平成１８年度 大学院入試問題（博士前期課程）平成１８年２月１４日実施

数学 I

次の４問すべてに解答せよ. 問題ごとに別の答案用紙を用いよ.

問題 1.

$\mathbb{R}^4$ の部分集合

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

について次の問いに答えよ.

(1) W は $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(2) ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 := (1, 1, 0, 0)^T, \quad \boldsymbol{a}_2 := (1, 0, -1, 0)^T, \quad \boldsymbol{a}_3 := (1, 0, 0, 1)^T$$

は W の基底を与えることを示せ.

(3) F は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換とする．$F(W) \subset W$ を満たすことを示せ.

(4) F を W に制限して得られる線形写像 F_W の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ に関する表現行列を求めよ.

問題 2.

(1) $I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上で一様連続であることの定義を述べよ.

(2) 関数 $f(x) = |x|$, $(x \in \mathbb{R})$ が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

(3) a を正の定数とし，$f(x) = |x|^a$, $(x \in \mathbb{R})$ とおく．$f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であるための必要十分条件は $a \leq 1$ であることを示せ.

問題 3.

$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x + y \leq 2 \right\}$ とする.

(1) 変数変換 $x = u - uv$, $y = uv$ により, xy–平面の領域 D は uv–平面のどのような集合に写るか？

(2) ヤコビアン $J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) 次の重積分の値を求めよ.

$$I = \iint_D \frac{x^2}{(x+y)^3}\, dxdy$$

問題 4.

距離空間 (X, d) において

$$d(a,c) \leq \max\{d(a,b), d(b,c)\} \quad (\forall a, b, c \in X)$$

が満たされるとき次の問いに答えよ.

(1) 点 a の ε-近傍 $N_\varepsilon(a)$ の定義を述べよ.

(2) この場合, ε-近傍 $N_\varepsilon(a)$ は閉集合であることを示せ.

(3) 2 点 $a, b \in X$ に対し, もし $N_\varepsilon(a) \cap N_\varepsilon(b) \neq \emptyset$ を満たせば, $N_\varepsilon(a) = N_\varepsilon(b)$ であることを示せ.

数学 II

A1-A3 のうち 1 問を選択し解答せよ．さらに $\mathbf{B1}-\mathbf{B8}$ と **C** の合計 9 問のうち 2 問を選択し解答せよ．問題ごとに別の答案用紙を用いよ．

問題 A1.

N を $n\times n$ べき零行列とし，$\mathbb{C}^n$ を n 次元列ベクトル全体のなすベクトル空間とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) N^n を求めよ．

(2) 自然数 ν に対して, $T_\nu=\{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n \mid N^\nu\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$ とおくとき, $T_\nu\subseteq T_{\nu+1}$ を各 ν に対して示せ．

(3) N を左からかける作用は, 線型写像

$$f_\nu : T_{\nu+1}/T_\nu \to T_\nu/T_{\nu-1}$$

を引き起こすことを示せ．（ただし, $T_0=\{\mathbf{0}\}$ とする.）

(4) 上の f_ν は各 ν に対して単射であることを示せ．

(5) $\dim\operatorname{coker} f_\nu$ は, N のジョルダン標準形に登場するサイズ ν のジョルダン細胞の個数に等しいことを証明せよ．

問題 A2.

閉区間 $[0,1]$ 上の実数値関数 f を

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos 2\pi(m!)x)^{2n}$$

としたとき, 次の問いに答えよ．

(1) f の値域を求めよ．

(2) f の連続性を論ぜよ．

(3) f はルベーグ積分可能である事を示し，その積分値を求めよ．

問題 A3.

(1) 次の (i), (ii) で定義される空間 X, Y は互いに同相であること示せ．

(i) S^n を $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の単位球面とするとき, 空間 X は S^n の（原点対称）な 2 点を同一視することによって得られる．

(ii) 空間 Y は $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ の中の 2 点が原点を通る一本の直線上にあるとき, その 2 点を同一視することにより得られる．

(2) 空間 X は C^∞-級多様体であることを示せ．また, そのような空間は通常何と呼ばれているか?

問題 B1.

体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$ (ただし $i = \sqrt{-1}$) について答えよ.

(1) ガロア群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の生成元を求め，群の構造を決定せよ.

(2) $K/\mathbb{Q}$ の中間体のうちで $\mathbb{Q}$ 上 4 次拡大となるものを全て求めよ.

(3) $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ となる $\alpha \in K$ を一つ求め, α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

問題 B2.

$\mathbf{S}_n$ を n 次対称群とする. 巡回置換 $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_i)$ の長さを i で定義する.

(1) $\mathbf{S}_n$ の任意の要素は, 1 から n までの数字が 1 回ずつ登場するように, 巡回置換の積として表すことができることを示せ. （たとえば，単位元 e は，$(1)(2)(3)(4)\dots(n)$ と表せる.）

$\mathbf{S}_n$ の要素 g を, 1 から n までの数字が 1 回ずつ登場するように, 巡回置換の積として表したときの巡回置換の個数を $c(g)$ で表す. （たとえば, 単位元 e に対しては, $c(e) = n$.）多項式 $F_n(t)$ を

$$F_n(t) = \sum_{g \in \mathbf{S}_n} t^{c(g)}$$

で定義するとき,

(2) $F_2(t)$ と $F_3(t)$ を求めよ.

(3) $F_{n+1}(t) = (t+n)F_n(t)$ を証明せよ.

