を表す．