平成１８年度 大学院入試問題（博士前期課程）平成１７年９月６日実施

数学 I　(9:30 - 11:30)

次の４問すべてに解答せよ．問題ごとに別の答案用紙を用いよ．

問題 1.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ について, 線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\ \ (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定義するとき, 次の問に答えよ.

(1) 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間 $W(\subset \mathbb{R}^3)$ の次元と基底を求めよ.

(2) f の像 $f(\mathbb{R}^3)$ の次元と基底を求めよ.

(3) $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3} \right\}$ とするとき, T の逆像 $f^{-1}(T)$ は具体的にどのような集合か？

問題 2. $f(x), f'(x), f''(x)$ が区間 $[0,1]$ 上で連続であるとする．以下の問に答えよ.

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} f(\frac{1}{k})$ が収束するならば, $f(0) = 0$ となることを示せ.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} f(\frac{1}{k})$ が収束するならば, $f'(0) = 0$ となることを示せ.

(3) $f(0) = f'(0) = 0$ ならば, $\sum_{k=1}^{\infty} f(\frac{1}{k})$ は絶対収束することを示せ.

(4) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx$ および $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx^n f(x)\, dx$ の値を求めよ.

問題 3.

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

とする．$r > 0$ に対し, C_r を原点中心で半径 r の円周とする.

(1) $\displaystyle\oint_{C_r} Pdx + Qdy$ を求めよ.

(2) $\displaystyle -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}$ を計算せよ.

(3) D を原点を内部に含むような領域とし, その境界を ∂D とする．$\displaystyle\oint_{\partial D} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$ を求めよ.
ただし, ∂D は, C^1 級の曲線とする.

問題 4. $\mathbb{R}^3$ を３次元ユークリッド空間とする．$(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ をひとつ固定する．ただし,$(c_1, c_2, c_3) \neq \mathbf{0}$ としておく.

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0\},\ \ M = \mathbb{R}^3 \setminus H$$

と定義する.

(1) M は $\mathbb{R}^3$ 内の開集合であることを証明せよ.

(2) M はどのような連結成分に分かれるか？証明とともに答えよ.

(3) M の連結成分のひとつを M_+ とするとき, その閉包 $\overline{M_+}$ はどのような集合に等しいか, 証明とともに答えよ.

(4) $\overline{M_+}$ の内点の全体はどのような集合に等しいか, 証明とともに答えよ.

平成１８年度 大学院入試問題（博士前期課程）平成１７年９月６日実施

数学 II　(13:00 - 15:30)

A1-A3 のうち１問を選択し解答せよ．さらに **B1 − B8** のうち２問を選択し解答せよ．問題ごとに別の答案用紙を用いよ．

問題 A1. X は有限集合, G は有限群で, X に左から作用しているものとする．$\mathcal{P}(X)$ で, X のべき集合（部分集合全体のなす集合）を表す．

(1) $\mathcal{P}(X)$ には自然な G の作用が定義されることを示せ．

(2) $X = G = \{\zeta_6^k \mid 1 \leq k \leq 6,\ \zeta_6 = \exp(2\pi\sqrt{-1}/6)\}$ （すなわち，G は１の６乗根全体からなる位数６の巡回群）とし，G の X への作用を，複素数の積で定義する．このとき $\mathcal{P}(X)$ の G-軌道の個数を求めよ．

問題 A2.

(1) C^r 級多様体 M から N への微分可能写像 $f : M \to N$ に対して, f の正則点とは何か説明せよ．

(2) 関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \ f(x_1, \cdots, x_n) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_n^2$, の臨界点を求めよ．

(3) 集合 $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ は $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな余次元１の正則な部分多様体となることを示せ．

問題 A3.

(1) A を $n \times n$ 実行列とする． $\exp A$ の定義を述べよ．

(2) A を $n \times n$ 実行列とする．

$$\det \exp A = e^{\mathrm{tr} A}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mathrm{tr}A$ は A のトレースを表すものとする．

(3) $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ とする．微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) - ky(t) \end{cases}$$

の解で, 初期条件 $(x(0), y(0)) = (p, q)$ を満たすものを $x = x(t, p, q)$, $y = y(t, p, q)$ で表す．ただし，$k \in \mathbb{R}$ は定数とする．$t_1 \in \mathbb{R}$ と領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ に対し,

$$U(t_1) = \{(x(t_1, p, q),\, y(t_1, p, q)) \in \mathbb{R}^2 \mid (p, q) \in U\}$$

とおく．U と $U(t_1)$ の面積比を求めよ．

問題 B1.

