平成１９年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）入学試験(平成１８年９月５日)

数学Ｉ　(9:30-11:30)

問題３, 問題４, 問題５のうち２問選択し, 問題１と問題２の２問と合わせ計４問に解答せよ.
問題ごとに別の答案用紙を用いよ.

問題１． n 次正方行列全体 $M(n,\mathbb{R})$ を n^2 次元実線形空間と同一視する．以下の問いに答えよ．

(1) n 次正方行列 A, B に対し，写像 $\varphi_{A,B}$ を

$$\varphi_{A,B} : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}) \qquad X \mapsto AXB$$

と定めたとき $\varphi_{A,B}$ は線形写像となることを示せ．

(2) $P, Q \in GL(n,\mathbb{R})$, $A, B \in M(n,\mathbb{R})$ に対し次を示せ．

(a) $\varphi_{P,Q}$ は逆写像を持つ．

(b) $\varphi_{P,Q} \circ \varphi_{A,B} \circ \varphi_{P,Q}^{-1} = \varphi_{PAP^{-1},Q^{-1}BQ}$.

(3) 2 次の正方行列 E_{ij} を，(i,j) 成分が 1，その他が 0 となる行列として定める．また

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}$$

とする $(a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R})$．このとき 4 次元実線形空間 $M(2,\mathbb{R})$ の基底

$$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$$

に関して線形写像 $\varphi_{A,B}$ を行列表示せよ．

(4) E を 2 次の単位行列とする．$A \in M(2,\mathbb{R})$ の固有値を a_1, a_2(重複を含む)，$B \in M(2,\mathbb{R})$ の固有値を b_1, b_2 (重複を含む) としたとき線形写像

$$\varphi_{A,E} - \varphi_{E,B} : M(2,\mathbb{R}) \to M(2,\mathbb{R}) \qquad X \mapsto AX - XB$$

の固有値を求めよ．

問題２． f を 開区間 $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ 上の正値連続関数とする．

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx < +\infty$$

ならば，次の 3 条件を満たす数列 $\{x_n\}$ が存在することを示せ．

(i) $0 < x_n < 1 \quad (\forall n\,)$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

問題３． 以下の問いに答えよ.

(1) X をハウスドルフ位相空間とする．もし X の部分集合 K がコンパクトならば K は閉集合であることを示せ.

(2) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合系 $\mathcal{U}$ を

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus U \text{ は有限集合 }\} \cup \{\emptyset\}$$

と定めると, $\mathbb{R}$ は $\mathcal{U}$ を開集合系とする位相空間となることを示せ．（ただし $\mathbb{R} \setminus U$ は U の補集合を表し, $\emptyset$ は空集合を表す．）以下, この位相空間を X_0 で表す.

(3) X_0 がハウスドルフでないことを示せ.

(4) X_0 のコンパクトな部分集合 K_0 で閉でない例を見つけよ.

問題４． $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ に反時計まわりの向きをつける．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z(1-z)}$ の値を求めよ.

(2) n を自然数とするとき $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z^n(1-z)^n}$ の値を求めよ.

(3) n, m を自然数とするとき $\displaystyle\int_\Gamma \frac{(1-z)^m}{z^n}\,dz$ の値を求めよ.

問題５． n を自然数，p を素数とするとき，n を割り切る p の最大べき指数を $\nu_p(n)$ とする．すなわち，$\nu_p(n)$ は $p^{\nu_p(n)} \mid n$ かつ $p^{\nu_p(n)+1} \nmid n$ を満たす整数である．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $n!\ (= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1)$ に対して

$$\nu_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

が成り立つことを示せ．但し，x を実数とするとき，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする.

(2) n の p 進展開表示に現れる各桁の数の総和を $S_p(n)$ とする．すなわち，n の p 進表示を $n = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i p^i \quad (0 \leq a_i \leq p-1, a_k \neq 0, k \geq 0)$ とするとき，$S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i$ である．このとき

$$\nu_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$$

が成り立つことを示せ.

(3) (1)（または (2)）を用いて，30 以下の各素数 p に対して $\nu_p(30!)$ を計算することにより 30! を素因数分解せよ.

問題1． 以下の問いに答えよ.

(1) Translate the following into Japanese.

Let S be a set of real numbers. The supremum of S, denoted by $\sup(S)$, is defined to be the smallest real number that is greater than or equal to every number in S. We define $\sup(S) = -\infty$ when S is empty and $\sup(S) = +\infty$ when S is not bounded above. Then every set of real numbers has a supremum. The supremum of S may, or may not, belong to the set S.

(2) Is there any closed set of real numbers which does not include its supremum? Explain your answer in English.

(3) Is there any bounded closed set of real numbers which does not include its supremum? Explain your answer in English.