(4) $F_n(t)$ を求め, 因数分解せよ.

(5) $\mathbf{S}_n$ $(n \geq 2)$ の要素のうち, $c(g)$ が偶数であるものの個数を求めよ.

問題 B3.

X を次の図形とするとき, $X \times S^1$ のホモロジー群を求めよ.

(1)

(2)

問題 B4.

$\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $s\in\mathbb{R}$ に対して $\alpha(s)>0$ かつ $\alpha'(s)^2+\beta'(s)^2=1$ を満たす C^∞-級関数とし, $S^1=\{(\cos t,\sin t)\in\mathbb{R}^2\mid t\in\mathbb{R}\}$ とする. 写像 $F:S^1\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ を $F((\cos t,\sin t),s)=(\alpha(s)\cos t,\alpha(s)\sin t,\beta(s))$ で定義する.

(1) 各点 $p\in S^1\times\mathbb{R}$ における線形写像 $(dF)_p:T_p(S^1\times\mathbb{R})\to T_{F(p)}\mathbb{R}^3$ (F の微分写像) の階数を求めよ.

(2) F が埋め込みであるための必要十分条件を求めよ.

(3) 曲面 $S=F(S^1\times\mathbb{R})$ の各点 (x,y,z) におけるガウス曲率 $K(x,y,z)$ を求めよ.

問題 B5.

$\mathbb{R}^n$ 上の実数値関数 $u(x)$ に対して, 次の偏微分方程式を考える.

$$\Delta u(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)=u(x),\qquad x=(\,x_1,\ldots,\,x_n\,)\in\mathbb{R}^n \tag{$*$}$$

(1) $f(t)$ ($t\in\mathbb{R}$) を次の条件 (a), (b) を満たす 2 階連続微分可能な関数とするとき, $f(t)$ が満たす常微分方程式を求めよ.

(a) $|a|=1$ である任意の $a\in\mathbb{R}^n$ に対して, 関数 $u_a(x)=f(a\cdot x)$ は $(*)$ の解である. ここで, $a\cdot x$ は $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積を表し, $|a|=\sqrt{a\cdot a}$ である.

(b) $f(0)=f'(0)=1$.

(2) (1) の条件 (a), (b) を満たす関数 $f(t)$ を求めよ.

(3) (1) で求めた $f(t)$ と $|a|=|b|=1$, $a\neq b$ を満たす $a,b\in\mathbb{R}^n$ に対して, 関数 $u_a(x)=f(a\cdot x)$ と 関数 $u_b(x)=f(b\cdot x)$ は一次独立となることを示せ.

問題 B6.

区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体のなす集合を X で表す. X は $\|x\|_X=\max_{0\le t\le 1}|x(t)|$ というノルムでバナッハ空間になることは既知とする. $[0,1]\times[0,1]$ 上の実数値連続関数 $K(t,s)$ に対して, X 上の線形作用素 T を

$$(Tx)(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$$

で定義する.

(1) T の作用素ノルムに対する評価式

$$\|T\|\le\max_{0\le t\le 1}\int_0^1|K(t,s)|\,ds$$

を示し, $K(t,s)=\frac{1}{(t+s)^2+1}$ のとき, $\|T\|<1$ となることを示せ.

(2) $\|T\|<1$ のとき， $f\in X$ に対して $x-Tx=f$ はただ1つの解 $x\in X$ をもつことを示せ.

(3) T は X 上のコンパクト作用素とであることを示せ.

問題 B7.

$\Sigma=\{\mathtt{a}，\mathtt{b}\}$，$\Sigma^*$ はそのクリーネ閉包（すなわち，Σ の文字から構成されるすべての語（空語も含む）の集合とする）．L は Σ^* の部分集合で右端から3番目の文字が $\mathtt{a}$ であるような語全体からなるものとする．このとき，次の問いに答えよ

(1) L を受理言語とする決定性有限オートマトンで，その状態数が8であるものを構成し，その状態遷移図を与えよ．

(2) L を受理言語とする決定性有限オートマトンで，その状態数が8より小さいものは存在するか？もし存在するなら，それを構成せよ．また，存在しないならば，それを証明せよ．

問題 B8.

奇数 $n>0$ の自明でない約数を探すために $0<a<n$ となる整数 a を取る. もし a が n と互いに素でなければ最大公約数 $\gcd(a,\,n)$ が n の自明でない約数を与える. また

$$\gcd(a,\,n)=1 \tag{1}$$

の場合, もし整数 $b>0$ が取れて

$$a^2\equiv b^2 \pmod{n},\quad a\not\equiv \pm b \pmod{n} \tag{2}$$

ならば n は積 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ は割切るが, そのどちらの約数 $a+b$ も $a-b$ も割切らないから $\gcd(a+b,\,n)$ が n の自明でない約数を与える.

ここでは m を $\sqrt{n}$ 以上の最小の整数として, 順次 $a=m,\,m+1,\,m+2,\,\ldots$ に対して $\gcd(a,\,n)$ を計算して, もし (1) の場合には更に $a^2 \bmod n$ を計算して (2) を満たす b を探す. ただし，最大公約数の計算には素因数分解を利用せず，互除法を用いる. この方法で $n=403$ の分解 $n=403=13\cdot 31$ を求める計算過程を書け.

問題 C.

あなたの知っている数学の定理をひとつ挙げ, その証明, 応用, 意義などについて述べよ.