(1) 複素数係数の 3 変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y,z]$ の任意の元 f は

$$f = g_1(x,y,z)(y-x^3) + g_2(x,y,z)(z-x^5) + h(x),$$

ただし, $g_1, g_2 \in \mathbb{C}[x,y,z], h(x) \in \mathbb{C}[x]$, という形にかけることを示せ.

(2) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid y-x^3 = z-x^5 = 0\}$ とおく. $\mathbb{C}[x,y,z]$ の元 f が V 上で恒等的に 0 となるとき, f は $y-x^3$ と $z-x^5$ で生成されるイデアルに含まれることを示せ.

(3) $y-x^3$ と $z-x^5$ で生成されるイデアル $(y-x^3, z-x^5)$ は素イデアルであることを示せ.

問題 B2.

$\mathbb{F}_2$ を位数 2 の体とする. $\mathbb{F}_2$ 係数の一変数多項式環を $\mathbb{F}_2[x]$ とする. 剰余環 $R = \mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$ における x の剰余類を α とおく.

(1) $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ は R の $\mathbb{F}_2$ ベクトル空間としての基底であることを示せ.

(2) $4 \leq i \leq 7$ に対して α^i を $1, \alpha, \alpha^2$ の一次結合として表せ.

(3) R は位数 8 の体であることを示し, $R \setminus \{0\}$ は巡回群であることを示せ.

問題 B3.

(1) $X_1 = [-1,1] \times [-1,1]/\sim$, ただし, 同値関係 $\sim$ は

$$(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x',y') \\ \text{または} \\ x = -x' \in \{+1, -1\},\ y = y' \end{cases}$$

であたえられるものとする. このとき, X_1 の $\mathbb{Z}$-係数のホモロジー群を求めよ.

(2) $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ とする. $X_2 = D^2/\sim$, ただし, 同値関係 $\sim$ は

$$(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x',y') \\ \text{または} \\ x^2+y^2 = 1,\ x = -x',\ y = y' \end{cases}$$

であたえられるものとする. このとき,X_2 の $\mathbb{Z}$-係数のホモロジー群を求めよ.

(3) $X_3 = D^2 \times [0,1]/\sim$, ただし, 同値関係 $\sim$ は

$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \Longleftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = (x',y',z') \\ \text{または} \\ x^2+y^2 = 1,\ x = -x',\ y = y',\ z = z' \end{cases}$$

であたえられるものとする．このとき,X_3 の $\mathbb{Z}$-係数のホモロジー群を求めよ.

問題 B4.

(1) $C : (x(t), y(t))$ を (x, y)-平面にある正則曲線とする．t は区間 $[0, 1]$ 上を動き, $y(t) > 0$ と仮定する．x-軸を回転軸として C を回転させてできる $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S を回転面とよぶ．S の Gauss 曲率関数 K を求めよ.

(2) $K = 0$ を満たす回転面は何か.

(3) $K = 0$ を満たす 2 次元閉部分多様体は存在するか．存在するときには, 具体的な例を挙げ, かつ多様体であることを示せ．存在しないときには, それを証明せよ.

(4) (3) と同様な問題を, $K = 0$ を満たすコンパクト 2 次元部分多様体の場合に考察せよ.

問題 B5.

(1) $a \in \mathbb{R}^2$ とし, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を連続関数とする.

$$\lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{\epsilon} \int_{|y-a|=\epsilon} h(y)\, dS_y = 2\pi h(a)$$

が成り立つことを示せ．ただし, dS_y は円周 $|y - a| = \epsilon$ 上の線素を表す.

(2) $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$ に対し,

$$G(x, y) = \log |x - y|$$

とおく.

$$\nabla_y G(x, y) := \left(\frac{\partial}{\partial y_1} G(x, y), \frac{\partial}{\partial y_2} G(x, y) \right),$$

$$\Delta_y G(x, y) := \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} G(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} G(x, y)$$

を求めよ.

(3) $R > 0$ とする．$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は C^2 級関数で, $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq R\}$ 上で恒等的に 0 であるとする．グリーンの定理を用いて

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(x, y) \Delta_y f(y)\, dy = 2\pi f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2$$

が成り立つことを示せ.

問題 B6.