問題2． 以下の問いに答えよ.

(1) 「位相空間 X に有限開被覆が存在する」という文章を英訳せよ.

(2) 「位相空間 X の任意の開被覆に有限部分被覆が存在する」という文章を英訳せよ.

(3) 有限部分被覆が存在しないような開被覆を持つ位相空間の例を挙げ, 英語で説明せよ.

平成１９年度首都大学東京　大学院（博士前期課程）入学試験(平成１８年９月５日)

数学II　(13:00-15:30)

$\boldsymbol{A1} \sim \boldsymbol{A4}$ のうち１問を選択して解答せよ.

さらに $\boldsymbol{B1} \sim \boldsymbol{B8}$ のうち２問を選択して解答せよ.
問題ごとに別の答案用紙を用いよ.

問題A１． $\mathbb{R}[x,y]$ のイデアル I に対し，

$$\mathbb{V}(I) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \text{ 全ての } f \in I \text{ に対し } f(a,b) = 0\ \},$$
$$\mathrm{Rad}(I) = \{f \in \mathbb{R}[x,y]\ :\ f^n \in I \text{ となる正の整数 } n \text{ が存在する }\}$$

とし, さらに $\mathbb{R}^2$ の部分集合 X に対し，$\mathbb{R}[x,y]$ のイデアル $\mathbb{I}(X)$ を

$$\mathbb{I}(X) = \{f \in \mathbb{R}[x,y]\ :\ \text{全ての } (a,b) \in X \text{ に対し } f(a,b) = 0\ \}$$

で定義する． 以下の問いに答えよ.

(1) イデアル $I = (x^2 + y^2)$ について，$\mathrm{Rad}(I) = I$ となることを示せ.
(2) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 X に対して定まるイデアル $\mathbb{I}(X)$ は $\mathrm{Rad}(\mathbb{I}(X)) = \mathbb{I}(X)$ を満たすことを示せ.
(3) イデアル $I = (x^2 + y^2)$ について，$I = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$ が成立するかどうか, 理由を付けて答えよ.

問題A２． 以下の写像は存在するか. 存在する場合は, 例を挙げ, その例が求められている写像になることの証明を付けよ. 存在しない場合には, 存在しないことの証明を与えよ.

(1) S^1 から $\mathbb{R}P^2$ へのはめ込み写像.
(2) S^1 から $\mathbb{R}P^2$ への埋め込み写像.
(3) S^2 から $\mathbb{R}P^2$ へのはめ込み写像.
(4) $\mathbb{R}P^2$ から $\mathbb{R}^2$ へのはめ込み写像.

問題A３． $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度を m とし, $f(x)$ をルベーグ可測関数とする. このとき, f が性質 (A) を満たすとは,

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $m(E) < \delta$ なる任意のルベーグ可測集合 E に対して $\displaystyle\int_E |f|dx < \varepsilon$ が成り立つ」

こととする.

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, dx < +\infty$ だが, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|\, dx = +\infty$ なる関数 f の例を 1 つ挙げよ.
(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|\, dx < +\infty$ だが, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, dx = +\infty$ なる関数 f の例を 1 つ挙げよ.
(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, dx < +\infty$ ならば f は性質 (A) を満たすことを示せ.
(4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|\, dx < +\infty$ ならば $\displaystyle\lim_{c\to+\infty}\int_{A_c} f\, dx = 0$ となることを示せ.
ただし, $A_c = \big\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > c\big\}$ である.
(5) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|\, dx < +\infty$ ならば f は性質 (A) を満たすことを示せ.

問題A４． 以下の問いに答えよ．

(1) チューリングマシン（Turing machine）の定義を述べよ．チューリングマシンの定義には様々な変種と様々な流儀があり, そのどれを答えても構わない．ただし, どれか一つの定義のみを解答すること．たとえば, 片側無限のテープを１本のみ持ち, ヘッド（カーソル）をひとつ持つチューリングマシンの定義を解答した場合は, それ以外の定義を答えないこと．また, 以下の問 (2) の解答においては, 本問 (1) の解答で述べたチューリングマシンの定義を用いるものとする．

(2) 自然数（0 を含む）全体の集合を $\overline{\mathbb{N}}$ で表す．$\overline{\mathbb{N}}$ から $\overline{\mathbb{N}}$ への関数であって，いかなるチューリングマシンによっても計算できないものが存在する．その証明の概略を述べよ．なお, 存在の証明さえできていれば, 計算できない関数の具体例を必ずしも提示しなくてよい．

問題B１． この問題では，環は乗法の単位元 1 を持つものだけ考える．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の 2 次上三角行列の全体は位数 8 の非可換環をなすことを示せ．

(2) 環 R は次の 2 条件を満たすとする．

  (a) 有限集合である．(位数を n とする)

  (b) 加法に関して巡回群になる．

  このとき，R は環として $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型であることを示せ．

(3) 非可換環の位数の最小値は 8 であることを示せ．

問題B２． L は 4 変数の有理函数体 $\mathbb{C}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ とし，$K = \mathbb{C}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ とおく．ただし，σ_i は i 次の基本対称式を表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f_1 = (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$, $f_2 = (x_1 + x_3) - (x_2 + x_4)$, $f_3 = (x_1 + x_4) - (x_2 + x_3)$ とおく．$L_1 = K(f_1^2, f_2^2, f_3^2)$ とおくとき，L/L_1 及び L_1/K は共に Galois 拡大となることを示し，その Galois 群を求めよ．

(2) $u = f_1^2 + \omega f_2^2 + \omega^2 f_3^2$ とおく．$L_2 = K(u^3)$ とおくとき，L/L_2 は Galois 拡大でその Galois 群が 4 次の交代群となることを示せ．(ただし ω は 1 の原始 3 乗根を表す．)

問題B３． $\mathbf{H}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ とする．$\mathbf{H}$ 上には，リーマン計量 $ds^2 = \dfrac{|dz|^2}{(\operatorname{Im} z)^2}$ が定義されているとする．すなわち，$z = x + \sqrt{-1}\, y \in \mathbf{H}$ と上半ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) : y > 0\}$ の点 (x, y) を同一視するとき，$ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a, b, c, d を $ad - bc = 1$ を満たす任意の実数とするとき，$f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ で，$\mathbf{H}$ の C^∞ 級の微分同相変換が定義されることを示せ．以下では，この f を行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対応する 1 次分数変換ということにする．

(2) 上で定義した 1 次分数変換 f は $\mathbf{H}$ の等長変換であることを示せ．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ に対応する 1 次分数変換 f_0 は，上半 y 軸 $\gamma_0 = \{\sqrt{-1}\, t : t > 0\}$ を単位半円 $\gamma_1 = \{z \in \mathbf{H} : |z| = 1\}$ の上に写すことを示せ．

(4) γ を半円 $\{z \in \mathbf{H} : |z - p| = r\}$ とする．ただし，p は任意の実数，r は任意の正の実数とする．このとき，$\mathbf{H}$ の等長変換 f で $f(\gamma_0) = \gamma$ を満たすものが存在することを示せ．

問題B４． 次の図形の整係数ホモロジー群を求めよ．

(1) $S^1 \times [0, 1]$ から ひとつの内点を除いた図形 X.

(2) $S^1 \times [0, 1] \times [0, 1]$ から ひとつの内点を除いた図形 Y.

(3) $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$ から ひとつの内点を除いた図形 Z.

問題B５． 一般にヒルベルト空間 X 上の有界自己共役作用素 A_1, A_2 に対して,

$$(A_1 x, x) \leqq (A_2 x, x) \qquad (\ \forall x \in X\ )$$

が成り立つときに $A_1 \leqq A_2$ と書く.

(1) 実ヒルベルト空間 $X = L^2(0,1)$ を考えて,

$$(Bf)(t) = \int_t^1 f(x)\,dx \qquad (\ 0 \leqq t \leqq 1\ )$$

とおく. B は X 上の有界線形作用素であって, その作用素ノルムは $\|B\| \leqq 1$ を満たすことを示せ. また, B の共役作用素 B^* は

$$(B^* f)(t) = \int_0^t f(x)\,dx \qquad (\ 0 \leqq t \leqq 1\ )$$

と書けることを示せ.

(2) (1) の作用素 B を用いて $A = BB^*$ とおくと, A は自己共役作用素であって, $0 \leqq A \leqq I$ を満たすことを示せ. ここで, I は恒等作用素である.

(3) 以下, 一般のヒルベルト空間 X 上の自己共役作用素 A で $0 \leqq A \leqq I$ を満たすものを考える. このとき, 帰納的に

$$A_1 = A, \qquad A_{k+1} = A_k - A_k^2 \quad (\ k \geqq 1\ )$$

と定めるとき, $0 \leqq A_k \leqq I$ ($k \geqq 1$) を示せ.

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2 = A_1 - A_{n+1}$ に注意して,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x\|^2 < +\infty \quad (\forall x \in X\ )$$

となることを示せ. さらに, 任意の $x \in X$ に対して

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 x$$

を示せ.

問題B６． 次の常微分方程式を考える.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cos t & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) この常微分方程式の 1 次独立な 2 つの解 $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) (1) で求めた 2 つの解に対して, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$ とするとき, $X(t+2\pi) = X(t)M$ を満たす定数行列 M を求めよ.