(1) $C[0, 1]$ を区間 $[0, 1]$ 上で定義された実数値連続関数全体とする．$C[0, 1]$ 上のノルムを

$$\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$$

で定義する．$C[0, 1]$ はバナッハ空間であることを示せ.

(2) $K(x,y)$ を区間 $[0,1]\times[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数とする．作用素 $T : C[0,1] \ni f(x) \mapsto (Tf)(x) \in C[0,1]$ を

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy, \qquad x \in [0,1]$$

で定義する．T はコンパクト作用素であることを示せ．

(3) $C[0,1]$ 上の恒等作用素を I で表す．

$$\max\{|K(x,y)| \mid (x,y) \in [0,1]\times[0,1]\} < 1$$

ならば，$I-T$ は $C[0,1]$ から $C[0,1]$ への全単射であることを示せ．

問題 B7. 以下のプログラムは Pascal で書かれた関数である．ユークリッドの互除法のアルゴリズムにより 2 つの整数 i, j の最大公約数を求めようとするものである．このプログラムについて以下の問に答えよ．なお解答は Java, c あるいは c++で行ってもよい．その場合，まず以下の関数 gcd をそれらの言語で記述してから以下の問に答えよ．

```
1:  function gcd(i,j:integer):integer ;
2:    var k:integer ;
3:    begin
4:      repeat
5:        if i<j then
6:          begin
7:            k:=i ;
8:            i:=j ;
9:            j:=k
10:         end
11:       i:=i-j ;
12:     until i=0 ;
13:     gcd:=j
14:   end ;
```

(1) この関数はこのままでユークリッドのアルゴリズムを満たして動作するが効率があまりよくない．効率をよくするため改造したい．どこをどのように改造すればよいか指摘せよ．

(2) (1) の改造後，上記プログラム 11 行目と 12 行目の間に `writeln(i," ",j) ;` を挿入した．この関数への入力 i,j にそれぞれ 2898 と 3240 を入れたとき，この関数内でプリントアウトされる内容を改行も含めて書き出せ．

(3) 2 つの整数を入力させ，それらの最大公約数を関数 gcd を用いて計算させ，その結果をプリントさせるメインプログラムを書け．プログラムの名前は euclid とする．

(4) 上の関数を再帰呼び出しで計算するように改造し，それを書き出せ．上の関数は (1) の改造前のものでも，改造後のものでもよい．

問題 B8. 公開鍵 $e = 11$ による $n = 403 = 13 \cdot 31$ を法とする RSA 暗号系は，暗号化変換

$$\mathbf{Z}/n \to \mathbf{Z}/n;\ P \bmod n \mapsto P^e \bmod n$$

で与えられる．

(1) 整数 d で $P^{ed} \equiv P \pmod{n}$ が全ての整数 P に対して成立するもの (秘密鍵 d) を求めよ．

(2) $n = 343 = 7^3$ とすると，公開鍵 $e > 1$ による暗号化変換には問題があるが，その理由を述べよ．

平成１８年度 大学院入試問題（博士前期課程）平成１７年９月６日実施

英語　(15:50 - 17:00)

問題１: 次の英文を和訳しなさい.

Let S and T be subsets of the set of real numbers.

(1) A mapping f of S into T is said to be *continuous* at a point s of S if, for every neighbourhood V of $f(s)$, there is a neighbourhood U of s such that $f(U) \subseteq V$, that is, $f(u) \in V$ for all $u \in U$. The mapping f is said to be *continuous on* S if it is continuous at each point of S.

(2) A sequence $s_1, s_2, s_3, \ldots$ of points of S is said to *converge to the limit* s_0 if, for every neighbourhood U of s_0, there is an integer n_0 (depending on U) such that $s_n \in U$ for all $n \geq n_0$.

Having set up these definitions, a considerable number of elementary deductions can be made.

(a) The identity mapping of S is continuous.

(b) Any constant mapping is continuous.

(c) If $s_1, s_2, s_3, \ldots$ is a sequence such that $s_n = s_0$ for all sufficiently large n, then the limit of that sequence is s_0.

(d) Let f be a continuous mapping of S into T, and let $s_1, s_2, s_3, \ldots$ be a sequence in S that converges to s_0. Then the sequence $f(s_1), f(s_2), f(s_3), \ldots$ converges to $f(s_0)$.

G.J.O. Jameson, Topology and Normed Spaces, Chapman and Hall 1974.

問題２: 問題１の (a),(b) の証明を英語で書きなさい.