(3) $X(t)$ は次の形に表せることを示せ.

$$X(t) = Y(t)e^{t\Lambda}, \quad Y(t+2\pi) = Y(t), \quad \Lambda \text{ は定数行列}$$

ただし, $e^{t\Lambda}$ は行列の指数関数とする.

問題Ｂ７． (1) 以下は Java あるいは C 言語で同じ働きをするプログラムを記述したものである．
Java での記述：

```
class twodim {
    final static int LIMIT=4;
    public static int[] ch2dim1dim(int ainput[][],int n,int m) {
        int []work = new int [n*n] ;
        int i,j,k=0;

        for(i=0;i<n;i++)
            for(j=0;j<m;j++)
                work[j+m*i]=ainput[i][j] ;
        return work ;
    }
    public static void main(String args[]) {
        int a[][] = new int [LIMIT][LIMIT] ;
        int []c = new int [LIMIT*LIMIT] ;
        int i,j,k ;
        k=0;
        for(i=0;i<LIMIT;i++)
            for(j=0;j<LIMIT;j++)
                a[j][i]=k++ ;
        c=ch2dim1dim(a,LIMIT,LIMIT) ;
        for(i=0;i<LIMIT*LIMIT;i++)
            System.out.print(c[i]+" ") ;
        System.out.print() ;
    }
}
```

C での記述：

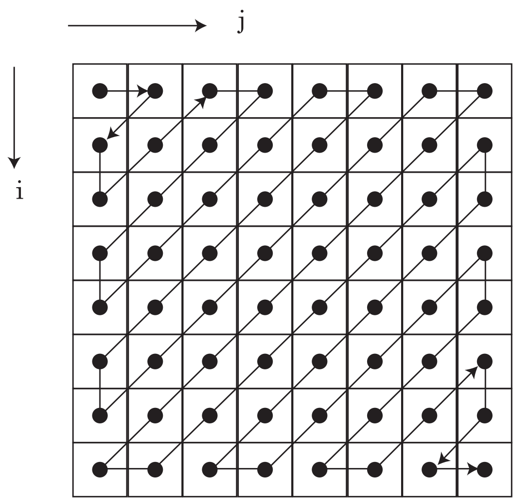
```
#include <stdio.h>
#define LIMIT 4
int * ch2dim1dim(int *ainput[], int n, int m) {
  int i,j ;
  int work[200] ;
  for(i=0;i<n;i++)
    for(j=0;j<m;j++)
      work[j+m*i]=*ainput[i]++ ;
  return work;
}
int main() {
  int a[LIMIT][LIMIT],*a1[LIMIT] ;
  int *c ;
  int i,j,k=0;
  for(i=0;i<LIMIT;i++)
    for(j=0;j<LIMIT;j++)
      a[j][i] = k++ ;
  for(i=0;i<LIMIT;i++) a1[i]=a[i] ;
  c = ch2dim1dim(a1,LIMIT,LIMIT) ;
  for(i=0;i<LIMIT*LIMIT;i++)
      printf("%d ",*c++) ;
  printf("\n") ;
}
```

細かい書式の違いは無視すると両者とも同じ結果を標準出力ストリームにプリントする．その印刷結果を書き出しなさい．配列, あるいはポインタで示されるアドレスから保持されているデータの順を知りたいので細かい書式指定は無視してよい．

(2) 2 次元整数配列 `a[8][8]` と 1 次元配列 `b[64]` がある．2 次元配列の最初の添字は行（i）方向, 2 番目のそれは列（j）方向に動くとする．この配列に保持されたデータを 1 次元データに並び替えたい．並び替えの方法は以下の図に示した矢印の順である．つまり

`a[0][0],a[0][1],a[1][0],a[2][0],a[1][1],a[0][2],`$\cdots$

である．この並び替えを行う関数副プログラム（メソッド）zigzag を書け．プログラム言語は Java, C 以外でも良いが, 何を使用したか明記すること．その場合問題 (1) の関数（メソッド）ch2dim1dim はどう記述されるかも併せて示すこと．関数（メソッド）の入力引数, 戻り値の指定は自由であるが, この関数を呼び出すプログラム部ですでに `a` の値は入力済みであり, 呼び出し後 `b` がすぐに参照できなくてはならない．



問題Ｂ８． 以下の問いに答えよ．

(1) 五次方程式 $x^5 - 4x - 8 = 0$ は唯一つの実数解を持つ．この実数解の小数点以下 5 桁目を四捨五入して丸めた値を求めよ．

(2) 小数点以下 12 桁の 7.2 の自然対数の近似値は 1.974081026022 である．このことを利用し, 7.416 の自然対数の近似値の小数点以下 6 桁目を四捨五入して丸めた値を求めよ．